Premier cours : jeudi 20 septembre.

1 Préliminaires

Espace projectif

L'espace projectif $\mathbb{P}^n$ est le quotient de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ par les homothéties : $\mathbb{P}^n = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim$ où $(x_0, \cdots, x_n) \sim (c.x_0, \cdots, c.x_n)$ avec $c \in \mathbb{C}^*$. On note $[x_0 : \cdots : x_n]$ la classe d'équivalence de $(x_0, \cdots, x_n)$, on dit que $[x_0 : \cdots : x_n]$ sont les coordonnées homogènes du point de $\mathbb{P}^n$ correspondant.

On a $\mathbb{P}^n = \mathbb{C}^n \cup \mathbb{P}^{n-1}$, lorsqu'une telle union disjointe (non unique) est fixée, on dit que les points de $\mathbb{P}^{n-1}$ sont des points à l'infini. (faire des dessins pour $n = 1, 2$, écrire les cartes standards, remarquer que $\mathbb{P}^1$ est topologiquement une sphère : sphère de riemman).

Le lieu des zéro d'un (ou plusieurs) polynôme(s) homogène(s) en $n+1$ variables défini un sous-ensemble de $\mathbb{P}^n$: c'est ce qu'on appelle une variété (projective). Remarquer la quasi-bijection entre les polynôme en n variables et les polynômes homogènes en $n+1$ variables.

Notions de dimension et de singularité : provisoirement, on emprunte ces notions au cours de calcul différentiel. Une variété est donc lisse de dimension k si en tout point il existe un voisinage (dans la topologie analytique) isomorphe (holomorphiquement) à un ouvert de $\mathbb{C}^k$. En particulier, pour vérifier qu'une variété donnée par une seule équation $f = 0$ dans une carte affine $\mathbb{C}^n$ est lisse au point p, il suffit de vérifier que les dérivées partielles en p ne s'annulent pas simultanément (à l'origine, cela revient à constater que la partie linéaire de l'équation est non triviale). Remarquer que pour un polynôme quelconque et a générique la variété $f = a$ est lisse.

Il y a deux topologies que l'on peut considérer sur une variété : la topologie analytique (induite par la topologie usuelle sur $\mathbb{C}^n$), et la topologie de Zariski, où les fermés sont les sous-variétés algébriques. En principe lorsqu'on emploie des notions topologiques (ouvert, voisinage...) dans ce cours ce sera par rapport à la topologie de Zariski.

Courbes planes

Un exemple basique d'ensemble algébrique est celui d'une courbe plane $C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 | P(x, y) = 0\}$ (on note $C = \mathbf{V}(P)$) où P est un polynôme de degré d. On peut compactifier C en la considérant comme une courbe projective.

L'invariant discret basique est le genre, donné par la formule $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$: on peut avoir une idée intuitive de cette formule en considérant une courbe lisse de degré d comme une perturbation de d droites. A noter que l'on ne peut pas réaliser n'importe quel genre (il faudrait considérer des courbes spatiales). Remarquons que les droites ($d = 1$) et les coniques ($d = 2$) sont de genre 0, et effectivement on peut vérifier qu'une conique est isomorphe à $\mathbb{P}^1$ en réalisant l'isomorphisme par une projection.

C'est un fait que deux courbes de genre différents ne sont jamais isomorphes : c'est clair d'un point de vue topologique, mais on cherche ici un argument purement algébrique. Il est facile de voir par exemple qu'une cubique $y^2 = x^3 + ax + b$ n'est pas isomorphe à $\mathbb{P}^1$: l'involution $y \to -y$ admet 4 points fixes, alors qu'une involution sur $\mathbb{P}^1$ admet au plus deux points fixes (rappel :

le groupe des automorphismes de $\mathbb{P}^1$ est $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$). Nous verrons plus tard un argument plus général (à l'aide du diviseur canonique, qui est essentiellement équivalent au genre).

2 Fonctions régulières et rationnelles

Notions locales (affines)

Définition 1 *Une fonction $f : X \subset \mathbb{A}^n \to \mathbb{C}$ est dite régulière au point $x \in X$ si elle est exprimable au voisinage de x comme un quotient P/Q, avec $P, Q \in \mathbb{C}[T_1, \cdots, T_n]$ et $Q(x) \neq 0$. On dit que f est régulière sur un ouvert U si elle est régulière en tout point de U. On note $\mathbb{C}[U]$ l'algèbre des fonctions régulières sur U.*

L'algèbre $\mathbb{C}[X]$ des fonctions régulières sur X s'identifie au quotient $\mathbb{C}[T_1, \cdots, T_n]/I(X)$ où $I(X)$ est l'idéal définissant X (il faut utiliser le fait qu'un polynôme sans zéro est une constante : Nullstellensatz).

Définition 2 *Le corps des fractions de $\mathbb{C}[X]$ est appelé le corps des fonctions (rationnelles) sur X.*

Attention : une fonction rationnelle n'est pas partout définie en général.
Exemple : x/y sur $\mathbb{C}^2$.

Définition 3 *Une fonction rationnelle $\varphi \in \mathbb{C}(X)$ est régulière au point $x \in X$ si on peut écrire $\varphi = f/g$ avec $f, g \in \mathbb{C}[X]$ et $g(x) \neq 0$.*

Définition 4 *Une application rationnelle $f : X \subset \mathbb{A}^n \dashrightarrow Y \subset \mathbb{A}^m$ est un m-uplet de fonctions rationnelles $(f_1, \cdots, f_m)$ tel que pour tout point $x \in X$ où les f_i sont régulières, $f(x) \in Y$. Si les f_i sont régulières sur X on dit que f est une application régulière (ou un morphisme), et on note avec une flèche pleine : $f : X \to Y$.*

Notions globales (projectives)

Définition 5 (fonction régulière en x) *Une fonction $f : X \subset \mathbb{P}^n \to \mathbb{C}$ est dite régulière au point $x \in X$ si l'une des deux conditions équivalentes (exo : vérifier l'équivalence !) suivantes est satisfaites :*

1. *f peut s'écrire $f = P/Q$ avec P, Q polynômes homogènes de même degré en $n+1$ variables, et $Q(x) \neq 0$.*

2. *f est régulière dans un voisinage affine de x.*

On définit l'anneau local $\mathcal{O}_x$ comme l'anneau des germes de fonctions régulières au point x.

A noter que les fonctions régulières sur X sont les constantes : la notion de fonction régulière globale n'est pas pertinente.

Définition 6 *Une application $f : X \to Y \subset \mathbb{P}^n$ (ici X est projective, ou un ouvert d'une variété projective) est dite régulière (on dit aussi f est un morphisme) si (à nouveau, deux définitions équivalentes)*

1. *Pour tout $x \in X$, il existe des voisinages affines $x \in U$ et $f(x) \in V$ tels que $f : U \to V$ soit régulière.*

2. *Pour tout $x \in X$, il existe des polynômes homogènes de même degré $f_0, \cdots, f_m$ tels $f = [f_0 : \cdots : f_m]$ et $f_i(x)$ non tous nuls.*

Exemple : cubique gauche, plongement de Veronese, plongement de Segre.
Exemple : $[X : Y : Z] \to [X : Z - Y]$ du "cercle" $X^2 + Y^2 - Z^2$ vers $\mathbb{P}^1$.

Définition 7 *Une fonction rationnelle sur X projective est une expression de la forme $h = P/Q$, où P, Q sont deux polynômes homogènes de même degré. Attention bis : une fonction rationnelle n'est pas partout bien définie !*

Définition 8 *Une application rationnelle de $X \subset \mathbb{P}^m$ vers $\mathbb{P}^n$ est donnée par un $n+1$-uplet de fonctions rationnelles (non toutes identiquement nulles) : $f : [h_0 : \cdots : h_n]$.*

Remarquer qu'une fonction (ou une application) rationnelle est complètement déterminée dès qu'on l'a spécifiée sur un ouvert $U \subset X$ où X est irréductible (si $f/g \equiv 0$ sur U écrire $X = \{f = 0\} \cup X \setminus U$).

Proposition 1 *Une application rationnelle dominante $\varphi : X \dashrightarrow Y$ induit une inclusion $\varphi^* : \mathbb{C}(Y) \to \mathbb{C}(X)$.*

Preuve. Par la remarque ci-dessus on peut se limiter au cas X, Y affines. Si $f \in \mathbb{C}[Y]$ alors $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$. Ceci définit clairement un morphisme d'anneau, et si $f \circ \varphi = 0$ sur X cela signifie que $\varphi(X)$ est contenue dans le lieu des zéro $f = 0$, mais si $f \neq 0$ ceci viendrait contredire $\varphi(X)$ dense. Ainsi φ^* est injective sur $\mathbb{C}[Y]$, et donc également sur $\mathbb{C}(Y)$. □

Définition 9 *On dit que deux variétés X, Y sont birationnelles si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :*

1. *Il existe une application rationnelle $f : X \dashrightarrow Y$ qui admette un inverse rationnel.*

2. *Il existe des ouverts $U \subset X$, $V \subset Y$ avec U isomorphe à V.*

3. *Les corps des fonctions $\mathbb{C}(X)$ et $\mathbb{C}(Y)$ sont isomorphes.*

Notion d'éclatement

Considérons le changement des coordonnées polaires en les coordonnées cartésiennes du plan (réel), $(\rho, \theta) \to (x, y)$. Les droites $\theta = cte$ sont envoyées sur des droites du plan (x, y) passant par l'origine, et la droite $\rho = 0$ est contractée sur le point $(0, 0)$.

L'application d'éclatement est une application algébrique avec des propriétés analogues. Heuristiquement: $\theta = \tan y/x$, ainsi y/x est un analogue algébrique de l'argument. L'argument étant fixé, il reste à fixer ρ, ce qui revient à fixer x. Ainsi, si l'on pose $\theta = y/x$, $\rho = x$, on a $y = \theta\rho$ et l'analogue du changement de coordonnées ci-dessus est $(\rho, \theta) \to (x, y) = (\rho, \theta\rho)$. Cette application est (la carte d') un éclatement.

D'un point de vue légèrement différent, considérons le graphe Γ de l'application $(x, y) \in \mathbb{C}^2 \to [x : y] \in \mathbb{P}^1$. On a

$$\Gamma = \{(x, y, [u : v]) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1 | xv = yu\}.$$

La projection naturelle $\pi : \Gamma \to \mathbb{C}^2$ est l'application d'éclatement. On a $\pi^{-1}(0, 0)$ isomorphe à $\mathbb{P}^1$, et la préimage de tout autre point est un point. De plus, dans la carte $U = \{u = 1\}$, on a

$$U \cap \Gamma = \{(x, y, [1 : v]) | xv = y\}$$

isomorphe à $\mathbb{C}^2$ (avec coordonnées x et v), et $\pi : (x, y, [1 : v]) \to (x, xv)$ est bien l'application vue ci-dessus.

Notons que cette construction est locale : on peut remplacer $\mathbb{C}^2$ par un voisinage W d'un point $p \in S$ où S est une surface (lisse), et x, y sont alors des paramètres locaux.

Définition 10 *On dit que des fonctions $u_1, \cdots, u_n$ sur une variété X de dimension n sont des paramètres locaux au point p si les u_i s'annulent en p et si les différentielles du_i sont linéairement indépendantes sur T_pX.*

En résumé : étant donné $p \in S$ un point sur une surface lisse, il existe une application régulière $\pi : \tilde{S} \to S$ telle que

- $E = \pi^{-1}(p)$ est une courbe rationnelle (i.e. isomorphe à $\mathbb{P}^1$);
- π induit un isomorphisme de $\tilde{S} \setminus E$ vers $S \setminus \{p\}$.

  Remarquons que les surfaces S et $\tilde{S}$ sont birationnelles, l'application rationnelle $\pi^{-1} : S \dashrightarrow \tilde{S}$ n'est pas défini en p.

Deuxième cours : jeudi 27 septembre.

Compléments

Notion de composante irréductible : toute variété algébrique s'écrit comme une union finie de composantes irréductibles.
Propriétés basiques sur les ouverts de Zariski et les fonctions rationnelles (voir [S, p. 36–37]) :
Soit X irréductible.

1. Tout intersection finie d'ouverts non vide de X est ouverte non vide.

2. Tout ouvert non vide de X est dense.

3. Si $\varphi \in \mathbb{C}(X)$ le lieu où φ est régulière est ouvert non vide.

4. Une fonction $\varphi \in \mathbb{C}(X)$ est complètement déterminée dès qu'elle est spécifiée sur un ouvert.

5. $\mathbb{C}[U]$ et $\mathcal{O}_x$ peuvent être vus comme des sous-anneaux de $\mathbb{C}(X)$.

Soit $f : X \dashrightarrow Y$ une application rationnelle dominante, on a vu que $f^* : \mathbb{C}(Y) \to \mathbb{C}(X)$ est alors une inclusion.

Proposition 2 (voir [Ha, p.80]) *La fibre générique de f est finie (de cardinal d) si et seulement si $\mathbb{C}(X)$ est une extension finie (de degré d) de $\mathbb{C}(Y)$.*

Preuve. Réduction : en considérant le graphe de l'application et en se restreignant à des ouverts, on peut supposer que $f : X \subset \mathbb{A}^n \to Y \subset \mathbb{A}^{n-1}$ est donnée par la projection $(z_1, \cdots, z_n) \to (z_1, \cdots, z_{n-1})$. Dans ce cas $\mathbb{C}(X) = \mathbb{C}(Y)(z_n)$.

Supposons z_n algébrique sur $\mathbb{C}(Y)$, il existe donc un polynôme $P(z_1, \cdots, z_n) = a_d z_n^d + \cdots + a_1 z_n + a_0$ identiquement nul sur X et de degré minimal pour cette propriété (on peut supposer $a_i \in \mathbb{C}[z_1, \cdots, z_{n-1}]$). Soit $D(z_1, \cdots, z_{n-1})$ le discriminant de P comme polynôme en z_n. Rappelons que sur un corps de caractéristique 0 le polynôme minimal n'a que des racines simples (voir [L, chap. V 6.]), ainsi D n'est pas identiquement nul sur Y. Hors du lieu $a_d = 0$ et $D = 0$ la fibre de l'application f consiste d'exactement d points.

Supposons z_n transcendant, alors pour tout $P(z_1, \cdots, z_n) = a_d z_n^d + \cdots + a_1 z + a_0 \in I(X)$ chacun des a_i doit être identiquement nul sur Y, ce qui implique que les fibres de f sont non finies au-dessus de l'ouvert Y. □

Exemple d'applications régulières : les projections (exemples dans $\mathbb{P}^3$).

Définition 11 *Une variété X est dite de dimension k s'il existe un morphisme dominant à fibres finies $X \mapsto \mathbb{P}^k$. Cela revient à dire que $\dim X$ est le degré de transcendance de $\mathbb{C}(X)$ sur $\mathbb{C}$.*

Une propriété importante que l'on admet :

Théorème 1 (voir [S, p. 57]) *L'image d'une variété projective par une application régulière est fermée.*

Corollaire 2 (voir [S, p. 59]) *Une fonction régulière sur une variété projective irréductible est constante.*

NB : Ces résultats sont faux dans le cadre affine !

