Université Claude Bernard Lyon I
Licence STS troisième année : Topologie
Printemps 2009

Devoir maison : corrigé

Exercice 1. 1.

2.

i) $\Rightarrow$ iii) On a $A \subset B(x,r)$ avec $x \in X$ et $r > 0$. Soient $a, a' \in A$, on a $d(a,a') \leq d(a,x) + d(x,a') \leq 2r$, on en déduit que $\mathrm{diam}(A) \leq 2r$.

iii) $\Rightarrow$ ii) Soit $x \in X$, on cherche $r > 0$ tel que $A \subset B(x,r)$. Choisissons $a \in A$, et montrons que $r = \mathrm{diam}(A) + d(a,x)$ convient. Si $a' \in A$, on a $d(a',x) \leq d(a',a) + d(a,x) \leq \mathrm{diam}(A) + d(a,x) = r$, ce qu'on voulait.

ii)$\Rightarrow$ i) clair.

3. Il est clair que $\mathrm{diam}(A) \leq \mathrm{diam}(\overline{A})$, montrons donc l'inégalité réciproque. Soit $\varepsilon > 0$, et soient $b, b' \in \overline{A}$. Il existe $a, a' \in A$ tels que $a \in B(b,\varepsilon)$ et $a' \in B(b',\varepsilon)$. On a donc $d(b,b') \leq d(b,a) + d(a,a') + d(a',b') \leq \varepsilon + \mathrm{diam}(A) + \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit $d(b,b') \leq \mathrm{diam}(A)$ et finalement $\mathrm{diam}(\overline{A}) \leq \mathrm{diam}(A)$.

4. Posons $\mathbf{d}(A,B) = \inf_{a\in A, b\in B} d(a,b)$: on appelle ce nombre la distance de A à B. Soient $c, c' \in A \cup B$; on va montrer que $d(c,c') \leq \mathrm{diam}(A) + \mathbf{d}(A,B) + \mathrm{diam}(B)$. Si $c, c' \in A$, cette inégalité est claire car $d(c,c') \leq \mathrm{diam}(A)$; même chose si $c, c' \in B$. Supposons maintenant $c \in A$ et $c' \in B$ (le cas symétrique étant similaire). Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de $\mathbf{d}(A,B)$, il existe $a \in A$, $b \in B$ tel que $d(a,b) \leq \mathbf{d}(A,B) + \varepsilon$. On a alors $d(c,c') \leq d(c,a) + d(a,b) + d(b,c') \leq \mathrm{diam}(A) + \mathbf{d}(A,B) + \varepsilon + \mathrm{diam}(B)$. Ceci étant vrai pour tout ε, on obtient l'inégalité attendue $d(c,c') \leq \mathrm{diam}(A) + \mathbf{d}(A,B) + \mathrm{diam}(B)$. Ceci montre que $A \cup B$ est borné, et que $\mathrm{diam}(A \cup B) \leq \mathrm{diam}(A) + \mathbf{d}(A,B) + \mathrm{diam}(B)$.

Exercice 2. 1. Soient $x, y \in \mathrm{co}(A)$, et soit $t \in [0,1]$, on veut montrer que $(1-t)x + ty \in \mathrm{co}(A)$. Or si C est un convexe qui contient A, on a $x, y \in C$ (car C contient A) et donc $(1-t)x + ty \in C$ (car C est convexe). On en déduit

$$(1-t)x + ty \in \bigcap_{\substack{C \text{ convexe} \\ C \supset A}} C$$

ce qu'on voulait.

2. Dans $E = \mathbb{R}$, on a $\mathrm{co}(\mathbb{N}) = \mathbb{R}$. En effet $\mathrm{co}(\mathbb{N})$ contient chaque couple d'entiers $\{n, n+1\}$ (car $\mathbb{N} \subset \mathrm{co}(\mathbb{N})$) et donc $\mathrm{co}(\mathbb{N})$ contient chaque intervalle $[n, n+1]$ (car $\mathrm{co}(\mathbb{N})$ est convexe).

   D'autre part $\mathrm{co}\big(\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}\big) =]0,1]$. En effet $\mathrm{co}\big(\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}\big)$ contient la réunion de tous les intervalles $[\frac{1}{n}, 1]$, et donc $\mathrm{co}\big(\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}\big) \supset]0,1]$. Réciproquement, $]0,1]$ est convexe et il contient $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$. Mais alors $]0,1] \supset \mathrm{co}\big(\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}\big)$.

3. Dans $E = \mathbb{R}^2$, l'enveloppe convexe du graphe de la fonction : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto e^{-|x|}$ est égal à
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 < y < 1\} \cup \{(0,1)\}.$$
On constate sur cet exemple que le graphe A est un fermé de $\mathbb{R}^2$ mais que l'enveloppe

convexe $\mathrm{co}(A)$ n'est pas fermée.

Exercice 3. Commençons par montrer l'inclusion $A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (C \triangle B)$ (même si l'énoncé permettait de l'utiliser sans la démontrer). Soit $x \in A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Supposons que $x \in A \setminus B$ (l'autre cas étant symétrique). Si $x \in C$, on a $x \in C \setminus B$, et donc $x \in C \triangle B$. Si $x \notin C$, on a $x \in A \setminus C$, et donc $x \in A \triangle C$. Dans les deux cas on obtient bien $x \in (A \triangle C) \cup (C \triangle B)$, ce qu'on voulait.

1. Montrons maintenant l'inégalité
$$d(A,B) \leq \max\{d(A,C), d(C,B)\}$$
De l'inclusion $A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (C \triangle B)$ on déduit l'inégalité
$$\min(A \triangle B) \geq \min(\min(A \triangle C), \min(C \triangle B)).$$
En passant à l'inverse on obtient $\frac{1}{\min(A \triangle B)} \leq \max\left(\frac{1}{\min(A \triangle C)}, \frac{1}{\min(C \triangle B)}\right)$, ce qui donne l'inégalité attendue.
2. L'équivalence $d(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$ découle immédiatement de la définition, de même que l'égalité $d(A,B) = d(B,A)$. Enfin, l'inégalité triangulaire est une conséquence de l'inégalité ultramétrique (c'est-à-dire l'inégalité démontrée dans la question précédente). Ainsi d définit une distance sur $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$.
3. Si $A = B$ les deux côtés de l'équivalence sont clairement vraie. Supposons donc $A \neq B$. Par définition on a
$$d(A,B) < \frac{1}{n} \iff \min(A \triangle B) > n.$$
Or $\min(A \triangle B) > n$ signifie que tout entier $p \leq n$ ou bien appartient à la fois à A et à B, ou bien n'appartient à aucun des deux. On a donc
$$\min(A \triangle B) > n \iff A \cap [1,n] = B \cap [1,n].$$
4. Montrons que la suite (X_n), où $X_n = \{1, 2^n, 3^n, \ldots\}$, converge vers le singleton $X = \{1\}$. Si $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé, et que $p > n$, on a $X_p \cap [1, 2^n] = \{1\}$ (car $2^p > 2^n$), et donc par la question précédente $d(X, X_p) < \frac{1}{2^n}$. Ainsi $d(X, X_p) \to 0$ quand $p \to \infty$, ce qu'on voulait.