Master de mathématique M2R
Université Claude Bernard (Lyon 1)
U.F.R. de Mathématiques

8 novembre 2007

Surfaces algébriques complexes

Examen partiel

Durée: 2 heures

Chaque exercice est noté sur 7; la note finale est la somme des trois meilleurs exercices. Il est donc préférable de vous concentrer sur trois exercices de votre choix, plutôt que de faire les quatre à moitié... Les questions subsidiaires sont sans doute trop dures; il est conseillé de n'y réfléchir éventuellement qu'en fin d'épreuve, et de ne pas hésiter à n'y apporter qu'une réponse partielle...

I - Systèmes linéaires.

Soit $C \subset \mathbb{P}^2$ la courbe d'équation $X^2 + Y^2 - Z^2 = 0$.

1. Donner une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{L}(C) = \{f; (f) + C \geq 0\}$ et montrer que si $D \sim C$ alors les espaces $\mathcal{L}(C)$ et $\mathcal{L}(D)$ sont isomorphes.
2. Montrer que l'application ϕ_C associée au système linéaire complet $|C|$ est régulière.
3. Trouver un sous-espace linéaire de $|C|$, ou ce qui revient au même une famille libre de $\mathcal{L}(D)$ où $D \sim C$, tel que l'application ϕ associée soit birationnelle non régulière de $\mathbb{P}^2$ vers son image $\phi(\mathbb{P}^2)$.
4. Trouver un sous-espace linéaire de $|C|$ tel que l'application ϕ associée satisfasse les deux propriétés : $\phi(\mathbb{P}^2)$ est une courbe et ϕ est régulière sur $\mathbb{P}^2$ privé d'un seul point.
5. *Question subsidiaire* : Trouver un exemple d'un diviseur $D \subset X$ et de deux entiers n, m tel que $\phi_{nD}(X)$ et $\phi_{mD}(X)$ soit de dimensions différentes.

II - Désingularisation de courbes.

Dans $\mathbb{C}^2$ on considère les courbes affines $C_1 = \{y^2 = x^5\}$ et $C_2 = \{y^2 = x^3\}$.

1. Montrer que l'on peut désingulariser C_1 en deux éclatements, c'est-à-dire qu'il existe $\pi : V \to \mathbb{C}^2$ composée de deux éclatements tel que la transformée stricte C_1' de C_1 sur V soit une courbe lisse.
2. Montrer que C_1' intersecte le lieu exceptionnel de π (i.e., les deux courbes contractées par π) en un seul point p, et expliciter une équation de C_1' dans une carte centrée en p.
3. Montrer que la transformée stricte C_2' de C_2 sur V est également lisse, et déterminer l'ensemble $C_1' \cap C_2'$.
4. Calculer le nombre d'intersection local $(C_1.C_2)_{(0,0)}$.
5. *Question subsidiaire* : comment caractériser les courbes singulières $C \subset \mathbb{C}^2$, tel que C devienne lisse après un seul éclatement ?

III - Surfaces de degré 2.

On considère la surface $S \subset \mathbb{P}^3$ donnée par l'équation $Y^2 + XZ - W^2 = 0$.

1. Montrer qu'en restriction à S la projection $\pi : [X : Y : Z : W] \in \mathbb{P}^3 \dashrightarrow [X : Y : W] \in \mathbb{P}^2$ est une application birationnelle $g : S \dashrightarrow \mathbb{P}^2$. Quels sont les points où g est mal définie ?

2. Expliciter l'inverse de cette application birationnelle g sous la forme $g^{-1} : [X : Y : W] \dashrightarrow [F_0 : F_1 : F_2 : F_3]$ où les F_i sont des polynômes homogènes de même degré. Quels sont les points où g^{-1} est mal définie ?

3. Soit $f : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ l'application birationnelle induite par l'identité sur $\mathbb{C}^2$. Soit V la surface et $\pi_1 : V \to \mathbb{P}^2$, $\pi_2 : V \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ les suites d'éclatements tel que le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ \mathbb{P}^2 \arrow[rr, dashed, "f"'] & & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \end{tikzcd}$$

   Montrer que la surface V est l'union disjointe d'un ouvert isomorphe à $\mathbb{C}^2$ est d'une courbe admettant trois composantes irréductibles; et calculer l'auto-intersection de chacune de ces trois composantes.

4. Expliciter un isomorphisme $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \simeq S$.

5. *Question subsidiaire* : Si $Q \subset \mathbb{P}^3$ est une surface lisse donnée par une équation de degré 2, a-t-on toujours Q isomorphe à $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$?

IV - Cubique gauche

Soit $f : t \in \mathbb{C} \to (t^3, t^2, t) \in \mathbb{C}^3$. On note C l'image de f, et $\overline{C} \in \mathbb{P}^3$ la courbe projective correspondante ($\overline{C}$ est une *cubique gauche*).

1. Trouver deux polynômes $P_1, P_2 \in \mathbb{C}[x, y, z]$ de degré 2 tel que $C = \{P_1 = P_2 = 0\}$.

2. Expliciter $\overline{f} : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$ tel que $\overline{f}(\mathbb{P}^1) = \overline{C}$.

3. Ecrire les polynômes homogénéisés $\overline{P_1}$ et $\overline{P_2}$ associés à P_1 et P_2, et montrer que
$$\overline{C} \neq \{\overline{P_1} = \overline{P_2} = 0\}.$$

4. Trouver un troisième polynôme P_3 de degré 2 tel que $\overline{C} = \{\overline{P_1} = \overline{P_2} = \overline{P_3} = 0\}$.

5. Considérons la projection $\pi : [X : Y : Z : W] \in \mathbb{P}^3 \to [X : Y : W] \in \mathbb{P}^2$; déterminer les points singuliers de l'image $\pi(\overline{C})$.

6. *Question subsidiaire* : est-il vrai que toute courbe lisse $C \subset \mathbb{P}^n$ est isomorphe à une courbe dans $\mathbb{P}^2$? à une courbe dans $\mathbb{P}^3$?