3 Diviseurs

Définition 12 (Diviseur de Weil) *Un diviseur (de Weil) D sur une variété X est une collection de sous-variétés irréductibles C_i $(i = 1, \cdots, r)$ de codimension 1, chacune étant affectée d'une multiplicité $k_i \in \mathbb{Z}$.*
On note $D = \sum_i k_i C_i$.

En particulier si X est une courbe, D est une collection de points avec multiplicité; si X est une surface, D est une collection de courbes irréductibles avec multiplicité.

Définition 13 (Diviseur de Cartier) *Un diviseur (de Cartier) D sur une variété X est la donnée d'un recouvrement (U_α) de X par des ouverts, et pour chaque U_α d'une fonction rationnelle f_α, avec la condition de compatibilité :*
Sur chaque intersection $U_\alpha \cap U_\beta$, la fonction f_α / f_β est une fonction à valeur dans $\mathbb{C}^*$ (autrement dit sans zéro ni pôle).

On peut munir l'ensemble des diviseurs (Weil ou Cartier) d'une loi de groupe. Un diviseur (de Weil) avec tous les $k_i \geq 0$ est dit *effectif.*

Proposition 3 *Sur une variété lisse les notions de diviseur de Weil et de diviseur de Cartier coïncident.*

Contre-exemple sur une variété singulière : règle du cône $y^2 = xz$ dans $\mathbb{C}^3 \subset \mathbb{P}^3$.
La propriété clé pour démontrer cette équivalence est la

Proposition 4 *Soit X une variété lisse, $Y \subset X$ une sous-variété irréductible de codimension 1, et $x \in Y$. Alors au voisinage de x la sous-variété Y peut être définie par une seule équation.*

Remarque : la proposition est vraie même si Y est singulière. Par contre, la généralisation de cette proposition en codimension quelconque n'est correcte que si Y est lisse (voir [S, p.111]).

Preuve de la prop. 4. On admet le

Fait 3 (voir [S, p.108]) *L'anneau local $\mathcal{O}_x$ est factoriel.*

Soit $f \in \mathcal{O}_x$ une fonction s'annulant sur Y. Choisissons un facteur irréductible de f, disons g, s'annulant sur Y (g existe par irréductibilité de Y). On veut montrer que g est une équation locale de Y, autrement dit que $I_{Y,x} = (g)$.

Montrons tout d'abord que $Y = \mathbf{V}(g)$. D'une part $\mathbf{V}(g)$ est irréductible : sinon il existerait h, h' tels que $h.h' = 0$ sur $\mathbf{V}(g)$ mais $h, h' \neq 0$ sur $\mathbf{V}(g)$. On aurait alors $g|(h.h')^r$ par le

Fait 4 (corollaire du Nullstellensatz, voir [S, p.282]) *Si $I \subset \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]$ est un idéal, et $P \in \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]$ est identiquement nul sur la variété $\mathbf{V}(I)$, alors $P^r \in I$ pour un certain $r \geq 0$.*

Mais alors $g|h$ ou $g|h'$ (factorialité de $\mathcal{O}_x$) : absurde. D'autre part on a le

Fait 5 (voir [S, p.68]) *Si on a deux variétés $X \subset Y$ avec Y irréductible et* $\dim X = \dim Y$*, alors $X = Y$.*

Ainsi on a bien $Y = \mathbf{V}(g)$.

Enfin soit u définie au voisinage de x et identiquement nul sur $Y = \mathbf{V}(g)$, alors $g|u^s$ (à nouveau par le Nullstellensatz), d'où $g|u$ (factorialité) et finalement $I_{Y,x} = (g)$. □

Preuve de la prop. 3. Il s'agit essentiellement de définir la notion d'ordre d'annulation d'une fonction le long d'une hypersurface. Soient $C \subset X$ une variété de codimension 1 irréductible, U un ouvert affine intersectant C et sur lequel C admet une équation locale $g = 0$, et $f \not\equiv 0$ une fonction régulière sur U. Il existe un entier k tel que $f \in (g^k)$ mais $f \notin (g^{k+1})$ (regarder le développement de Taylor de f et g en un point de $C \cap U$). Cet entier k est l'ordre d'annulation de f le long de C, et est noté $\nu_C(f)$ (exo : vérifier que la définition ne dépend pas de U). On vérifie que $\nu_C(f.h) = \nu_C(f) + \nu_C(h)$. Si f est maintenant une fonction rationnelle sur U (ou de façon équivalente sur X), on écrit $f = f_1/f_2$ avec f_1, f_2 régulière et on pose $\nu_C(f) = \nu_C(f_1) - \nu_C(f_2)$.

Maintenant si D est un diviseur de Cartier donné par des équations locales f_α, on lui associe le diviseur de Weil $\sum \nu_C(f_\alpha)\, C$ (la somme est sur l'ensemble fini des hypersurfaces pour lesquelles $\nu_C(f_\alpha) \neq 0$).

Réciproquement, si $D = \sum_i k_i C_i$ est un diviseur de Weil, on considère un recouvrement ouvert $\{U_\alpha\}$ de X tel que sur chaque U_α l'hypersurface C_i admette une équation locale $g_{\alpha,i}$ et on pose $f_\alpha = \prod_i g_{\alpha,i}^{k_i}$. □

Il n'y a pas beaucoup de façon d'obtenir des diviseurs, en voici 3 :

1. Diviseurs d'une fonction rationnelle $(f) = (f)_0 - (f)_\infty$, on les appelle *principaux.* On va voir que ces diviseurs peuvent être considérés comme triviaux;

2. Diviseurs obtenus en intersectant X avec un hyperplan de l'espace projectif ambiant, ce sont les diviseurs que l'on appelle *très amples*;

3. Diviseurs obtenus à partir d'une forme différentielle, en particulier le diviseur canonique : voir plus loin.

Exemple : sur la parabole $y = x^2 \subset \mathbb{P}^2$, diviseur ample donné par la droite $y = x$ ou par $y = 0$, diviseur principal associé à $f = y$.

Diviseurs et fibrés en droites (voir [GH, p.132–138], ou [S2, chap. VI 1.])

Un fibré en droite sur X est un morphisme $L \mapsto X$ dont les fibres sont isomorphes à $\mathbb{C}$ et qui est localement trivial. Ici L est une "variété algébrique abstraite" obtenue comme recollement de variétés affines, on sort donc (temporairement) du monde des variétés projectives. Le but de cette digression est de motiver la définition du groupe de Picard, où l'on quotiente par les diviseurs principaux.

Définition 14 *Un fibré en droite sur X équivaut à la donnée d'un recouvrement de X par des ouverts $\{U_\alpha\}$ et de fonctions de transition $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathbb{C}^*$ satisfaisant*

$$\begin{cases} g_{\alpha\beta} \cdot g_{\beta\alpha} &= 1, \\ g_{\alpha\beta} \cdot g_{\beta\gamma} \cdot g_{\gamma\alpha} &= 1. \end{cases}$$

A partir de cette donnée on peut reconstruire le morphisme $L \mapsto X$ proprement dit : on prend L égal à l'union des $U_\alpha \times \mathbb{C}$ avec identification des fibres selon les $g_{\alpha\beta}$.

Inversement si $\pi : L \mapsto X$ est un fibré en droite avec ouverts trivialisants $\{U_\alpha\}$, on a des isomorphismes $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{C}$ et on retrouve les $g_{\alpha\beta}$ par la formule

$$g_{\alpha\beta}(z) = (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})|_{L_z}.$$

Si on a des fonctions h_α sur U_α à valeurs dans $\mathbb{C}^*$, on peut changer les isomorphismes φ_α en posant

$$\varphi'_\alpha = h_\alpha \varphi_\alpha$$

Les nouvelles fonctions de transitions s'écrivent

$$g'_{\alpha\beta} = \frac{h_\alpha}{h_\beta} g_{\alpha\beta}.$$

Réciproquement deux jeux de fonctions de transitions $g'_{\alpha\beta}$ et $g_{\alpha\beta}$ liés par une telle relation définissent le même fibré en droites.

A partir d'un diviseur de Cartier D défini par des équations locales rationnelles f_α on peut construire un fibré en droite $[D]$ en posant $g_{\alpha\beta} = \frac{f_\alpha}{f_\beta}$. Cette correspondance est clairement un morphisme de groupe $(D, +) \to ([D], \otimes)$.

On remarque que si D est le diviseur d'une fonction rationnelle globale f alors le fibré en droite associé est trivial. Réciproquement, si $[D]$ est trivial, alors $\frac{f_\alpha}{f_\beta} = \frac{h_\alpha}{h_\beta}$ avec les h_α à valeurs dans $\mathbb{C}^*$, ainsi les $\frac{f_\alpha}{h_\alpha}$ sont également des équations locales pour D et forme en fait une équation globale.

Ainsi le groupe des fibrés en droite de la forme $[D]$ est isomorphe au quotient du groupe des diviseurs de Cartier par le groupe des diviseurs principaux : on appelle ce quotient *le groupe de Picard*.

Notion de section : une section est une application de X dans L, qui est donnée par une collection de fonctions s_α satisfaisant $s_\alpha = g_{\alpha\beta} s_\beta$. En particulier si L provient d'un diviseur de Cartier D, les f_α correspondent à une section (rationnelle) de L.

4 Forme d'intersection sur les diviseurs (voir [S, chap. IV])

On se restreint ici au cas d'une surface (projective lisse) S.

Définition 15 *On note $\sim$ la relation d'équivalence linéaire entre diviseurs : $D \sim D'$ si $D - D' = (f)$ pour une fonction rationnelle f. Le groupe de Picard de S est le groupe quotient $Div(S)/\sim$.*

Le but de ce paragraphe est de montrer qu'il existe une forme bilinéaire sur le groupe de Picard d'une surface, donnée par l'intersection entre diviseurs.

Définition 16 *Si D, D' sont deux diviseurs effectifs sur une surface S, et que leurs supports n'ont pas de composante commune, et si f, f' sont des équations locales au voisinage d'un point $x \in S$, on appelle le nombre*

$$\dim \mathcal{O}_x/(f, f')$$

le nombre local d'intersection de D et D' au point x, on le note $(D.D')_x$.

Commençons par nous convaincre que cette définition correspond à la définition intuitive d'intersection dans le cas de deux courbes transverses. Rappelons la définition de paramètres locaux en un point :

Définition 17 (voir [S, p. 98]) *Soit $x \in X$ un point lisse dans X de dimension n, et $u_1, \cdots, u_n \in \mathfrak{m}_x$; on dit que $u_1, \cdots, u_n$ sont des paramètres locaux au point x si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :*

1. *Les u_i forment une base de $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$;*
2. *Les variétés $\mathbf{V}(u_i)$ sont lisses et transverses en x;*
3. *Les différentielles $d_x u_i$ sont linéairement indépendantes.*

Pour montrer l'équivalence entre ces définitions il faut considérer le morphisme $d_x : u \in \mathfrak{m}_x \to d_x u \in T_x X^*$. On voit facilement que $\mathfrak{m}_x^2 \subset \ker(d_x)$, et en fait il y a égalité et d_x induit un isomorphisme $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \cong T_x X^*$. On peut par ailleurs montrer (lemme de Nakayama) que des paramètres locaux engendrent l'idéal $\mathfrak{m}_x$ (voir [S, p. 99]).

Soient maintenant D_1, D_2 deux courbes irréductibles sur une surface S, et notons f_1, f_2 leurs équations locales au point $x \in S$. Alors $(D_1, D_2)_x = 1$ ssi f_1, f_2 sont des paramètres locaux en x. En effet si f_1, f_2 sont des paramètres locaux, alors $\dim \mathcal{O}_x/(f_1, f_2) = \dim \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x = 1$; et si $\bar{f} \in \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ n'est pas une combinaison de $\bar{f}_1, \bar{f}_2$, alors les fonctions $1, f$ sont linéairement indépendantes dans $\mathcal{O}_x/(f_1, f_2)$.

On peut étendre cette définition par linéarité à des diviseurs non effectifs (mais toujours sans composante commune), grâce à la propriété d'additivité suivante :

Proposition 5 *Soient D, D', D'' trois diviseurs, avec D, D' et D, D'' sans composante commune. Alors $(D.(D' + D''))_x = (D.D')_x + (D.D'')_x$.*

Preuve. On peut supposer les trois diviseurs effectifs. Soit f, g des équations locales de D' et D. On veut montrer

$$\dim \mathcal{O}_{x,D}/(fg) = \dim \mathcal{O}_{x,D}/(f) + \dim \mathcal{O}_{x,D}/(g).$$

Or $\dim \mathcal{O}_{x,D}/(fg) = \dim \mathcal{O}_{x,D}/(g) + \dim((g)/(fg))$, et la multiplication par g donne un isomorphisme (th. zéro isolés...) $\mathcal{O}_{x,D}/(f) \cong (g)/(fg)$, d'où $\dim \mathcal{O}_{x,D}/(f) = \dim((g)/(fg))$; l'égalité souhaitée en découle. $\square$

Définition 18 *Si D, D' sont deux diviseurs sur une surface S, et que leurs supports n'ont pas de composante commune, le nombre*

$$D.D' = \sum_{x \in \mathrm{Supp} D \cap \mathrm{Supp} D'} (D.D')_x$$

est appelé le nombre d'intersection de D et D'.

Tous le problème est maintenant de se passer de l'hypothèse “sans composante commune”. En particulier on voudrait pouvoir parler de l'auto-intersection $D.D$ d'un diviseur D. Commençons par montrer qu'on peut déplacer par équivalence linéaire le support d'un diviseur pour éviter un nombre arbitraire (fini) de points.

Théorème 6 (voir [S, p. 158]) *Pour tout diviseur D sur une variété lisse $X \subset \mathbb{P}^n$, et pour tous points $x_1, \cdots, x_m \in X$, il existe un diviseur D' tel que $D' \sim D$ et $x_i \notin Supp(D')$ pour $i = 1, \cdots, m$.*

Preuve. Tout d'abord il est possible de choisir un hyperplan $H \subset \mathbb{P}^n$ qui ne contienne aucun des x_i (récurrence sur n). On peut également supposer que D est une hypersurface (le cas général suit par linéarité). Enfin, par récurrence sur m, on peut supposer $x_1, \cdots, x_{m-1} \notin D$, et $x_m \in D$. Soit $U = \mathbb{A}^n \cap X = X \setminus H$ le complémentaire de H, et soit g une équation locale de D en x_m. On peut écrire $g = f_1/f_2$ avec $f_1, f_2 \in \mathbb{C}[U]$ et $f_2(x_m) \neq 0$, ainsi quitte à remplacer g par f_1 on peut supposer g régulière sur U. Le diviseur principal (g) s'écrit $(g) = (g)_0 - (g)_\infty$, avec $(g)_\infty \subset H$, et $(g)_0 = D + R$ où R effectif. Ainsi $D \sim D - (g) = (g)_\infty - R$. On veut s'assurer que R ne contienne aucun x_i. On peut choisir des fonctions $g_i \in \mathbb{C}[U]$ tel que $g_i(x_i) \neq 0$, et $g_i = 0$ sur $D \cup \{x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_m\}$. Alors en remplaçant g par $g + \sum a_i g_i^2$ avec $a_i \in \mathbb{C}$ bien choisis, on se ramène au cas R ne contient aucun x_i. Il faut vérifier que $g + \sum a_i g_i^2$ est encore une équation locale de D, il suffit d'écrire

$$g + \sum a_i g_i^2 = g + \sum a_i g^2 u_i^2 = g(1 + \sum a_i g u_i^2)$$

et de remarquer que $1 + \sum a_i g u_i^2$ est un inversible de $\mathcal{O}_{x_m}$. $\square$

Théorème 7 *Soient D, D', D_1 trois diviseurs d'une surface S, on suppose D, D_1 et D', D_1 sans composante commune, et $D \sim D'$. Alors*

$$D_1.D = D_1.D'.$$

Ce théorème permet d'obtenir la définition :

Définition 19 (Définition générale de l'intersection) *Soient D_1, D_2 deux diviseurs sur une surface projective lisse. On appelle nombre d'intersection de D_1 et D_2 le nombre $D_1.D_2'$ où D_2' est n'importe quel diviseur tel que $D_2' \sim D_2$ et D_1, D_2' sans composante commune.*

Preuve du théorème. Par hypothèse $D - D' = (f)$, on veut montrer $D_1.(f) = 0$, et il suffit de le montrer en remplaçant D par une courbe irréductible $C \subset \mathrm{Supp} D$. Il s'agit donc de montrer que si f est une fonction rationnelle, et C une courbe irréductible, avec (f) et C sans composante commune, alors $C.(f) = 0$.

