Master de mathématique M2R Avril 2013
Université Paul Sabatier (Toulouse 3)

Géométrie birationnelle

Examen

Durée: 3 heures

I - Désingularisation de courbes.

Dans $\mathbb{C}^2$, on considère les courbes affines $C_1 = \{y^2 = x^5\}$ et $C_2 = \{y^2 = x^3\}$.

1. Montrer que l'on peut désingulariser C_1 en deux éclatements, c'est-à-dire qu'il existe $\pi : V \to \mathbb{C}^2$ composée de deux éclatements tel que la transformée stricte C_1' de C_1 sur V soit une courbe lisse.

2. Montrer que C_1' intersecte le lieu exceptionnel de π (i.e., les deux courbes contractées par π) en un seul point p, et expliciter une équation de C_1' dans une carte centrée en p.

3. Montrer que la transformée stricte C_2' de C_2 sur V est également lisse, et déterminer l'ensemble $C_1' \cap C_2'$.

4. Illustrer les questions précédentes par une figure.

5. On plonge $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{P}^2$ par $(x,y) \to [x : y : z]$, et on note encore C_1, C_2 les prolongements des courbes affines précédentes à $\mathbb{P}^2$. Montrer que C_1 et C_2 s'intersectent en un unique point q sur la droite à l'infini $z = 0$.

6. Calculer (idéalement à l'aide des questions précédentes !) les nombres d'intersection locaux $(C_1 \cdot C_2)_{(0,0)}$ et $(C_1 \cdot C_2)_q$, où $(0,0)$ est l'origine dans $\mathbb{C}^2$ et q le point donné par la question précédente.

II - Applications quadratiques.

Considérons p_1, p_2, p_3 trois points distincts non alignés de $\mathbb{P}^2$ (pas de point infiniment proche), et V la surface obtenue par éclatements successifs de p_1, p_2, p_3.

1. En général, si $C \subset S$ est une courbe dans une surface lisse, on dit que C est une (-1)-courbe si $C \cdot C = -1$ et $K_S \cdot C = -1$. Montrer qu'une telle (-1)-courbe est rationnelle lisse (autrement dit C est isomorphe à $\mathbb{P}^1$).

2. Combien la surface V compte-t-elle de (-1)-courbes ?

3. On dit que deux morphismes birationnels f_1, f_2 de V vers $\mathbb{P}^2$ sont équivalents s'il existe un isomorphisme $\ell : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ tel que $f_2 = \ell \circ f_1$. Combien existe-t-il de morphismes birationnels de V vers $\mathbb{P}^2$, à équivalence près ?

4. Si f_1, f_2 sont deux morphismes birationnels non équivalents de V vers $\mathbb{P}^2$, notons $g = f_2 \circ f_1^{-1}$. Montrer que g est une transformation quadratique.

5. Reprendre (rapidement) les questions 2,3 et 4 dans le cas où p_2 est un point infiniment proche de p_1, et p_3 est un point de $\mathbb{P}^2$ distinct de p_1.

III - Problème : Surfaces de degré 2.

1. On considère la surface $S \subset \mathbb{P}^3$ donnée par l'équation $Y^2 + XZ - W^2 = 0$, et l'application rationnelle
$$\pi : [X : Y : Z : W] \in \mathbb{P}^3 \dashrightarrow [X : Y : W] \in \mathbb{P}^2.$$
   (a) Pourquoi est-il légitime d'appeler π une “projection” ?
   (b) Montrer que la restriction $g = \pi|_S$ de la projection π à la surface S est une application birationnelle $g\colon S \dashrightarrow \mathbb{P}^2$.
   (c) Expliciter l'inverse de cette application birationnelle g sous la forme
$$g^{-1} : [X : Y : W] \in \mathbb{P}^2 \dashrightarrow [F_0 : F_1 : F_2 : F_3] \in S \subset \mathbb{P}^3$$
   où les F_i sont des polynômes homogènes de même degré.
   (d) Déterminer les points où g et g^{-1} sont mal définies; ainsi que les courbes contractées respectivement par g et g^{-1}.

2. Soit $f : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ l'application birationnelle induite par l'identité sur $\mathbb{C}^2$, où on identifie $\mathbb{C}^2$ à un ouvert de $\mathbb{P}^2$ et de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ respectivement par les injections
$$(x,y) \to [x : y : 1] \text{ et } (x,y) \to [x : 1], [y : 1]$$
   Soit V la surface et $p : V \to \mathbb{P}^2$, $q : V \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ les suites minimales d'éclatements tel que le diagramme suivant commute:
$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ \mathbb{P}^2 \arrow[rr, dashed, "f"'] & & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \end{tikzcd}$$
   (a) Montrer que la surface V est l'union disjointe d'un ouvert isomorphe à $\mathbb{C}^2$ est d'une courbe admettant trois composantes irréductibles; et calculer l'auto-intersection de chacune de ces trois composantes (faire une figure !).
   (b) Expliciter un isomorphisme $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \simeq S$. Quelle est la relation entre f et l'application g de la question 1.(b) ?
   (c) Si $Q \subset \mathbb{P}^3$ est une surface lisse donnée par une équation de degré 2, a-t-on toujours Q isomorphe à $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$?

3. (a) A l'aide de la formule d'adjonction, retrouver la formule donnant le genre d'une courbe plane lisse $C \subset \mathbb{P}^2$ de degré m. Est-il possible qu'une telle courbe soit de genre 2 ?
   (b) Si C est maintenant une courbe lisse dans $\mathbb{P}^3$ donnée par l'intersection de deux surfaces lisses de degrés respectifs p et q, calculer le genre de C. Est-il possible qu'une telle courbe soit de genre 2 ?
   (c) On se place maintenant dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, et on note D_1, D_2 des fibres respectivement horizontale et verticale : on a $D_1^2 = D_2^2 = 0$ et $D_1 \cdot D_2 = 1$. Soit $C \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ linéairement équivalente à $nD_1 + mD_2$. Pour tout couple d'entiers strictement positifs (n,m), justifier l'existence d'une courbe lisse $C \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ linéairement équivalente à $nD_1 + mD_2$, et calculer son genre. Est-il possible qu'une telle courbe C soit de genre 2 ?
   (d) Par la question 2.(b) on peut plonger toute courbe de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ dans $\mathbb{P}^3$. Ceci vous semble-t-il en accord avec les deux questions précédentes ?