Examen de Topologie - corrigé

I - Exercice (4 points)

1. i) $\Rightarrow$ iii) On a $A \subset B(x,r)$ avec $x \in X$ et $r > 0$. Soient $a, a' \in A$, on a $d(a,a') \leq d(a,x) + d(x,a') \leq 2r$, on en déduit que $\operatorname{diam}(A) \leq 2r$.

   iii) $\Rightarrow$ ii) Soit $x \in X$, on cherche $r > 0$ tel que $A \subset B(x,r)$. Choisissons $a \in A$, et montrons que $r = \operatorname{diam}(A) + d(a,x)$ convient. Si $a' \in A$, on a $d(a',x) \leq d(a',a) + d(a,x) \leq \operatorname{diam}(A) + d(a,x) = r$, ce qu'on voulait.

   ii)$\Rightarrow$ i) clair.

2. Il est clair que $\operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(\overline{A})$, montrons donc l'inégalité réciproque. Soit $\varepsilon > 0$, et soient $b, b' \in \overline{A}$. Il existe $a, a' \in A$ tels que $a \in B(b,\varepsilon)$ et $a' \in B(b',\varepsilon)$. On a donc $d(b,b') \leq d(b,a) + d(a,a') + d(a',b') \leq \varepsilon + \operatorname{diam}(A) + \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit $d(b,b') \leq \operatorname{diam}(A)$ et finalement $\operatorname{diam}(\overline{A}) \leq \operatorname{diam}(A)$.

3. Posons $\mathbf{d}(A,B) = \inf_{a \in A, b \in B} d(a,b)$: on appelle ce nombre la distance de A à B. Soient $c, c' \in A \cup B$; on va montrer que $d(c,c') \leq \operatorname{diam}(A) + \mathbf{d}(A,B) + \operatorname{diam}(B)$. Si $c, c' \in A$, cette inégalité est claire car $d(c,c') \leq \operatorname{diam}(A)$; même chose si $c, c' \in B$. Supposons maintenant $c \in A$ et $c' \in B$ (le cas symétrique étant similaire). Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de $\mathbf{d}(A,B)$, il existe $a \in A$, $b \in B$ tel que $d(a,b) \leq \mathbf{d}(A,B) + \varepsilon$. On a alors $d(c,c') \leq d(c,a) + d(a,b) + d(b,c') \leq \operatorname{diam}(A) + \mathbf{d}(A,B) + \varepsilon + \operatorname{diam}(B)$. Ceci étant vrai pour tout ε, on obtient l'inégalité attendue $d(c,c') \leq \operatorname{diam}(A) + \mathbf{d}(A,B) + \operatorname{diam}(B)$. Ceci montre que $A \cup B$ est borné, et que $\operatorname{diam}(A \cup B) \leq \operatorname{diam}(A) + \mathbf{d}(A,B) + \operatorname{diam}(B)$.

II - Problème (7 points)

1. On a

   $$d_1((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sum_n |v_n - u_n| \leq \sum_n |v_n| + \sum_n |u_n|$$

   et le terme de droite est fini par hypothèse.

2. Vérifions l'inégalité triangulaire (les deux autres axiomes sont faciles) : si $(u_n), (v_n)$ et (w_n) sont des suites dans l_1, on a

   $$d_1((u_n),(w_n)) = \sum_n |w_n - u_n| = \sum_n |w_n - v_n + v_n - u_n| \leq \sum_n |w_n - v_n| + \sum_n |v_n - u_n|$$

   d'où $d_1((u_n),(w_n)) \leq d_1((u_n),(v_n)) + d_1((v_n),(w_n))$.

3. NB : la quasi-totalité d'entre vous n'ont pas compris que $(\delta_k)_k$ était une suite de *suites*. Autrement dit $\delta_{k,n} = 0$ si $k \neq n$ et $\delta_{k,k} = 1$.