Si $x \in C \cap (f)$, et f_α est une équation locale de C, on a

$$(C.(f))_x = \dim \mathcal{O}_{S,x}/(f_\alpha, f) = \dim \mathcal{O}_{C,x}/(f).$$

Si C est lisse en chaque point $x \in C \cap (f)$, on a (par définition !) $\dim \mathcal{O}_{C,x}/(f) = \nu_x(f)$, et on est donc ramené à montrer que le diviseur $(f) = \sum \nu_x(f)x$ sur C est de degré 0; c'est le contenu du théorème suivant (ou plutôt de son corollaire).

Si C n'est pas lisse, on s'en tire en considérant une désingularisation $\tilde{C} \xrightarrow{\pi} C$: j'admets cette dernière partie. $\square$

Un diviseur sur une courbe est simplement une somme formelle de point P_i pondérés par des multiplicités : $D = \sum_i k_i P_i$. Le degré de D est défini comme la somme $\deg(D) = \sum_i k_i$.

Théorème 8 (voir [S, p. 168]) *Si $X \to Y$ est un morphisme entre deux courbes projectives lisses et si $f(X) = Y$, alors l'entier $\deg(f^*(y))$ est indépendant de y (on l'appelle le degré de f).*

Corollaire 9 *Le degré d'un diviseur principal sur une courbe projective lisse est* 0.

Preuve du corollaire. Considérer une application rationnelle f comme une application régulière à valeur dans $\mathbb{P}^1$ (on est sur une courbe !) $\square$

Quatrième cours : jeudi 11 octobre.

Preuve du théorème. Soit $y \in Y$ et $\{x_1, \cdots, x_r\} = f^{-1}(y)$. On note $\tilde{\mathcal{O}}$ l'anneau des fonctions régulières aux points $x_1, \cdots, x_r$:

$$\tilde{\mathcal{O}} = \bigcap_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{x_i}.$$

Fait 10 *Il existe des paramètres locaux t_i en chaque point x_i tels que $\nu_{x_i}(t_j) = \delta_{ij}$ et pour tout $u \in \tilde{\mathcal{O}}$ on a*

$$u = t_1^{k_1} \cdots t_r^{k_r} v$$

où $k_i = \nu_{x_i}(u)$ et v inversible dans $\tilde{\mathcal{O}}$.

(*Preuve.* Prendre un paramètre local u_i en x_i, écrire $(u_i) = x_i + D$ et bouger D en $D + (f_i)$ pour éviter les points $x_1, \cdots, x_r$. Alors $t_i = u_i f_i$ convient.)

Soit t un paramètre local de y, on a $t = t_1^{k_1} \cdots t_r^{k_r} v$, d'où

$$f^*(y) = \sum_i k_i x_i \text{ et } \deg f^*(y) = \sum_i k_i.$$

Comme les t_i sont deux à deux premiers entre eux, on a (th. des restes chinois)

$$\tilde{\mathcal{O}}/(t) \cong \bigoplus_i \tilde{\mathcal{O}}/(t_i^{k_i}).$$

Il est facile (récurrence) de voir que tout élément $w \in \tilde{\mathcal{O}}$ s'écrit de façon unique

$$w \equiv a_0 + a_1 t_i + \cdots + a_{k_i-1} t_i^{k_i-1} \pmod{t_i^{k_i}}.$$

Ainsi $\dim \tilde{\mathcal{O}}/(t_i^{k_i}) = k_i$ et $\dim \tilde{\mathcal{O}}/(t) = \sum_i k_i$.

On déduit du lemme suivant que $\tilde{\mathcal{O}}/(t) \cong (\mathcal{O}_y/(t))^{\oplus n} \cong \mathbb{C}^n$. Ainsi $\dim \tilde{\mathcal{O}}/(t) = \sum_i k_i = n$ est indépendant de y. □

Lemme 11 *$\tilde{\mathcal{O}}$ est un $\mathcal{O}_y$-module libre de rang $n = [\mathbb{C}(X) : \mathbb{C}(Y)]$.*

Preuve. Tout d'abord il faut montrer que $\tilde{\mathcal{O}}$ est un $\mathcal{O}_y$-module de type fini. Je ne donne qu'une idée de l'argument, et des références :

- Si $f : X \to Y$ est une application régulière dominante entre variétés affines, on dit que f est finie si $\mathbb{C}[X]$ est entier sur $\mathbb{C}[Y]$ ([S, p. 61]). On peut étendre cette définition au cas projectif par restriction à des ouverts affines ([S, p. 63]).
- Dans les conditions de la définition, on en déduit que $\mathbb{C}[X]$ est un $\mathbb{C}[Y]$-module de type fini (voir [S, p. 286] ou [L, chap. VII 1.]).
- Si $f : X \to Y$ est une application régulière surjective entre deux courbes projectives, elle est finie ([S, p. 133]).

- Enfin, dans notre situation, on se restreint à $f : X \to Y$ sur des ouverts affines, on montre que $\tilde{\mathcal{O}} = \mathbb{C}[X]\mathcal{O}_y$, et un système de générateurs pour $\mathbb{C}[X]$ sur $\mathbb{C}[Y]$ fournit ainsi un système de générateurs pour $\tilde{\mathcal{O}}$ sur $\mathcal{O}_y$.

Maintenant $\mathcal{O}_y$ est principal, donc comme module de type fini sur un anneau principal $\tilde{\mathcal{O}}$ est somme d'un module libre et d'un module de torsion; comme tous nos anneaux sont inclu dans le corps $\mathbb{C}(X)$, il n'y a pas de torsion.

On cherche le nombre m maximal de fonctions linéairement indépendantes (sur $\mathcal{O}_y$, ou de façon équivalente, sur $\mathbb{C}(Y)$) dans $\tilde{\mathcal{O}}$, clairement $m \leq n$. Il suffit de prendre $t^k a_i$, où les a_i forment une base de $\mathbb{C}(X)$ sur $\mathbb{C}(Y)$, t est un paramètre local de y, et k suffisamment grand pour rendre les fonctions régulières. □

Remarquons que la théorie développée dans ce paragraphe permet d'obtenir le théorème de Bézout :

Théorème 12 *Soit $C_1, C_2 \subset \mathbb{P}^2$ deux courbes planes de degré respectif d_1 et d_2, alors $C_1.C_2 = d_1.d_2$.*

Preuve. Si $D \subset \mathbb{P}^2$ est une droite, on a $C_i \sim d_i D$ et $D^2 = 1$, d'où le résultat. □

5 Applications birationnelles entre surfaces

Le but de ce paragraphe est de montrer que toute application birationnelle entre deux surfaces peut être vue comme une suite d'éclatements (ou d'inverses d'éclatements).

Retour sur l'application d'éclatement : montrer qu'un éclatement s'obtient en remplaçant une carte locale (x, y) par deux nouvelles cartes $(x, y/x)$ et $(x/y, y)$. Traiter le cas de $\mathbb{P}^2$ éclaté en 3 points pour retrouver l'application quadratique standard.

Si D est un diviseur de Cartier sur Y donnée par des équations locale f_α, et si $\varphi : X \to Y$ est régulière, on définit le tiré en arrière ("pull-back") de D par φ comme le diviseur $\varphi^*(D)$ sur X défini par les équations locales $f_\alpha \circ \varphi$. Cette notion a de bonnes propriétés par rapport à l'intersection des diviseurs :

Proposition 6 (voir [S, p. 252]) *Soit $f : X \to Y$ une application régulière birationnelle entre deux surfaces, alors :*

1. *Si D_1, D_2 sont deux diviseurs sur Y, on a $f^*D_1.f^*D_2 = D_1.D_2$.*
2. *Si D est un diviseur sur Y, et E est un diviseur sur X dont toutes les composantes sont contractées par f, alors $E.f^*D = 0$.*

Preuve. Bouger les diviseurs ! (en remarquant que $D_1 \sim D_2$ implique $f^*D_1 \sim f^*D_2$.) □

Nous pouvons maintenant faire un peu de numérologie autour de l'application d'éclatement.

Proposition 7 *Soit $\pi : S' \to S$ l'éclatement d'un point p sur une surface S; notons E le diviseur exceptionnel. Soit $C \subset S$ une courbe de multiplicité k au point p, alors $\pi^* C = C' + k.E$.*

Preuve. Soit x, y des paramètres locaux en p, C admet localement une équation de la forme $P(x, y) +$ monômes de degré $> k = 0$, avec P homogènes de degré k. On se place dans la carte de l'éclatement $(x', y') = (x, y/x)$, l'équation de $\pi^* C$ est $P(x', x'y') + \cdots = 0$, qui s'écrit encore ${x'}^k (P(1, y') + \cdots) = 0$. Comme E est d'équation $x' = 0$, on a le résultat. □

La courbe C' s'appelle la transformée stricte de C, on a $C' = \overline{\pi^{-1}(C \setminus \{x\})}$

Preuve de $E^2 = -1$ pour le diviseur exceptionnel d'un éclatement, discussion de la signification de ce -1, lien avec la théorie de l'intersection $\mathcal{C}^\infty$ où l'on définit les intersections locales avec un signe.

Exo : En éclatant un point dans $\mathbb{R}^2$ on obtient un ruban de Moebius (voir couverture de [S])

Cinquième cours : jeudi 18 octobre.

Corollaire 13 (voir [S, p. 253]) *Soit $\pi : S' \to S$ l'éclatement d'un point p sur une surface S; notons E le diviseur exceptionnel. Alors :*

1. *$E^2 = E.E = -1$;*
2. *Si C est une courbe sur S de multiplicité k en p, et si C' est la transformée stricte de C, alors $C'.E = k$;*
3. *Si C_1, C_2 sont deux courbes de multiplicité k_1, k_2 en p, alors $C_1'.C_2' = C_1.C_2 - k_1k_2$;*
4. *En particulier, si C est une courbe lisse au point p, alors ${C'}^2 = C^2 - 1$.*

Preuve.

1. Considérons C d'équation $y = 0$, alors dans la carte (x', y') les courbes C' et E sont d'équation respective $y' = 0$ et $x' = 0$, on a donc $E.C' = 1$. On a $0 = \pi^*C.E = C'.E + E^2 = 1 + E^2$, d'où $E^2 = -1$.
2. On a $0 = \pi^*C.E = (C' + k.E).E = C'.E - k$.
3. On a $C_1.C_2 = \pi^*C_1.\pi^*C_2 = (C_1' + k_1E).(C_2' + k_2E) = C_1'.C_2' + k_1.k_2 + k_1.k_2 - k_1.k_2$. □

Nous attaquons maintenant l'étude de la structure des applications birationnelles entre surfaces. Le premier théorème concerne en fait une application rationnelle quelconque entre surfaces (et admet des généralisations en dimension supérieure, mais la preuve est alors plus dure) :

Théorème 14 (voir [S, p. 254]) *Soient S une surface projective lisse, et $f : S \dashrightarrow Y \subset \mathbb{P}^n$ une application rationnelle. Alors il existe une suite d'éclatements $\pi : V \to S$ qui résoud les points d'indétermination de f, autrement dit dans le diagramme*

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\bar{f}"] & \\ S \arrow[rr, dashed, "f"'] & & Y \end{tikzcd}$$

$\bar{f}$ est une application régulière.

Preuve. Au voisinage d'un point $p \in S$ l'application f s'écrit $q \in S \dashrightarrow [f_0(q) : \cdots : f_n(q)] \in S' \subset \mathbb{P}^n$, avec les $f_i \in \mathcal{O}_p$ sans facteur commun. L'application f est non régulière au point p si $f_i(p) = 0$ pour tout i. Remarquons que l'ensemble des points d'indétermination de f ne peut pas contenir une courbe passant par p (car alors les f_i admettraient l'équation locale de cette courbe comme facteur commun), f est donc régulière en dehors d'un nombre fini de points.

Considérons maintenant H la transformée stricte par f d'une section hyperplane de Y, il s'agit d'une courbe telle que $H^2 \geq 0$ et $p \in H$ si p point d'indétermination. Eclatons le point p, la transformée stricte H' vérifie $H'.H' < H.H$. Après un nombre fini de tels éclatements, il ne doit plus rester aucun point d'indétermination, ce qu'on voulait. $\square$

Remarque : l'argument ci-dessus permet de montrer que si $\varphi : X \dashrightarrow Y$ est une application rationnelle avec X lisse, alors X est régulière en dehors d'un ensemble de codimension au moins 2. En particulier si X est une courbe lisse, φ est régulière; ceci implique que deux courbes lisses sont birationnelles ssi elles sont isomorphes. Ainsi la dimension 2 est la plus basse dimension où les notions d'équivalence birationnelles et d'isomorphisme (entre variétés lisses) ne coïncident pas.

Le deuxième théorème concerne les applications birationnelles et est spécifique à la dimension 2 :

Théorème 15 (voir [S, p. 256]) *Soient S, S' deux surfaces projectives lisses, et $f : S \to S'$ une application birationnelle régulière. Alors f est la composée d'un nombre fini d'applications d'éclatement.*

Pour la preuve nous aurons besoin du

Lemme 16 (voir [S, p. 256 et 119]) *Soit $f : X \dashrightarrow Y$ une application birationnelle entre deux surfaces. Si f^{-1} est non régulière en un point $y \in Y$, alors il existe une courbe $C \subset X$ telle que $f(C) = \{y\}$.*

Preuve du lemme. Supposons tout d'abord que f est régulière (ce qui implique f surjective). On peut se restreindre au cas où X et Y sont affines, on a donc $f^{-1} : z \in Y \dashrightarrow (t_1, \cdots, t_n) = (g_1(z), \cdots, g_n(z)) \in X \subset \mathbb{A}^n$. L'un des g_i est non régulière en y; on écrit $g_i = u/v$ avec $v(y) = 0$, on peut supposer u et v sans facteur commun. On a $t_i = f^*(g_i) = f^*(u/v) = \frac{f^*(u)}{f^*(v)}$. Posons $C = \mathbf{V}(v \circ f)$, on a $f(C) \subset \mathbf{V}(v)$, de plus l'égalité $t_i.v \circ f = u \circ f$ implique $f(C) \subset \mathbf{V}(u)$. Ainsi $f(C) \subset \mathbf{V}(v) \cap \mathbf{V}(u)$ qui est égal à y (si c'était une courbe cela contredirait u et v sans facteur commun).

