Université Claude Bernard Lyon I
Licence STS troisième année : Topologie
Printemps 2009

Devoir maison

à rendre en TD le 20 mai

Exercice 1. 1. Soit A une partie non vide d'un espace métrique (X, d). Le diamètre de A est défini par

$$\operatorname{diam}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{a,a' \in A} d(a, a').$$

2. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes (sous ces conditions, on dit que A est bornée)
   i) $\exists\, x \in X, \quad \exists\, r > 0 \colon A \subset B(x, r)$;
   ii) $\forall\, x \in X, \quad \exists\, r > 0 \colon A \subset B(x, r)$;
   iii) A est de diamètre fini.
3. Montrer que si $A \neq \emptyset$ est une partie bornée, alors $\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(\overline{A})$.
4. Montrer que si A et B sont deux parties bornées, alors $A \cup B$ est bornée. Que peut-on dire de $\operatorname{diam}(A \cup B)$? (*Indication* : poser $\mathbf{d}(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{a \in A, b \in B} d(a, b)$).

Exercice 2. Dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, si $x, y \in E$, le "segment de x à y" est l'ensemble

$$[x, y] = \{(1-t)x + ty \in E \colon t \in [0, 1]\}.$$

Une partie C de E est dite "convexe" ssi : $\forall\, x, y \in C$ on a $[x, y] \subset C$.

Soit $A \subset E$. On note

$$\operatorname{co}(A) = \bigcap_{\substack{C \text{ convexe} \\ C \supset A}} C$$

l'enveloppe convexe de A.

1. Montrer que $\operatorname{co}(A)$ est convexe.
2. Dans le cas $E = \mathbb{R}$, déterminer $\operatorname{co}(\mathbb{N})$ et $\operatorname{co}\big(\{\frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N}^*\}\big)$.
3. Dans $E = \mathbb{R}^2$, quelle est l'enveloppe convexe du graphe de la fonction : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $x \mapsto e^{-|x|}$? On se contentera d'une justification graphique. Conclure que

$$A \text{ fermé} \not\Rightarrow \operatorname{co}(A) \text{ fermé}.$$

Exercice 3. La différence symétrique de deux ensembles A et B est définie par

$$A \triangle B \stackrel{\text{def}}{=} (A \cup B) \backslash (A \cap B).$$

1. Soient $A \subset \mathbb{N}^*$ et $B \subset \mathbb{N}^*$. On définit

$$d(A,B) = \begin{cases} \Big(\min(A \triangle B)\Big)^{-1} & \text{si } A \neq B \\ 0 & \text{si } A = B. \end{cases}.$$

   Démontrer que si A, B, C sont trois ensembles distincts de $\mathbb{N}^*$, alors

$$d(A,B) \leq \max\{d(A,C), d(C,B)\}$$

   (*Indication :* on pourra utiliser l'inclusion $A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (C \triangle B)$.

2. Conclure que d définit une distance sur $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous $A, B \subset \mathbb{N}^*$,

$$d(A,B) < \frac{1}{n} \iff A \cap [1,n] = B \cap [1,n].$$

4. On considère la suite (X_n) dans $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$, où

$$X_n = \{1, 2^n, 3^n, \ldots\}$$

   (Noter que $X_1 = \{1,2,3,\ldots\}$, $X_2 = \{1,4,9,\ldots\}$ est l'ensemble des "carrés", $X_3 = \{1,8,27,\ldots\}$ est l'ensemble des "cubes"). Montrer que la suite (X_n) converge vers un ensemble $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ que l'on déterminera. (*Indication :* utiliser le résultat de la question précédente).