   Pour tout k on a $d_1(\delta_k, 0) = 1$, ainsi la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 contient bien la suite $(\delta_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Par contre la suite $(\delta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ n'est pas convergente : si elle était convergente, alors pour k_1, k_2 grands on aurait $d_1(\delta_{k_1}, \delta_{k_2})$ arbitrairement petit (autrement dit la suite $(\delta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ serait de Cauchy), mais on remarque que $d_1(\delta_{k_1}, \delta_{k_2}) = 2$ pour tous $k_1 \neq k_2$.

4. Remarquons que pour des réels positifs $a_1, \cdots, a_n$ on a l'inégalité $\sum a_i^2 \leq (\sum a_i)^2$, en effet quand on développe le terme de droite on obtient le terme de gauche plus des termes croisés. Cette remarque implique que pour tout élément $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_1$, on a $(d_2((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, 0))^2 \leq (d_1((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, 0))^2$, d'où l'inégalité demandée en passant à la racine carrée.

5. Pour tout entier $k > 0$ et pour tout réel $a > 0$ considérons la suite $(u_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ qui vaut $\frac{1}{k^a}$ pour $n = 1, \cdots, k$ et qui vaut 0 pour $n > k$. On calcule $d_1((u_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}, 0) = k^{1-a}$ et $d_2((u_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}, 0) = k^{0.5-a}$. Ainsi si $0.5 < a < 1$ la suite $(u_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 pour d_2 mais pas pour d_1.

6. Les distances d_1 et d_2 ne sont pas équivalentes sur l_1. En effet si elles l'étaient alors les suites convergentes pour l'une ou l'autre distances seraient les mêmes, et l'exemple précédent montre que ce n'est pas le cas.

III - Question de cours (4 points).

1. Un espace topologique est un ensemble X muni d'une collection de sous-ensembles $\mathcal{T}$ (les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés les ouverts de X) vérifiant
   (a) X et $\emptyset$ sont des éléments de $\mathcal{T}$;
   (b) $\mathcal{T}$ est stable pour les intersections finies;
   (c) $\mathcal{T}$ est stable pour les unions quelconques.

2. Une application $f : X \to Y$ entre deux espaces topologiques est dite continue en un point $x \in X$ si pour tout voisinage V de $f(x)$, il existe un voisinage U de x tel que $f(U) \subset V$. L'application f est dite continue sur X si elle est continue en chaque point de X.

3. Soit $f : X \to Y$ est une application continue entre deux espaces topologiques, et $V \subset Y$ un ouvert. Soit $x \in f^{-1}(V)$. Comme V est un voisinage de $f(x)$, il existe U voisinage de x tel que $f(U) \subset V$. On a donc $x \in U \subset f^{-1}(V)$, ainsi $f^{-1}(V)$ est voisinage de chacun de ces points, autrement dit $f^{-1}(V)$ est ouvert.

   Réciproquement supposons que la préimage par f de tout ouvert de Y est un ouvert de X. Soit $x \in X$, et $V \subset Y$ un voisinage de $f(x)$. Il existe donc un ouvert W tel que $f(x) \in W \subset V$, et $U = f^{-1}(W)$ est un voisinage ouvert de x vérifiant $f(U) \subset V$. Ainsi f est continue en x.

IV - Quizz (5 points).

1. Il suffit de prendre un espace métrique qui n'est pas un espace vectoriel, par exemple le cercle unité dans $\mathbb{R}^2$ (avec la distance induite par la distance euclidienne) convient.

2. Par exemple la suite définie (pour $k > 0$)par $u_{2k} = 1/k$ et $u_{2k+1} = k$ convient (0 est l'unique valeur d'adhérence).

3. Si X est muni de la topologie discrète (et contient au moins deux éléments), alors tout singleton convient. Autre exemple : prendre $X = [0, 1] \cup [2, 3] \subset \mathbb{R}$ (avec la topologie induite par la topologie usuelle) et $A = [0, 1]$.

4. Il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ non continue. En effet $\mathbb{Z}$ est muni de la topologie discrète, donc la préimage de tout ouvert est ouverte car tout sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ est un ouvert.

5. On peut prendre $X = \mathbb{R}$ et $A =]-\infty, 0[$, ou encore $X = \mathbb{R}^2$ et A un disque.