Pour le cas général considérons l'adhérence $Z \subset X \times Y$ du graphe de l'application f sur son ouvert de définition, et notons $p : Z \to X$ et $q : Z \to Y$ les projections. On a $f^{-1} = p \circ q^{-1}$, donc y est un point non régulier de q^{-1}. Par ce qui précède, il existe une courbe $D \subset Z$ telle que $q(D) = y$. On constate alors que $C = q(D)$ convient. $\square$

Preuve du théorème. Si f^{-1} n'est pas régulière en un point $y \in S'$, considérons $\pi : V \to S'$ l'éclatement du point y. Montrons que $h = \pi^{-1} \circ f$ est encore régulière. Sinon, il existe $x \in S$ un point où h n'est pas défini. Dans cette situation d'une part $f(x) = y$ et f n'est pas localement inversible en x; d'autre part il existe une courbe dans V qui est contractée sur x par h^{-1}. Cette courbe ne peut être que le diviseur exceptionnel E associé à π. Considérons p et q deux points distincts de E où h^{-1} est régulière, et C, C' deux germes de courbes lisses transverses à E en p et q respectivement. Alors $\pi(C)$ et $\pi(C')$ sont deux germes de courbes lisses transverses en y, qui sont image par f de deux germes de courbes en x. La différentielle de f en x est donc de rang 2, ce qui vient contredire le fait que f n'est pas localement inversible en x. $\square$

En regroupant les deux précédents théorèmes on obtient le résultat principal de ce paragraphe :

Théorème 17 *Soient S, S' deux surfaces projectives lisses, et $f : S \to S'$ une application birationnelle. Alors il existe une troisième surface V et deux suites d'éclatements $\pi : V \to S$ et $\pi' : V \to S'$ tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi'"] & \\ S \arrow[rr, dashed, "f"'] & & S' \end{tikzcd}$$

Exercices : Expliciter la décomposition en éclatements/inverse d'éclatements pour :

1. L'application birationnelle $f_1 : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ qui est donnée par l'identité en restriction à $\mathbb{A}^2$;

2. L'application birationnelle $f_2 : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ qui est donnée par l'isomorphisme $(x, y) \in \mathbb{A}^2 \to (x + y^2, y) \in \mathbb{A}^2$.

Super-défi : Un théorème classique (attribué à M. Noether et G. Castelnuovo) affirme que toute application birationnelle $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ peut s'écrire comme composée d'applications birationnelles de degré 2. Pouvez-vous trouver une telle décomposition pour l'application de degré 3 qui est donnée par l'isomorphisme $(x, y) \in \mathbb{A}^2 \to (x + y^3, y) \in \mathbb{A}^2$?

Désingularisation des courbes

Voici une jolie application des techniques ci-dessus :

Théorème 18 (voir [S, p. 261]) *Soit $C \subset S$ une courbe irréductible dans une surface lisse. Alors il existe une suite d'éclatements $\pi : V \to S$ tel que la transformée stricte de la courbe C sur V soit lisse.*

Preuve. Notons $\mu_x(C) \geq 2$ la multiplicité d'un point singulier x de C, et considérons $\pi : S' \to S$ l'éclatement du point x; on note E le diviseur exceptionnel, et C' la transformée stricte de C. D'une part $\mu_x(C) = C'.E$, d'autre part $C'.E = \sum_{x' \in E} (C'.E)_{x'}$. Or $(C'.E)_{x'} \geq \mu_{x'}(C')$, donc on obtient l'inégalité

$$\mu_x(C) \geq \sum_{x' \in E} \mu_{x'}(C').$$

S'il y a plusieurs points x' sur $E \cap C'$, alors la multiplicité de chacun d'eux est strictement inférieure à $\mu_x(C)$ et l'on peut poursuivre par récurrence. Le point délicat est le cas où il n'y qu'un seul point x' avec $\mu_{x'}(C') = \mu_x(C)$, on va montrer qu'après un nombre fini d'éclatement la multiplicité finit par chûter.

On peut choisir des paramètres locaux z, w au point x de façon que l'équation locale de C soit de la forme $z^k = P(z, w)$, où P est un polynôme dont tous les monômes sont de degré $> k$ (ici $k = \mu_x(C)$). On voit que P admet au moins un monôme de degré $< k$ en z, sinon on aurait

$C = \{z^k(1+Q(z,w)) = 0\}$ avec $Q(0,0) = 0$, et l'équation locale de C serait simplement $z = 0$: absurde. Eclatons le point x et plaçons nous dans la carte $z' = z/w, w' = w$, autrement dit $z = z'w', w = w'$. L'équation de C' s'obtient en remplaçant dans l'équation de C et en divisant par ${w'}^k$; si $P = \sum a_{ij} w^i z^j$ on obtient l'équation

$$ {z'}^k = \sum a_{ij} {w'}^{i+j-k} {z'}^j. $$

Si $j < k$, on voit que le degré $i + j - k$ décroit, ainsi en répétant ce processus on finit bien par faire baisser la multiplicité. $\square$

Sixième cours : jeudi 25 octobre (+ 1 heure le 8 novembre).

Groupe de Cremona

On appelle groupe de Cremona le groupe des applications birationnelles $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$. La proposition suivante montre que c'est un groupe plutôt compliqué (au contraire du groupe $\mathrm{PGL}(3,\mathbb{C})$ des applications birégulières) :

Proposition 8 *Le groupe de Cremona contient un sous-groupe libre sur un continuum de générateurs.*

Preuve. En fait nous montrons qu'il existe une courbe dans l'espace des applications de Cremona quadratiques qui convient comme système de générateurs. Considérons les automorphismes $f:(x,y)\to(x+y^2,y)$ et $a_t:(x,y)\to(x,tx+y)$ où $t\in\mathbb{C}^*$. Montrons que le groupe H engendré par les $g_t = a_t\circ f\circ a_t^{-1}$ est isomorphe au groupe libre sur les g_t. Il s'agit de montrer que tout élément de H de la forme $g_{t_1}^{k_1}\circ\cdots\circ g_{t_n}^{k_n}$ avec $k_i\in\mathbb{Z}^*$, $t_i\in\mathbb{C}^*$ et $t_i\neq t_{i+1}$ pour tout i est non trivial. Pour cela il suffit de constater que l'image de la droite à l'infini par un tel élément de H est un point. $\square$

Par contraste constatons que si $c:]-\varepsilon,+\varepsilon[\to \mathrm{PGL}(3,\mathbb{C})$ est une courbe (analytique), alors le groupe engendré par l'image de c ne peut être libre (argument de dimension).

Concernant le groupe de Cremona, on a mentionné plus haut que l'on connait un système de générateurs depuis la fin du 19ième : ce sont les applications de degré ≤ 2. Bien plus récemment on a obtenu un système de relations, ainsi qu'une liste des sous-groupes finis. Une question encore ouverte est le

Super-super-défi : le groupe de Cremona est-il un groupe simple ? (si comme moi vous pensez que non, il sufit d'exhiber un élément f bien choisi de façon à ce que le groupe normal engendré par f soit un sous-groupe strict du groupe de Cremona...)

6 Diviseur canonique, dimension de Kodaira

Systèmes linéaires et application rationnelles

Considérons $f : X\subset\mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ une application rationnelle, on peut se donner f en se donnant $m+1$ polynômes homogènes de même degré f_i et en écrivant $f(x)=[f_0(x):\cdots:f_m(x)]$. On peut aussi écrire

$$f(x)=\left[1:\frac{f_1(x)}{f_0(x)}:\cdots:\frac{f_m(x)}{f_0(x)}\right].$$

Ici les f_i/f_0 sont m fonctions rationnelles sur X, dont les pôles sont bornés par le diviseur $f_0=0$. De plus le diviseur $f_0=0$ s'interprète comme la préimage par f d'un hyperplan.

Réciproquement, soit D un diviseur sur X (disons effectif pour l'instant), montrons comment construire une application rationnelle telle que D soit la préimage d'un hyperplan. On peut considérer l'ensemble des fonctions rationnelles sur X dont les pôles sont bornés par D, i.e.

$$\mathcal{L}(D)=\{f\in\mathbb{C}(X); D+(f)_0-(f)_\infty\geq 0\}.$$

Théorème 19 (voir [S, p. 173]) *$\mathcal{L}(D)$ est un espace vectoriel de dimension fini.*

Preuve. Tout d'abord si $D = D_1 - D_2$ avec D_1, D_2 effectifs, alors $\mathcal{L}(D) \subset \mathcal{L}(D_1)$, ainsi on peut se contenter de considérer le cas $D \geq 0$.

Supposons tout d'abord que D est un diviseur effectif sur une courbe X, soient $x \in \mathrm{Supp}D$ de multiplicité $r > 0$, et t un paramètre local au point x. Considérons la fonction linéaire

$$\lambda : f \in \mathcal{L}(D) \to (t^r f)(x).$$

Le noyau de λ est le diviseur effectif $D - x$ qui est de degré un de moins que D, ainsi après $\deg D$ telle opération on voit que $\mathcal{L}(0)$ est un sous-espace de $\mathcal{L}(D)$ défini par $\deg(D)$ formes linéaires. Mais $\mathcal{L}(0) = \mathbb{C}$ (ce sont les fonctions régulières sur X), et donc $\dim \mathcal{L}(D) \leq \deg D + 1$.

Le cas général (X de dimension quelconque) se traite alors par récurrence; j'indique rapidement comment obtenir le résultat si X est une surface. Soit H une section hyperplane générale, alors H est une courbe lisse et $D|_H$ est un diviseur effectif d'un certain degré k. Ainsi si $f \in \mathcal{L}(D)$ la restriction $F|_H$ admet au plus k pôles, et donc également au plus k zéros. Considérons $H_1, \cdots, H_m$ des sections hyperplanes générales, sur chacune les restrictions $\mathcal{L}(D)|_{H_i}$ sont des espaces de dimensions finies, donc le sous-espace de $\mathcal{L}(D)$ constitué des fonctions identiquement nulles sur l'union des H_i est de codimension fini; mais si $m > k$, ce sous-espace est trivial.□

On a une bijection entre $\mathbb{P}(\mathcal{L}(D))$ et l'ensemble $|D|$ des diviseurs effectifs équivalents à D, simplement en remarquant qu'un tel diviseur D' s'écrit $D' = D + (f)$ avec $f \in \mathcal{L}(D)$. On dit que $|D|$ est le système linéaire complet associé à D, un sous-espace linéaire de $|D|$ (correspondant à un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(D)$) est simplement appelé un système linéaire. Remarquons que les définitions de $\mathcal{L}(D)$ et $|D|$ se généralisent sans difficulté au cas non effectif. On a les propriétés :

Proposition 9 *Si $D_1 \sim D_2$ alors $|D_1| = |D_2|$ et $\dim \mathcal{L}(D_1) = \dim \mathcal{L}(D_2)$.*

Preuve. Il suffit d'écrire $D_1 = D_2 + (g)$ et de remarquer que $f \in \mathcal{L}(D_1) \to fg \in \mathcal{L}(D_2)$ est un isomorphisme. □

Si $f_1, \cdots, f_r$ est une famille libre dans $\mathcal{L}(D)$, on peut définir une application rationnelle $f : x \dashrightarrow \left[1 : \frac{f_1(x)}{f_0(x)} : \cdots : \frac{f_r(x)}{f_0(x)}\right]$ (le fait que la famille soit libre assure que l'image de f n'est pas contenue dans un hyperplan de $\mathbb{P}^r$).

Si on prend une base de $\mathcal{L}(D)$, on construit une application rationnelle que l'on note ϕ_D.

Exercice : sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, soit $F_1 = \{x = 0\}$, $F_2 = \{y = 0\}$. Calculer ϕ_D pour $D = F_1$, $D = F_1 + F_2$ et $D = F_1 + 2F_2$.

Définition 20 *On appelle dimension de Kodaira de D le maximum des dimensions des images $\phi_{nD}(X)$ quand n parcourt $\mathbb{N}$, on note $\kappa(D)$. Si $\mathcal{L}(nD) = \emptyset$ pour tout n, par convention $\kappa(D) = -\infty$.*

Cette définition est spécialement intéressante quand on prend pour D le diviseur canonique de X, que nous définissons bientôt.

Formes différentielles

Définition 21 • *Une forme différentielle ω régulière sur X est une forme qui dans un voisinage de chaque point $x \in X$ s'écrit :*

$$\omega = \sum_{i=1}^{m} f_i dg_i,$$

avec f_i, g_i régulières en x.

- *Une p-forme différentielle ω régulière sur X est une forme qui dans un voisinage de chaque point $x \in X$ s'écrit :*

$$\omega = \sum_{i=1}^{m} f_{i_1 \cdots i_p} dg_{i_1} \wedge \cdots \wedge dg_{i_p},$$

avec f_I, g_i régulières en x.

On admet la

Proposition 10 (voir [S, p. 198–200]) *Si $u_1, \cdots, u_n$ sont des paramètres locaux en $x \in X$, alors sur un voisinage U de x*

- *les formes $du_1, \cdots, du_n$ sont une base du $\mathbb{C}[U]$-module $\Omega^1[U]$des formes régulières sur U;*
- *les formes $du_{i_1} \wedge \cdots \wedge du_{i_p}$ sont une base du $\mathbb{C}[U]$-module $\Omega^p[U]$ des p-formes régulières sur U;*

Si $\varphi : X \to Y$ est régulière on définit le tiré en arrière d'une forme régulière

$$\omega = \sum_{i=1}^{m} f_{i_1 \cdots i_p} dg_{i_1} \wedge \cdots \wedge dg_{i_p}$$

par

$$\varphi^*(\omega) = \sum_{i=1}^{m} \varphi^*(f_{i_1 \cdots i_p}) d\varphi^*(g_{i_1}) \wedge \cdots \wedge d\varphi^*(g_{i_p}).$$

Ainsi on obtient un morphisme $\varphi^* : \Omega^p[Y] \to \Omega^p[X]$.

Exemple : tiré en arrière de la 2-forme $dx \wedge dy$ sur $\mathbb{C}^2$ par l'application d'éclatement au point $(0,0)$.

Noter qu'il existe en général beaucoup de formes régulières sur une variété projective (par contraste avec les fonctions régulières qui sont constantes) : par exemple, sur la courbe plane $x^3 + y^3 = 1$, on pourra vérifier que $\omega = \frac{dy}{x^2}$ est une 1-forme régulière.

Définition 22 *Une p-forme rationnelle sur X est la donnée d'une p-forme régulière ω sur un ouvert U de X, modulo la relation d'équivalence $(\omega, U) \simeq (\omega', U')$ si ω et ω' sont égales sur $U \cap U'$.*

On note $\Omega^p(X)$ l'espace des p-formes rationnelles sur X. De la description des formes régulières il découle que si $u_1, \cdots, u_n$ sont des paramètres locaux en $x \in X$, alors sur un voisinage U de x tout p-forme rationnelle : ω s'écrit

$$\omega = \sum_{i=1}^{m} f_{i_1 \cdots i_p} du_{i_1} \wedge \cdots \wedge du_{i_p},$$

avec $f_I \in \mathbb{C}(X)$.

Si $\varphi : X \dashrightarrow Y$ est une application rationnelle dominante alors par restriction à des ouverts la construction ci-dessus donne un morphisme $\varphi^* : \Omega^p(Y) \to \Omega^p(X)$. La surprise est que dans cette situation les formes régulières sur Y sont envoyées sur des formes régulières sur X :

Théorème 20 (voir [S, p. 206]) *Soit $\varphi : X \dashrightarrow Y$ une application rationnelle dominante alors*

$$\varphi^* \Omega^p[Y] \subset \Omega^p[X].$$

Preuve. Soit Z le lieu où φ est indéterminé, on sait que Z est de codimension 2 ou plus. Si $\omega \in \Omega^p[Y]$ alors $\varphi^*\omega$ est régulière sur $X \setminus Z$, et donc sur X car si V était le lieu des pôles de ω on aurait V de codimension 1 avec $V \subset Z$: absurde. $\square$

On déduit du théorème que si X et Y sont birationnelles alors les espaces vectoriels $\Omega^p[X]$ et $\Omega^p[Y]$ sont isomorphes, en particulier les dimensions (dont on ne sait pas pour l'instant si elles sont finies) $\dim \Omega^p[X]$ sont des invariants birationnels.

Diviseur canonique, adjonction

Si X est une variété projective lisse de dimension n, le diviseur canonique est le diviseur d'une n-forme différentielle rationnelle: si $\omega = f du_1 \wedge \cdots \wedge du_n$ sur U, alors f est une équation locale du diviseur (ω) sur U. La proposition suivante assure que ce diviseur, noté K_X, est uniquement défini à équivalence linéaire près :

Proposition 11 *Si ω et ω' sont deux n-formes sur X, alors $(\omega) \sim (\omega')$.*

Preuve. Localement, deux n-formes s'écrivent $\omega = f du_1 \wedge \cdots \wedge du_n$ et $\omega = g du_1 \wedge \cdots \wedge du_n$ avec $f, g \in \mathbb{C}[U]$, ainsi $(\omega) = (\omega') + (f/g)$ (car un changement de carte introduit un même déterminant jacobien dans l'expression de ω et ω'). $\square$

Exemples : calcul du diviseur canonique de $\mathbb{P}^n$. Relation entre les diviseurs canoniques d'une surface S et de S', éclaté de S en un point. Exercice : calculer le diviseur canonique de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Pour pouvoir calculer le diviseur canonique en général il nous faut une formule qui exprime le diviseur canonique d'une hypersurface en fonction du diviseur canonique de l'espace ambiant : c'est la formule d'adjonction. Avant de donner la formule générale considérons le cas d'une courbe plane lisse $C \subset \mathbb{P}^2$ d'équation $F(X, Y, Z) = 0$ où F est homogène de degré m.

Dans la carte $x = X/Z, y = Y/Z$ considérons la 1-forme $\omega = \frac{dx}{\partial_y f}$, où $f(x,y) = F(x,y,1)$. Sur C on a $df = \partial_x f dx + \partial_y f dy = 0$ d'où $\omega = \frac{dx}{\partial_y f} = \frac{-dy}{\partial_x f}$. On voit donc que ω est régulière sur cette carte. Plaçons nous maintenant dans la carte $u = X/Y, v = Z/Y$, on a $f(x,y) = F(x,y,1) = y^m F(x/y, 1, 1/y) = y^m g(x/y, 1/y)$, où $g(u,v) = F(u,1,v)$ est l'équation de C dans la carte u, v. D'une part on calcule que $\frac{-dy}{\partial_x f} = v^{m-3} \frac{dv}{\partial_u g}$, d'autre part comme précedemment on vérifie que $\frac{dv}{\partial_u g}$ est régulière sur la carte (u,v); ainsi (ω) est égal à $m-3$ fois la section hyperplane $v = 0$:

$$K_C = (m-3)H.$$

Exercice : montrer de façon similaire que si $Y \subset \mathbb{P}^n$ est une hypersurface de degré m, alors

$$K_Y = (m-n-1)H,$$

où H est une section hyperplane. Constater que c'est un cas particulier de la proposition suivante.

Proposition 12 (formule d'adjonction) *Si $Y \subset X$ est une hypersurface, avec X et Y lisses, on a*

$$K_Y = (K_X + Y)|_Y.$$

La signification de la restriction à Y est naturelle si l'on considère K_X et Y comme des fibrés en droites, ou comme des diviseurs de Cartier. En pratique pour calculer $(K_X + Y)|_Y$ il suffit de choisir $D \sim K_X + Y$ intersectant transversalement Y et de calculer $D \cap Y$.

Preuve. Notons $N_{X/Y}$ le fibré normal de Y dans X. La preuve consiste à montrer

1. $N_{X/Y} = Y|_Y$;
2. $K_Y = (K_X + N_{X/Y})|_Y$.

1. Si $\{f_\alpha\}$ sont des équations locales de Y, alors $f_\alpha = g_{\alpha\beta} f_\beta$ où les $g_{\alpha\beta}$ sont les fonctions de transition du fibré en droites associé à Y. On a donc $df_\alpha = g_{\alpha\beta} df_\beta + dg_{\alpha\beta} f_\beta$, et ce deuxième terme est nul en restriction à Y. On peut voir f_α comme une section du fibré Y, et df_α est alors une 1-forme à valeur dans les sections de Y, c'est à dire une section du fibré $N^*_{X/Y} \otimes Y$; comme cette section est régulière et sans zéro, le fibré $N^*_{X/Y} \otimes Y$ est trivial, ce qui revient à dire $N_{X/Y} = Y|_Y$.

2. Par définition $N_{X/Y} = T_X/T_Y$, ce qui implique $T^*_Y = T^*_X / N^*_{X/Y}$, on en déduit que la matrice de transition entre des ouverts U_α et U_β pour le fibré T^*_X est de la forme

$$\left(\begin{array}{c|c} g_{\alpha\beta} & 0 \\ \hline * & A_{\alpha\beta} \end{array}\right)$$

où $A_{\alpha\beta}$ est la matrice de transition pour T^*_Y, et $g_{\alpha\beta}$ est la fonction de transition du fibré en droites $N^*_{X/Y}$. On voit que $\det T^*_X = \det T^*_Y \otimes N^*_{X/Y}$, d'où $K_Y = (K_X + N_{X/Y})|_Y$. $\square$

Définition 23 *La dimension de Kodaira d'une variété projective lisse X est la dimension de Kodaira de son diviseur canonique : c'est donc le maximum des dimensions $\phi_{nK_X}(X)$ quand n parcourt $\mathbb{N}$, on la note $\kappa(X)$.*

On a $\kappa(X) \in \{-\infty, 0, 1, \cdots, \dim X\}$. Une variété X de dimension n est dite de type général si $\kappa(X) = n$.

Remarquons que $\mathcal{L}(K_X)$ s'identifie à l'espace $\Omega^n[X]$ des n-formes régulières sur X, ainsi $\dim \Omega^n[X]$ est fini et est un invariant birationnel de X (car une application birationnelle induit un isomorphisme sur les espaces de formes régulières).

Il est possible de montrer que $\kappa(X)$ est aussi un invariant birationnel de X, voici une idée de la preuve :

- De manière similaire à ce qu'on a fait au paragraphe précédent, on montre que $P_n = \dim \mathcal{L}(nK_X)$ est un invariant birationnel; P_n s'appelle le n-plurigenre de X.
- On prouve qu'il existe des constantes a, b tel que pour n assez grand

$$an^{\kappa(X)} \leq P_n \leq bn^{\kappa(X)}.$$

Huitième cours : jeudi 15 novembre.

7 Surfaces avec fibration rationnelle ou elliptique

Courbes rationnelles et elliptiques

Dans le cas des courbes, $\dim \Omega^1[X]$ correspond au genre g.

On a vu que si $C \subset \mathbb{P}^2$ est une courbe de degré m alors $K_C = (m-3)H$. En particulier si $m \geq 3$ le système linéaire $|K_C|$ est non vide, et tout élément de $|K_C|$ est un diviseur de la forme $(P\omega)$ où $\omega = \frac{dx}{\partial_y f}$ est la 1-forme considérée ci-dessus, et $P(x,y)$ est un polynôme de degré $\leq m-3$. Un tel polynôme dépend de $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ paramètres, on retrouve la formule du genre mentionnée au premier cours : $g = \frac{(m-1)(m-2)}{2}$. Par ailleurs on a $\deg K_C = m(m-3)$, on en déduit la formule

$$\deg K_C = 2g - 2.$$

On admettra que cette formule est valable pour toute courbe projective (et pas seulement les courbes planes), la preuve repose sur la formule de Riemann Roch (pour les courbes) qui affirme que pour tout diviseur D sur une courbe projective de genre g on a la relation

$$\dim \mathcal{L}(D) - \dim \mathcal{L}(K-D) = 1 - g + \deg D.$$

Il suffit en effet de prendre $D = K$ et de se souvenir que $g = \dim \mathcal{L}(K)$, $1 = \dim \mathcal{L}(0)$.

Donnons une idée rapide de la raison pour laquelle $g = \dim \Omega^1[X]$ correspond à la notion topologique de “nombre de trous” de la surface réelle sous-jacente à la courbe complexe X :

- Sur une surface réelle à g trous le groupe d'homologie $H_1(X, \mathbb{Z})$ est engendré par $2g$ cycles.
- L'espace $H^1(X, \mathbb{C})$ des formes linéaires $H_1(X, \mathbb{Z}) \to \mathbb{C}$ est donc de dimension $2g$.
- Une 1-forme $\mathcal{C}^\infty$ ω sur X donne un élément de $H^1(X, \mathbb{C})$: $\gamma \in H_1(X, \mathbb{Z})$ est envoyé sur $\int_\gamma \omega$. En fait tous les éléments de $H^1(X, \mathbb{C})$ sont de cette forme (théorème de de Rham).
- Chaque 1-forme régulière df donne lieu à une 1-forme conjuguée $\overline{df}$, et ainsi les g éléments d'une base de $\Omega^1[X]$ donnent les $2g$ éléments d'une base de $H^1(X, \mathbb{C})$.

On constate que du point de vue de la dimension de Kodaira (et de beaucoup d'autres points de vue !) il y a deux types de courbes particulières : les courbes rationnelles (isomorphes à $\mathbb{P}^1$, topologiquement une sphère : $g = 0$, $\kappa = -\infty$, $\deg K = -2$) et les courbes elliptiques (isomorphes à une cubique plane, topologiquement un tore : $g = 1$, $\kappa = 0$, $\deg K = 0$). Ceci amène à considérer deux classes particulières de surfaces, à savoir les surfaces S munies d'un morphisme $f : S \to Y$ où Y est une courbe lisse et où la fibre générique $f^{-1}(y)$ est une courbe lisse rationnelle ou elliptique.

Matrice d'intersection des courbes exceptionnelles

Dans ce paragraphe on démontre deux résultats aux preuves très similaires, qui décrivent respectivement les courbes contractées sur un point par un morphisme birationnel entre surface, et les courbes dans une fibre singulière d'une fibration.

Théorème 21 *Soit $f : S \to S'$ une application régulière entre surfaces projectives, on suppose S lisse (S' typiquement est singulière). Supposons que des courbes $C_1, \cdots, C_r \subset S$ soient contractées sur un même point $x \in S'$, et que (quitte à restreindre à un ouvert), $f : S \backslash (C_1 \cup \cdots \cup C_r) \to S' \backslash x$ soit un isomorphisme.*

Alors la matrice d'intersection $(C_i.C_j)$ est définie négative.

Preuve. Soit H une section hyperplane générale de S; H est une courbe distincte des C_i et qui intersecte chaque C_i. Posons $H' = f(H)$, et soit $u \in \mathcal{O}_x$ une équation locale de H'. Posons $g = f^*u$, on a $(g) = \sum_i m_i C_i + R$ avec $m_i > 0$ et $R.C_i > 0$ pour tout i (car $R = H + (g)_\infty$, et $R.C_i = H.C_i$). Posons $D = \sum_i m_i C_i$, $D \sim -R$ donc $D.C_i < 0$ pour tout i.

La preuve du théorème se ramène ainsi à la proposition purement algébrique ci-dessous. □

Proposition 13 *Considérons M un $\mathbb{Z}$-module équipé d'une forme bilinéaire symétrique entière $\langle , \rangle$ et d'une famille génératrice $e_1, \cdots, e_r$ avec $\langle e_i, e_j \rangle \geq 0$ pour tout $i \neq j$. Supposons qu'il existe un élément $d = \sum m_i e_i$ avec $m_i > 0$ tel que $\langle d, e_i \rangle < 0$ pour tout i. Alors $\langle , \rangle$ est défini négatif et M est isomorphe à $\mathbb{Z}^r$.*

Preuve. Sur $\mathbb{R}^r$ considérons la forme bilinéaire $\varphi(x, y) = \sum a_{ij} x_i y_j$ où $a_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$. Il suffit de montrer $\varphi(x, x) < 0$ pour tout $x \neq 0$ dans $\mathbb{R}^r$, en effet l'application $\mathbb{Z}^r \subset \mathbb{R}^r \to M$ qui envoie la base canonique $f_i = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)$ sur e_i sera alors une isométrie, et donc un isomorphisme.

Remarquons que $\lambda = \sup_{u \neq 0 \in \mathbb{R}^r} \frac{\varphi(u,u)}{|u|^2} = \frac{\varphi(x,x)}{|x|^2}$ où x est un vecteur propre associé à la plus grande valeur propre λ de $A = (a_{ij})$ (diagonaliser φ). On peut supposer les $x_i \geq 0$, en effet $\varphi(x, x) = \sum a_{ij} x_i x_j \leq \sum a_{ij} |x_i||x_j|$ car $a_{ij} \geq 0$ si $i \neq j$. On a donc

$$0 > \sum_i x_i \varphi(f_i, \sum_j m_j f_j) = \sum_{i,j} m_j x_i a_{ij} = \lambda \sum_{i,j} x_i m_j.$$

Or $\sum_{i,j} x_i m_j > 0$, et donc $\lambda < 0$. La matrice A est donc bien définie négative (toutes ses valeurs propres sont négatives). □

Remarques : la condition $(C_i.C_j)$ défini négative et en fait une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un morphisme régulier birationnel qui contracte les C_i. En particulier, toute courbe irréductible d'auto-intersection négative peut être contractée (en général sur un point singulier). L'application d'éclatement est un cas particulier où le résultat de la contraction est lisse, et en fait on a le

Théorème 22 (Critère de Castelnuovo) *Si $E \subset S$ est une courbe dans une surface lisse S telle que $E^2 = -1$ et E isomorphe à $\mathbb{P}^1$, alors il existe une autre surface lisse V tel que S soit l'éclaté de V en un point, avec E comme diviseur exceptionnel.*

Nous admettons ce résultat; voici une très vague idée de la preuve :

- Si ϕ est l'application d'éclatement, ϕ est associé à un système linéaire $|D|$ où D est la préimage d'une section hyperplane, et vérifie $D.E = 0$ et $D.C \geq 0$ pour toute courbe irréductible $C \neq E$.

- Si H est une section hyperplane de S, avec $H.E = k > 0$, on vérifie que $D = H + kE$ satisfait les conditions numériques ci-dessus.

- Il faut alors montrer (ce n'est pas trop dur) que ϕ associé à $|D|$ est un isomorphisme hors de E et contracte E sur un point.

- Il faut ensuite montrer (c'est le point délicat) que la surface obtenue comme image de ϕ est encore lisse.

Une surface qui ne contient aucune courbe rationnelle (i.e., isomorphe à $\mathbb{P}^1$) d'auto-intersection -1 est dite minimale.

Nous considérons maintenant une fibration $S \to Y$ où S est une surface lisse, Y une courbe. On suppose que dans un voisinage de $y_0 \in Y$, au-dessus de chaque point $y \neq y_0$ la fibre $f^{-1}(y)$ est lisse irréductible. Ceci implique que $f^{-1}(y_0)$ est connexe (sinon les fibres voisines seraient également non connexe, or une variété projective irréductible complexe est connexe).

Théorème 23 *Dans les hypothèses ci-dessus, supposons que $f^*(y_0) = \sum r_i C_i$. Alors tout diviseur $D = \sum l_i C_i$ satisfait $D^2 \leq 0$, et $D^2 = 0$ ssi D est proportionnel à $\sum r_i C_i$.*

Preuve. On peut écrire $f^*(y_0) \sim f^*(\Delta)$, où Δ est un diviseur de Y ne contenant pas y_0. Ainsi $f^*(y_0).C_i = f^*(\Delta).C_i = 0$ pour tout i, en particulier $f^*(y_0).f^*(y_0) = 0$.

A nouveau on se ramène à un énoncé algébrique (proposition suivante). □

Proposition 14 *Considérons $\mathbb{Z}^r$ équipé d'une forme bilinéaire symétrique entière $\langle , \rangle$ et d'une base $e_1, \cdots, e_r$ avec $\langle e_i, e_j \rangle \geq 0$ pour tout $i \neq j$. Supposons que les e_i ne peuvent être partagés en deux familles avec $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ pour des éléments dans des familles différentes. Supposons qu'il existe un élément $d = \sum m_i e_i$ avec $m_i > 0$ tel que $\langle d, e_i \rangle = 0$ pour tout i. Alors M est isomorphe à $\mathbb{Z}^r$, et pour tout $m \in M$, $\langle m, m \rangle \leq 0$ avec égalité ssi m est proportionnel à d.*

Preuve. De manière similaire la preuve de la proposition 13 on montre que la matrice $A = (a_{ij})$ admet $\lambda = 0$ comme valeur propre maximale, $\varphi(x, x) = 0$ ssi $Ax = 0$. Supposons que y, z sont deux éléments non colinéaires avec $Ay = Az = 0$, alors il existe x une combinaison linéaire non nulle de y et z dont certains coefficients sont nuls. On peut supposer les $x_i \geq 0$, écrivons $x = \sum_{i=1}^{s} x_i e_i$ avec $s < r$. Alors $\{e_1, \cdots, e_s\} \cup \{e_{s+1}, \cdots, e_r\}$ est une partition de la famille (e_i) en deux sous-ensemble orthogonaux, en effet si $j > s$ on a :

$$0 = \varphi(x, f_i) = \sum_{i=1}^{s} x_i \varphi(f_i, f_j)$$

d'où $\langle e_i, e_j \rangle = \varphi(f_i, f_j) = 0$ pour tout i. □

Fibrations rationnelles

Théorème 24 (voir [GH, p.555]) *Si $f : S \to C$ est un morphisme régulier entre une surface S lisse minimale et une courbe lisse C, tel que la fibre générique soit une courbe rationnelle lisse (i.e., isomorphe à $\mathbb{P}^1$), alors toutes les fibres sont isomorphes à $\mathbb{P}^1$.*

Pour faire la preuve on va avoir besoin de la notion de genre d'une courbe singulière. Si $C \subset S$ est une courbe projective singulière inclue dans une surface lisse, il y a deux manières naturelles de définir un genre pour C. On peut définir $g(C)$ comme le genre d'une désingularisation de C; on dit que $g(C)$ est le genre réel de C. Une autre façon est de reprendre la formule d'adjonction, est de poser $\pi(C) = \frac{K.C+C^2}{2} + 1$; $\pi(C)$ s'appelle le genre virtuel de C. Contrairement au genre réel, le genre virtuel n'est pas invariant pas éclatement : si on éclate un point $p \in C$ de multiplicité k, on calcule :

$$K_{\tilde{S}}.C' + C'.C' = (\pi^*K + E)(\pi^*C - E) + C^2 - k^2 = K.C + C^2 - k(k-1).$$

Ainsi on a $\pi(C) \geq g(C)$, avec égalité ssi C est lisse. En particulier, si une courbe vérifie $\pi(C) = 0$, alors c'est une courbe lisse isomorphe à $\mathbb{P}^1$. On remarque également que $K.C + C^2$ est toujours pair (≥ -2), et donc $\pi(C)$ est un entier (≥ 0).

Neuvième cours : jeudi 22 novembre.

Preuve du théorème. Il suffit de montrer que f n'a pas de fibre réductible, en effet : si $f^*p = nF$ alors $F^2 = 0$ et $K.F < 0$ implique $\pi(F) = 0$, donc F rationnelle lisse. De plus on a

$$-2 = K.nF + (nF)^2 = n(KF + F^2) = -2n$$

d'où $n = 1$.

Soit p un point de C, supposons que la fibre au-dessus de p soit réductible, écrivons $f^*p = \sum_i n_i C_i$ (avec $n_i > 0$). Sur C on a $p \sim \Delta$ où Δ est un diviseur dont le support ne contient pas p. Pour tout i on a

$$0 = f^*(\Delta).C_i = f^*p.C_i = n_i C_i^2 + \sum_{j \neq i} n_j C_i.C_j.$$

Le second terme de la somme est strictement positif (connexité des fibres), on en déduit $C_i^2 < 0$ pour tout i.

On peut supposer que la fibre au-dessus de tout point x dans le support de Δ est isomorphe à $\mathbb{P}^1$, donc $K.f^*x = K.f^*x + f^*x.f^*x = -2$, d'où $K.f^*\Delta = -2$ (Δ est de degré 1). On a donc $-2 = K.(\sum_i n_i C_i)$, d'où $K.C_k < 0$ pour un certain k.

Les conditions $C_k^2 < 0, K.C_k < 0$ impliquent que C_k est une courbe rationnelle lisse d'auto-intersection -1, cela vient contredire S minimale. □

Exemple : $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, d'où l'on déduit les surfaces de Hirzebruch F_k par "éclatement/contraction".

Culture : Une surface minimale birationnelle à $\mathbb{P}^2$ est isomorphe ou bien à $\mathbb{P}^2$ ou bien à l'une des F_k ($k \neq 1$).

Fibrations elliptiques

On considère maintenant $f : S \to Y$ une fibration dont la fibre générique est une courbe lisse de genre 1 (courbe elliptique) : on dit que f est une fibration elliptique. On peut toujours supposer S minimale, cependant contrairement au cas des fibrations rationnelles il existe en général des fibres singulières, c'est à dire une fibre f^*y tel que

- ou bien le support de f^*y est une courbe réductible;
- ou bien le support de f^*y est une courbe irréductible singulière;
- ou bien $f^*y = mC$ avec C courbe elliptique lisse et $m \geq 2$.

Quitte à remplacer Y par un voisinage affine de y_0, on peut supposer que pour tout $y \neq y_0$, $y \sim y_0$ et $f^*y = C$ où C est une courbe elliptique lisse. Notre but va être de classer précisément les f^*y_0 qui peuvent subvenir, et de construire quelques exemples.

Remarquons que l'argument permettant d'exclure les fibres multiples dans le cas rationnel marche pour une fibration de fibre générique de genre $g \geq 2$; mais pour les fibrations elliptiques cela peut arriver. On ne va pas plus approfondir l'étude des fibres multiples, mentionnons seulement sans démonstration le

Lemme 25 *Si f^*y_0 est une fibre multiple alors le support de f^*y_0 est non simplement connexe.*

Exemples basiques A automorphisme de $\mathbb{P}^2$ près, toute courbe cubique plane peut se mettre sous forme de Weierstrass :

$$y^2 = x^3 + Ax + B$$

et cette courbe est lisse ssi $4A^3 + 27B^2 \neq 0$. On peut construire une surface elliptique en faisant dépendre A et B d'un paramètre rationnel t :

$$y^2 = x^3 + A(t)x + B(t) \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{C} \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1.$$

Il n'y a pas de problème quand A ou B ont des pôles; en effet si $f(t)$ est régulière dans une carte affine alors l'équation ci-dessus est équivalente à

$$y^2 = x^3 + A(t)f^4(t)x + B(t)f^6(t)$$

(remplacer y par yf^3, x par xf^2 et diviser par f^6). Par exemple

$$y^2 = x^3 + tx$$

donne une fibration elliptique avec fibre cuspidale au-dessus de $t = 0$. Suivant le même modèle (mais peut-être en abandonnant la forme de Weierstrass) on peut obtenir des fibres singulières égales à n'importe quelle cubique plane singulière, à savoir : cubique avec point double, cubique avec cusp, conique et droite transverse, conique et droite tangente, trois droites générales, trois droites concourantes. Nous allons voir que ceci n'épuise pas la liste.

Cas où le support de f^*y_0 est une courbe irréductible Si F est une fibre générique on a $K.F = 0$ et $F^2 = 0$, on en déduit que si $f^*y_0 = mC$ alors $K.C = C^2 = 0$. Donc $\pi(C) = 1$ et

- ou bien C est une courbe elliptique lisse;
- ou bien C est une courbe rationnelle singulière avec une seule singularité de multiplicité 2; remarquer que ce sont exactement les singularités des courbes cubiques irréductibles (point double ordinaire ou cusp).

Cas où le support de f^*y_0 est une courbe réductible Dans ce cas on écrit $f^*y_0 = \sum_i n_i C_i$.

Lemme 26 *Chaque courbe C_i est une courbe rationnelle lisse d'auto-intersection -2.*

Preuve. On sait que toute combinaison linéaire des C_i est d'auto-intersection négative ou nulle, et nulle ssi proportionnelle à $\sum_i n_i C_i$. Donc pour tout i on a $C_i^2 < 0$, d'où $K.C_i \geq 0$ (sinon C_i serait une courbe rationnelle lisse d'auto-intersection -1). Mais on a $\sum_i n_i C_i \sim F$ où F est une fibre générique, on a donc $K.F = 0 = \sum_i n_i K.C_i$ ce qui implique $K.C_i = 0$ pour tout i. Finalement $\pi(C_i) = 0$, les C_i sont donc des courbes rationnelles lisses d'auto-intersection -2. □

On distingue ensuite trois situations :

1. Il existe k, j tel que $C_k.C_j \geq 2$.

2. Pour tout $i \neq j$ on a $C_i.C_j \leq 1$, et il existe un point triple.

3. Pour tout $i \neq j$ on a $C_i.C_j \leq 1$, et toutes les intersections sont des points doubles.

Dans le cas 1. on montre qu'il y a exactement deux composantes : on retrouve l'union d'une droite et d'une conique, transverses ou tangentes. Voici l'argument :
Disons $n_j \leq n_k$. On a $0 = C_j.\sum n_i.C_i = -2n_j + n_k C_j.C_k + \sum_{i \neq j,k} n_i C_i.C_j$. Ce dernier terme étant ≥ 0, on en déduit $n_k = n_j$, $C_j.C_k = 2$ et $C_i.C_j = 0$ pour tout $i \neq j,k$. Par connexité de la fibre cette dernière propriété implique qu'il n'y a pas d'autre composante à part C_j et C_k.

Dans le cas 2. on montre qu'il y a exactement trois composantes: on retrouve l'union de trois droites concourantes. Voici l'argument :
Quitte à réordonner on peut supposer que les trois composantes du point triple sont C_1, C_2, C_3 avec $n_1 \leq n_2 \leq n_3$. On a $0 = C_1.\sum n_i.C_i = -2n_1 + n_2 + n_3 + \sum_{i \geq 4} n_i C_1.C_i$. On en déduit $n_1 = n_2 = n_3$ et $C_1.C_i = 0$ pour $i \geq 4$. Il n'a donc pas d'autre composante à part C_1, C_2, C_3.

Le cas 3. est le cas général. On définit un diagramme de Dynkin Γ associé à la fibre singulière.

Lemme 27 *Sur chacun des trois diagrammes de Dynkin suivant la forme d'intersection est négative non définie, ces diagrammes ne peuvent donc être un sous-graphe strict de* Γ *:*

1. *Un sommet avec 4 voisins (graphe* $\tilde{D}_4$*);*

2. *Une boucle* $C_1, \cdots, C_n$ *(graphe* $\tilde{A}_n$*);*

3. *Une chaîne aux deux extrémités de laquelle on rajoute 2 sommets (graphe* $\tilde{D}_n$*).*

Preuve. Dans chacun des trois cas on vérifie que la forme bilinéaire associée est négative, il reste à exhiber une combinaison linéaire non triviale de carré nul :

1. Si C_0 est le sommet central, $C_1, \cdots, C_4$ les 4 voisins, alors $2C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ est de carré nul;

2. Si $C_1, \cdots, C_k$ est une boucle, alors $(\sum C_i)^2 = 0$;

3. Si $C_1, \cdots, C_k$ est la chaîne et $E_1, \cdots, E_4$ les 4 sommets ajoutés, alors $2\sum C_i + \sum E_j$ est de carré nul. □

Remarquons que sur une chaîne de courbes d'auto-intersection-2 la forme d'intersection est définie négative. Il reste à classifier les diagrammes sans boucle et avec un seul sommet triple. Le diagramme consiste donc en trois chaînes de longueur $p \leq q \leq r$ avec un sommet extrémal E en commun. Notons $C_1, \cdots, C_{p-1}, E$ la chaîne de longueur p, et posons $\alpha = C_1 + 2C_2 + \cdots + (p-1)C_{p-1}$. On a (car $(p-1)^2 - (p-1)(p-2) = p-1$)

$$\alpha.\alpha = -2(1^2 + \cdots + (p-1)^2) + 2(1.2 + 2.3 + \cdots + (p-2)(p-1))$$

$$= -2(1 + \cdots + (p-1)) = -2\frac{(p-1)p}{2} = -(p-1)p.$$

On définit de même β et γ associées aux chaînes de longueur q et r. Supposons que notre diagramme soit un sous-graphe strict maximal de Γ, la forme d'intersection est donc définie négative dessus et on peut compléter α, β, γ en une base orthogonale $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ qui engendre un sous-espace contenant E. On applique Pythagore (disons avec le produit scalaire défini positif $\langle D_1, D_2 \rangle = -D_1.D_2$, qui donne la norme $|D|^2 = -D.D$) :

$$2 = |E|^2 = \frac{\langle E.\alpha \rangle^2}{|\alpha|^2} + \frac{\langle E.\beta \rangle^2}{|\beta|^2} + \frac{\langle E.\gamma \rangle^2}{|\gamma|^2} + \frac{\langle E.\delta \rangle^2}{|\delta|^2}$$

On a $\frac{\langle E.\alpha \rangle^2}{|\alpha|^2} = \frac{(p-1)^2}{(p-1)p} = 1 - \frac{1}{p}$, on en déduit $2 \geq 1 - \frac{1}{p} + 1 - \frac{1}{q} + 1 - \frac{1}{r}$, et finalement $1 \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$.

Les triplets $(2, 2, n), (2, 3, 3), (2, 3, 4)$ et $(2, 3, 5)$ donne des matrices d'intersection définie négatives (car correspondent à des graphes que l'on peut inclure dans un graphe vérifiant encore $1 \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$); ce sont les matrices d'intersection correspondant à des résolutions de singularité. Les diagrammes de Dynkin (et les singularités) sont dits respectivement de type D_n, E_6, E_7 et E_8 (l'indice est le nombre de sommets).

Les triplets $(3, 3, 3), (2, 4, 4), (2, 3, 6)$ sont les trois triplets restants, ils correspondent à des fibres singulières possibles (type $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$ et $\tilde{E}_8$).

Dixième cours : jeudi 29 novembre (3 heures).

8 Exemples

On commence une longue série d'exemples...

Exemple : fibrations elliptiques

Préparation. Les courbes elliptiques peuvent être vues comme des quotient de $\mathbb{C}^2$ par un réseau $n + m\tau$. Ceci s'obtient via la théorie des fonctions holomorphes et en particulier en introduisant la fonction $\wp$ de Weierstrass; je rappelle très rapidement la construction :

- Si $\Lambda = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ est un réseau de $\mathbb{C}$, on pose

$$\wp'(z) = \sum_{w\in\Lambda} \frac{-2}{(z-w)^3} \quad \text{et} \quad \wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{w\neq 0\in\Lambda} \left(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right)$$

- On a la relation suivante entre $\wp$ et $\wp'$:

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$$

  où g_2, g_3 sont des constantes qui se calculent à l'aide des séries dites d'Eisenstein $G_k(\Lambda) = \sum_{w\neq 0\in\Lambda} \frac{1}{w^{2k}}$.

- L'application $z \in \mathbb{C} \to [\wp(z) : \wp'(z) : 1]$ induit un biholomorphisme entre le quotient $\mathbb{C}/\Lambda$ et une cubique plane, qui est aussi un isomorphisme de groupes.

D'autre part pour tout couple d'entier $0 < q < n$ avec $q \wedge n = 1$, la singularité de Hirzebruch-Jung de type $A_{n,q}$ est caractérisée (d'un point de vue local analytique) par l'une des définitions équivalentes suivantes (voir [BHPV, p. 99]):

1. Quotient de $\mathbb{C}^2$ par l'action de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: $(x, y) \to (\alpha x, \alpha^q)$ où $\alpha = e^{2i\pi/n}$;

2. Singularité isomorphe à $w^n = xy^{n-q} \subset \mathbb{C}^3$;

3. Singularité se résolvant en une chaîne de courbes rationnelles C_i d'auto-intersection $-r_i = C_i^2$, où les r_i correspondent au développement en fractions continues

$$\frac{n}{q} = r_1 - \frac{1}{r_2 - \frac{1}{r_3 - \cdots}}$$

En particulier une singularité $A_{n,n-1}$ (notée aussi A_{n-1}) se désingularise en une chaîne de $n-1$ courbes d'auto-intersection -2, et une singularité $A_{n,1}$ se désingularise en une courbe d'auto-intersection $-n$.

Par contraste avec la première caractérisation remarquons que le quotient de $\mathbb{C}$ par $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est lisse, en fait le diagramme suivant montre que ce quotient est encore isomorphe à $\mathbb{C}$:

$$\begin{tikzcd} z \in \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d] & z^n \in \mathbb{C} \\ \mathbb{C}_{/\mathbb{Z}_{/n\mathbb{Z}}} \arrow[ur, "\simeq"'] & \end{tikzcd}$$

Construction. On se propose ici de construire une fibration elliptique avec fibre singulière de diagramme $\tilde{E}_7$. On va voir également qu'à un changement de signe près, la même construction donne l'union de deux composantes tangentes, que l'on avait déjà réalisée comme union d'une conique et d'une droite tangentes. Dans la notation de Kodaira, ces deux types de fibres singulières sont notés III^* et III. La construction est analytique complexe; je suis [BHPV, p. 208].

On considère la fibration elliptique sur le disque unité $Y = \mathbb{C} \times \mathbb{D}(0,1)/\sim$ avec $(c,s) \sim (c+n+mz(s), s)$ où $n, m \in Z$ et $z(s) = \frac{i+is^2}{1-s^2}$. Pour l'instant toutes les fibres sont régulières. Considérons maintenant l'automorphisme d'ordre 4 :

$$\sigma : (c,s) \in \mathbb{C} \times \mathbb{D}(0,1) \to \left(\frac{1}{z(s)}c, is\right)$$

Remarquons que la relation $\sim$ est compatible avec σ, au sens où si $(c+n+mz(s), s) \sim (c,s)$ alors (en remarquant que $z(is) = -\frac{1}{z(s)}$) :

$$\sigma(c+n+mz(s), s) = \left(\frac{1}{z(s)}(c+n+mz(s)), is\right)$$

$$= \left(\frac{1}{z(s)}c + m - nz(is), is\right) \sim \left(\frac{1}{z(s)}c, is\right) = \sigma(c,s).$$

Passons donc au quotient Y/σ. Il se passe le phénomène curieux suivant : la fibre Y_0/σ est toujours une courbe lisse (rationnelle), par contre la surface ambiante admet 3 singularités le long de Y_0/σ, qui correspondent aux deux points fixes de σ : $(0,0)$ et $(1/2+1/2i, 0)$, et à l'orbite de période 2 : $(1/2,0) \to (-i/2,0) \sim (i/2,0) \to (1/2,0)$. En regardant les parties linéaires (remarquer que $\sigma^2 : (c,s) \to (-c,-s)$) on s'aperçoit que ces points singuliers sont respectivement de types $A_{4,3}$, $A_{4,3}$, $A_{2,1}$. La désingularisation donne la fibre singulière de type $\tilde{E}_7$ (type III^*).

Variante : si l'on quotiente par

$$\sigma' : (c,s) \in \mathbb{C} \times \mathbb{D}(0,1) \to \left(-\frac{1}{z(s)}c, is\right)$$

on obtient des points singuliers de type $A_{4,1}$, $A_{4,1}$, $A_{2,1}$. Après désingularisation on s'aperçoit que la transformée de Y_0 est rationnelle d'auto-intersection -1 : on la contracte. On peut encore contracter la courbe venant de $A_{2,1}$, restent les deux courbes venant des $A_{4,1}$, $A_{4,1}$ qui sont tangentes et d'auto-intersection -2 (type III).

Surface elliptique avec une infinité de -1 courbe Soit C une cubique plane lisse, et $p_1, \cdots, p_8$ huit points sur C. Alors par ces huit points il passe un pinceau de cubiques (système linéaire de dimension 1) : en effet l'espace des cubiques est un $\mathbb{P}^9$, donc par huit points il passe un pinceau, et les éléments de ce pinceau s'intersecte en un même neuvième points p_9. Après éclatement des neuf points on récupère une fibration elliptiques avec 9 sections E_i correspondant aux neuf diviseurs exceptionnels. En fait il y a une infinité de telle sections : si l'on fixe un neutre dans chaque courbe elliptique à l'aide de la section E_9 par exemple, alors chacune des sections $E_1, \cdots, E_8$ donne un automorphisme de la surface (par translation dans les fibres elliptiques). On obtient ainsi un groupe d'automorphisme isomorphe à $\mathbb{Z}^8$, et en regardant l'image de E_9 on obtient ainsi une infinité de -1 courbes.

Remarques / exercice :

- En fait il n'est pas essentiel que les neuf points soient les points d'intersection de deux cubiques : pour la plupart des configurations de neuf points, la surface obtenue en éclatant ces neuf points admet un $\mathbb{Z}^8$ de -1 courbes (même s'il n'y a plus d'automorphismes ni de structure de fibration elliptique) : la preuve utilise la formule de Riemann Roch, voir [F, p. 131].
- D'autre part, si l'on prend des pinceaux de cubiques particuliers, on peut obtenir des fibrations elliptiques avec fibres singulières prescrites (alors qu'un pinceau général ne donne que des cubiques à points double) : voir [F, p. 192]. Par exemple, montrer que le pinceau engendré par une droite triple (disons $y^3 = 0$) et une cubique lisse intersectant la droite transversalement en trois points (disons $x + x^2 + y^3 = 0$) donne lieu à une singularité $\tilde{E}_7$.

Exemple : surfaces abéliennes

Par contraste avec le cas des courbes elliptiques, la surface complexe obtenue comme quotient de $\mathbb{C}^2$ par un réseau $\Omega = \mathbb{Z} + \tau_1\mathbb{Z} + \tau_2\mathbb{Z} + \tau_3\mathbb{Z}$ n'est pas toujours isomorphe à une surface projective. Si un tel quotient est projectif la surface obtenue est dite surface abélienne. Suivant [S2, p.162] nous donnons un exemple de tore complexe non projectif. L'argument est basé sur le

Lemme 28 *Si $f : A^2 \to B^1$ est une morphisme régulier surjectif entre deux variétés abéliennes de dimension respective 2 et 1, alors il existe une courbe elliptique $C \subset A$ telle que la restriction $f : C \to B$ soit encore surjective.*

Preuve. Soit $a \in A$, et $X \subset A$ une courbe irréductible passant par a non inclue dans une fibre de f (X est une composante d'une section hyperplane, c'est ici que l'hypothèse "projective" est essentielle). Soit $g : X \to B$ la restriction de f, c'est un morphisme à fibre finie. On construit $h : B \to A$ en posant $h(b) = S(g^*(b))$, on peut montrer que h est un morphisme régulier. Alors $C = h(B)$ convient, en effet l'image de B est encore une variété abélienne par [S, p.192]. □

Posons maintenant Λ engendré par $(1, 0), (i, 0), (0, 1)$ et (α, β) avec $\beta \notin \mathbb{R}$. Posons $A = \mathbb{C}^2/\Omega$, $B = \mathbb{C}/(1, \beta)$, et $f : A \to B$ induit par $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \to z_2 \in \mathbb{C}$. Supposons que comme dans le lemme il existe $C \subset A$ tel que la restriction de f soit surjective et cherchons une contradiction.

Notons $\Lambda \subset \mathbb{C}^2$ la préimage de C, et Λ_0 la composante connexe de 0. D'une part Λ est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}^4$ et ceux-ci sont tous de la forme : somme directe de copies de $\mathbb{Z}$ + somme directe de copies de $\mathbb{R}$. D'autre part $\Lambda_0 \simeq \mathbb{C}$ est défini par une équation linéaire, finalement

$$\Lambda = \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2 + \mathbb{R}e_3 + \mathbb{R}e_4$$

où $\Lambda_0 = \mathbb{R}e_3 + \mathbb{R}e_4$ avec $e_4 = \lambda e_3$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Si $e_3 = (a+ib+\alpha d, c+\beta d)$ avec $c+\beta d \neq 0$, on voit que $\lambda \in \mathbb{Q}(\beta)$ et $\alpha \in \mathbb{Q}(\beta, i)$. Prendre $\beta = i$ et $\alpha = \sqrt{2}$ pour constater que ce n'est pas toujours le cas.

Remarquons que pour une surface abélienne $q = 2$ (car les 1-formes proviennent de 1-formes invariantes sur $\mathbb{C}^2$, et sur $\mathbb{C}^2$ les 1-formes sont engendrées par dz_1, dz_2) et $K = 0$ (la 2-forme $dz_1 \wedge dz_2$ descend en une 2-forme sans zéro ni pôle sur la surface abélienne).

Exemple : surfaces K3

Par définition une surfaces K3 est une surface S avec $K_S = 0$ et $q = \dim \Omega^1[S] = 0$. Weil explique dans ses Oeuvres, Volume II, p. 546 comment il a eu l'idée de cette appellation : “il s'agit des variétés kählériennes dites K3, ainsi nommées en l'honneur de Kummer, Kähler, Kodaira, et de la belle montagne K2 au Cachemire.”

K3 comme intersection complète [B p.127] Les seules intersections complètes avec $K = 0$ sont les quartiques dans $\mathbb{P}^3$, les intersections d'une quadrique et d'une cubique dans $\mathbb{P}^4$ et les intersections de trois quadriques dans $\mathbb{P}^5$ (utiliser la formule d'adjonction). Pour montrer que ces surfaces n'ont aucune 1-forme régulière (i.e, $q = 0$), on utilise le théorème des sections hyperplanes de Lefschetz :

Théorème 29 (admis, voir [GH, p. 156]) *Soit $V \subset \mathbb{P}^n$ une hypersurface lisse. Alors les applications $i^* : H^q(\mathbb{P}^n, \mathbb{C}) \to H^q(V, \mathbb{C})$ induit par l'inclusion $i : V \to \mathbb{P}^n$ sont des isomorphismes pour $q = 0, 1, \cdots, n-2$*

Remarques : si $q = n-1$ alors i^* est seulement injectif, et pour $q = n, n+1, \cdots, 2n$ le théorème ne dit plus rien.
Dans le cas $n = 2$, le résultat ne dit quelque chose que pour les H^0 : on voit que toute courbe plane est connexe.
Dans le cas d'intersection complète on peut appliquer le théorème en cascade (utiliser des plongements de Veronese), on voit que le H^1 est nul, car $H^1(\mathbb{P}^n) = 0$. En particulier, on constate qu'une surface avec $q \geq 1$ (par exemple une surface abélienne) ne peut pas être une intersection complète.

K3 comme surface de Kummer (voir [B p. 127],[BHPV p. 224]) Soit T une surface abélienne (par exemple $T = C \times C$ avec C courbe elliptique). On considère l'involution $x \to -x$ sur T, elle a 16 points fixes au voisinage de chacun desquels la partie linéaire de i est $(-x_1, -x_2)$. Le quotient admet donc 16 points de type $A_{2,1}$ qui se résolvent chacun en une -2 courbe F_i. La surface désingularisée S s'appelle une surface de Kummer. Une autre façon d'exprimer la construction est d'éclater les 16 points fixes sur T, puis de constater que S s'obtient comme passage au quotient par l'involution prolongée (qui fixe point par point les 16 diviseurs exceptionnels E_i).

Montrons que $K_S = 0$. Il est clair que K_S est concentré sur les F_i (ailleurs il y a une 2-forme sans zéro ni pôle qui provient de T). On a $K_S = \sum c_i F_i$, et la formule d'adjonction donne $-2 = K_S.F_i + F_i^2 = -2c_i - 2$ d'où $c_i = 0$. Une autre manière de voir les choses est d'écrire $K_S = \pi^* K + \sum a_i F_i$, où K est le diviseur canonique sur la surface singulière. Subtilité : $\pi^* K$ n'a pas de sens a priori car K est un diviseur de Weil mais pas de Cartier, cependant $2K$ est Cartier, ce qui permet de donner un sens à la formule (via la recette : multiplier par 2, faire le pull back, diviser par 2). Un calcul simple donne $a_i = \frac{2+E_i^2}{-E_i^2}$, en particulier dans notre cas $a_i = 0$ (remarquer que pour $E_i^2 = -1$ on retrouve une formule déjà vue).

Reste à voir $q = 0$. Une 1-forme régulière devrait provenir d'une 1-forme invariante sur T, mais les 1-formes sur T sont engendrées par dz_1, dz_2 qui ne sont pas invariantes (ni aucune combinaison linéaire).

Onzième cours : jeudi 6 décembre.

Avant de poursuivre avec des exemples je fais une digression sur la formule de Riemann-Hurwitz. Si $f : S \to S'$ est un morphisme rationnel non constant entre deux courbes (= deux surfaces de Riemann), alors f est régulier surjectif à fibres finies. Si la fibre générique admet n points on dit que f est un revêtement (ramifié) de degré n. Remarquons que dans cette situation on a une injection $f^* : \Omega^1[S'] \to \Omega^1[S]$ et donc

$$g(S') \leq g(S).$$

On peut préciser la relation entre $g(S')$ et $g(S)$: notons tout d'abord que la caractéristique d'Euler de S (sommets - arêtes + faces d'une triangulation de S) est égale à $\chi(S) = 2 - 2g(S) = -\deg K_S$. En choisissant une triangulation de S' telle que les points de branchement soient des sommets, on obtient la formule de Riemann-Hurwitz :

$$\chi(S) = n.\chi(S') - \sum (v(p) - 1)$$

où la somme est sur les points p de branchement et $v(p) \geq 2$ est l'ordre de ramification de p (au-dessus de p il y a $v(p)$ feuillets qui deviennent confondus).

Un corollaire de cet formule est que si S est une courbe elliptique ($\chi(S) = 0$) et qu'il y a au moins un point de branchement alors S' est rationnelle. Dans la construction d'une fibration elliptique avec fibre de type III^* on avait un quotient de la courbe elliptique $Y_0 = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ par l'automorphisme $z \to -iz$. On peut maintenant justifier que le quotient est une courbe rationnelle, en fait la formule de Riemann-Hurwitz s'écrit :

$$0 = \chi(Y_0) = 4.\chi(Y_0/\sigma) - 3 - 3 - 1 - 1 \Longrightarrow \chi(Y_0/\sigma) = 2.$$

Exemple : surfaces d'Enriques (voir [B, p. 135]).

Les surfaces d'Enriques sont des quotients d'une surface K3 par une involution sans point fixe. Elle satisfont $q = 0$, $P_g = 0$, $2K \equiv 0$. Historiquement Enriques a exhibé une surface avec de tels invariants pour montrer qu'on ne pouvait pas affaiblir les hypothèses du

Théorème 30 (Castelnuovo, voir [B, p.74]) *Une surface avec $q = P_2 = 0$ est rationnelle (c'est-à-dire birationnelle à $\mathbb{P}^2$).*

Voici une façon de construire des surfaces K3 avec une involution sans points fixe. On considère dans $\mathbb{P}^5$ l'intersection complète S de 3 quadriques de la forme $Q_i(X_0, X_1, X_2) + Q_i'(X_3, X_4, X_5) = 0$. Si les Q_i, Q_i' sont assez générales alors la surface est lisse, c'est une surface K3, et l'involution

$$[X_0 : X_1 : X_2 : X_3 : X_4 : X_5] \to [X_0 : X_1 : X_2 : -X_3 : -X_4 : -X_5]$$

est sans point fixe sur S.

Pour voir que $p_g = 0$ on peut utiliser la formule de Noether

$$1 - q + p_g = \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2)$$

où c_1, c_2 sont les classes de Chern du fibré tangent de la surface. On a $c_1 = -K$ et $c_2 = e$ (caractéristique d'Euler).

Pour une surface K3 : $q = 0, p_g = 1$ et $K^2 = 0$ implique $e = 24$, après quotient par une involution sans point fixe on a $e = 12$, d'où $p_g = 0$.

Voici un autre exemple où on peut vérifier plus directement que $p_g = 0$. Prendre la quartique $S \subset \mathbb{P}^3$ définie par $X^4 + Y^4 = Z^4 + W^4$ (on sait que c'est une K3) et l'automorphisme d'ordre 4 : $f : [X : iY : -Z : -iW]$. Le quotient S' de S par f^2, après désingularisation (4 points fixes qui donnent quatre -2 courbes) est encore une K3, par contre le quotient de S' par f est une surface d'Enriques. On peut vérifier ces affirmations directement car dans la carte $X = 1$ une 2-forme sans zéro ni pôle est donnée par $\omega = \frac{dy \wedge dw}{4z^3}$ qui est invariante par f^2 mais pas par f.

Exemple : surfaces bielliptiques.

Les surfaces bi-elliptiques sont des quotient $S = (E \times F)/G$ où E, F sont deux courbes elliptiques et G un groupe fini; elles vérifient $q(S) = 1$ et $p_g(S) = 0$. Il n'y a que 7 exemples de ce type, en voici un :

Soit $E = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$ une courbe elliptique quelconque, et $F = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$. On fait agir $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sur $E \times F$ par $(z, w) \to (z + \tau/4, iw)$. La 1-forme dz passe au quotient, par contre la 1-forme dw et la 2-forme $dz \wedge dw$ ne passe pas .

9 Classification d'Enriques et théorie de Mori

Soit S une surface projective lisse minimale (pas de courbe rationnelle d'auto-intersection -1). Voici la classification d'Enriques qui se fait en fonction des invariants $\kappa(S)$ (dimension de Kodaira), $q(S) = \dim \Omega^1[S]$ (irrégularité) et $p_g(S) = \dim \Omega^2[S]$ (genre géométrique).

$\kappa(S)$	p_g	q	Surface	description
$-\infty$	0	0	rationnelle	$\mathbb{P}^2$ ou F_p surfaces de Hirzebruch
$-\infty$	0	>0	réglée	fibration rationnelle vers C de genre q
0	1	0	K3	
0	1	2	Abélienne	$\mathbb{C}^2/\Omega$ + condition pour être projectif
0	0	0	Enriques	quotient d'une K_3 admettant une involution sans point fixe.
0	0	1	bi-elliptique	certains quotient $(E \times F)/G$ avec E, F elliptiques et G fini.
1			elliptique	fibration elliptique vers une courbe C.
2			type général	

Je vais finir ce cours en essayant de placer cette classification en perspective par rapport à la théorie de Mori, qui a pour objet de classer les variétés projectives de dimension quelconque à équivalence birationnelle près.

Définition 24 *On dit qu'une surface S est del Pezzo si le diviseur anticanonique $-K_S$ est ample, c'est à dire qu'il existe un plongement $S \to \mathbb{P}^N$ et un entier m tel que $-mK_S$ soit une section hyperplane.*

Si une variété X de dimension ≥ 3 vérifie cette même propiété, on dit que X est Fano (les del Pezzo sont donc exactement les surfaces Fano).

Définition 25 *On dit qu'une surface est un modèle minimal si le diviseur canonique est nef (numériquement effectif ? ou numericaly eventually free ?), c'est-à-dire si $K_S.C \geq 0$ pour toute courbe $C \subset S$.*

Cette définition est valable en toute dimension; attention il y a téléscopage avec le vocabulaire précédent de "surface minimale" pour une surface sans -1 courbe. Une surface qui est un modèle minimal n'admet aucune -1 courbe (car pour une telle courbe $K.C = -1$) mais la réciproque n'est pas vrai (exemple : $\mathbb{P}^2$).

Lemme 31 *Soit S une surface, $p \in S$ un point, $C \subset S$ une courbe de multiplicité m en p, et $\pi : S' \to S$ l'éclatement de p. Alors*

$$K_{S'}.C' = K_S.C + m.$$

Corollaire 32

1. *Si S' est del Pezzo alors S est aussi del Pezzo;*
2. *Si $f : S_1 \dashrightarrow S_2$ est une application birationnelle entre deux modèles minimaux alors f est un isomorphisme.*

Remarque : une version faible du deuxième point est encore valable en dimension plus grande (deux modèles minimaux birationnels sont isomorphes en codimension 1).

Il est bon d'avoir en tête tous les exemples de surfaces intersection complète qui ne sont pas de type général :

Dans $\mathbb{P}^3$:

- une quadrique est isomorphe à $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ (surface del Pezzo);
- une cubique est isomorphe à $\mathbb{P}^2$ éclaté en 6 points (surface del Pezzo);
- une quartique est une surface K3;
- une surface de degré ≥ 5 est de type général.

Dans $\mathbb{P}^4$:

- l'intersection complète de deux quadriques est isomorphe à $\mathbb{P}^2$ éclaté en 5 points (surface del Pezzo);
- l'intersection complète d'une quadrique et d'une cubique est une surface K3;
- Dans les autres cas on obtient des surfaces de type général.

Dans $\mathbb{P}^5$:

- L'intersection complète de trois quadriques est une surface K3.
- Dans les autres cas on obtient des surfaces de type général.

On peut montrer que les surfaces del Pezzo sont exactement $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ et les éclatés de $\mathbb{P}^2$ en au plus huit points

Douzième cours : jeudi 13 décembre.

Et maintenant quelques grands théorèmes...

Théorème 33 (conjecture d'abondance, théorème en dimension ≤ 3) *Soit X un modèle minimal, alors pour m assez grand $\phi_{mK_X} : X \to X_{can} \subset \mathbb{P}^N$ est régulière.*

De plus on a les propriétés suivantes :

- la variété X_{can} est de dimension $\kappa(X)$ et est éventuellement singulière, mais les singularités sont contrôlées : pour les surfaces, on obtient les singularités de "du Val", c'est-à-dire celles qui se désingularisent avec des courbes rationnelles d'auto-intersection -2.
- la fibre générique de ϕ_{mK_X} est une variété de dimension de Kodaira 0 : par exemple pour une surface elliptique, la fibre est une courbe de dimension kodaira $= 0$, c'est-à-dire une courbe elliptique.

Remarque : il n'est pas difficile, s'il l'on admet la conjecture d'abondance, de voir qu'une surface de dimension kodaira $= 1$ est une fibration elliptique (à condition d'admettre aussi la factorisation de Stein : si $f : X \to Y$ est un morphisme régulier, on peut décomposer $f : X \to Z \to Y$ avec $X \to Z$ à fibres connexes et $Z \to Y$ finie).

Le théorème implique que si K_S est nef alors : $K_S^2 > 0$ ssi S de type général.

Définition 26 *Une fibration de Mori est une variété X avec une fibration $f : X \to Y$ telle que :*

- *Tout les courbes contractées par f sont numériquement proportionnelles et satisfont $K_X.C < 0$.*
- *En particulier la fibre générique est une variété Fano.*

Théorème 34 (hard dichotomy conjecture, théorème en dimension ≤ 3) *Soit X projective lisse, alors :*

- *ou bien $\kappa(X) = -\infty$, et X est birationnelle à une fibration de Mori;*
- *ou bien $\kappa(X) \geq 0$, et X est birationnelle à un modèle minimal.*

L'objet de la théorie de Mori (ou Minimal Model Program) est d'expliciter un algorithme qui permette à partir de X d'obtenir la fibration de Mori ou le modèle minimal correspondant. Le théorème affirme qu'en regardant la dimension de Kodaira, on peut savoir a priori sur laquelle de ces deux sorties possibles on va aboutir. Sur les surfaces l'algorithme consiste simplement à contracter les courbes rationnelles d'auto-intersection -1 jusqu'à aboutir à l'une des deux possibilités.

Un aperçu du programme minimal en dimension 3 On part de X projective lisse de dimension 3. La première question est

Est-ce que K_X est nef ?

Si OUI, X est un modèle minimal, il n'y a rien à faire.

Si NON, il est possible de trouver une courbe $C \subset X$ avec $K_X.C < 0$ + une propriété d'extrémalité (on dit que C engendre un rayon extrémal), et de construire un morphisme régulier $X \to Y$ qui contracte exactement les courbes équivalentes (à un multiple près) à C. Il y a trois situations distinctes, suivant que les courbes équivalentes à C balayent X tout entier, un diviseur ou seulement C.

- Si X est recouvert par des courbes équivalentes à C, on a $\dim Y < \dim X$ et $X \to Y$ est une fibration de Mori : on a fini !

- Si les courbes recouvrent un diviseur E on s'attend à ce que E provienne de l'éclatement d'un point ou d'une courbe lisse sur Y, dans ce cas on reprend l'algorithme avec Y. Cependant il arrive ici un

  Problème mineur. Il peut arriver que E soit le diviseur produit par la résolution d'une singularité sur Y. Ceci conduit à accepter les variétés avec une certaine classe restreinte de singularités (singularités terminales).

  Discuter la notion de singularité terminale sur l'exemple d'un cône sur une courbe rationnelle normale et son analogue 3-dimensionnel (le cône sur le $\mathbb{P}^2$ de Veronese est terminal).

- Si C n'est équivalente à aucune courbe, on est face au

  Problème majeur. Y est dans ce cas "très singulière", en particulier le diviseur canonique sur Y n'est pas Cartier (seulement Weil) et cela n'a pas de sens de parler de l'intersection de K_Y avec une courbe. On se tire de ce mauvais pas en faisant une chirurgie holomorphe : on enlève la courbe C et on recole une autre courbe rationnelle C^+ qui a le bon goût de vérifier $K.C^+ > 0$. Cette chirurgie s'appelle un flip. Ça a été le grand oeuvre de Mori de montrer qu'un tel flip existe toujours (en dimension 3).

Le programme minimal (théorème en dimension 3) affirme qu'après un nombre fini de tels contraction/flips on finit par arriver sur une fibration de Mori ou un modèle minimal (dans la catégorie des 3 variétés projectives à singularités terminales).

A travers les énoncés ci-dessus on voit que la classification des variétés à équivalence birationnelle près se ramène en principe à l'étude de trois grandes classes : type général, Kodaira = 0, Fano.

Pour fixer les idées, quelques listes :

- Courbes Fano : $\mathbb{P}^1$;
- Surfaces Fano : $\mathbb{P}^2$ éclaté en au plus huit points en position générale, $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.
- 3-variétés Fano (lisses) : plus d'une centaine de familles à déformation près (classification russe dans les années 1970)...
- courbes Kodaira $= 0$: courbes elliptiques;
- surfaces Kodaira $= 0$: K3, surfaces abéliennes, et certains quotients (Enriques, bi-elliptiques);
- Analogue 3-dimensionnel des K3 (K $= 0$, simplement connexe) : variétés de Calabi-Yau, qui interviennent en théorie des cordes pour représenter des "dimensions cachées" de l'univers; plusieurs milliers (millions ?) de familles distinctes...

Références

[B] Beauville, Surfaces algébriques complexes, Astérisque 54.

[BHPV] Barth, Hulek, Peters, Van de Ven, Compact Complex Surfaces (Second Edition).

[F] Friedman, Algebraic Surfaces and Holomorphic Vector Bundles.

[GH] Griffith & Harris, Principles of Algebraic Geometry.

[Ha] Harris, Algebraic Geometry, a First Course.

[L] Lang, Algebra, (Third Edition).

[S] Shafarevich, Basic Algebraic Geometry, vol 1.

[S2] Shafarevich, Basic Algebraic Geometry, vol 2.