Master de mathématique M2R
Université Claude Bernard (Lyon 1)
U.F.R. de Mathématiques

8 novembre 2007

Corrigé (succinct) de l'examen partiel

I - Systèmes linéaires.

1. $\frac{X^2}{X^2+Y^2-Z^2}, \frac{Y^2}{X^2+Y^2-Z^2}, \frac{Z^2}{X^2+Y^2-Z^2}, \frac{XY}{X^2+Y^2-Z^2}, \frac{XZ}{X^2+Y^2-Z^2}, \frac{YZ}{X^2+Y^2-Z^2}$ est une base de $\mathcal{L}(C)$.
   Si $D = C + (g)$, $f \in \mathcal{L}(C) \to fg \in \mathcal{L}(D)$ est un isomorphisme.

2. On a
$$\phi_C : [X : Y : Z] \to [X^2 + Y^2 - Z^2 : X^2 : Y^2 : Z^2 : XY : XZ : YZ] \in \mathbb{P}^6$$
   et ces sept polynômes sont simultanémént nuls ssi $X = Y = Z = 0$, ϕ_C est donc partout bien défini.

3. $\phi : [X : Y : Z] \dashrightarrow [XY : XZ : YZ] \in \mathbb{P}^2$ convient (on a pris $D = \{XY = 0\} \sim C$, et $f = \frac{Z}{Y}, g = \frac{Z}{X}$ une famille libre de $\mathcal{L}(D)$).

4. $\phi : [X : Y : Z] \dashrightarrow [Y^2 : YZ - X^2] \in \mathbb{P}^1$ convient.

II - Désingularisation de courbes.

1. On éclate le point $(0, 0)$, on se place dans la carte $(x, u = y/x)$. Les transformées strictes de C_1 et C_2 sont d'équations respectives $u^2 = x^3$ (singulière) et $u^2 = x$ (lisse). On éclate le point $(x, u) = (0, 0)$, on se place dans la carte $(x, v = u/x)$, on constate que C_1' est lisse :

2. Dans la carte (x, v), C_1' est d'équation $v^2 = x$. Ainsi C_1' intersecte le lieu exceptionnel en $p = (0, 0)$ (origine dans la carte (x, v)). Faire des dessins !

3. On a déjà constaté que la transformée de C_2 était lisse après le premier éclatement; de plus dans la carte (x, v) C_2' est d'équation $v^2x = 1$. Ainsi C_1' et C_2' n'ont pas de point commune le long du diviseur exceptionnel, leur point d'intersection proviennent donc des points d'intersection dans $\mathbb{C}^2$ (en plus de l'origine) : $C_1' \cap C_2' = \{(\pm 1, 1), (\pm i, -1)\}$ (4 points).

4. Notons $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$ les transformées strictes de C_1, C_2 après le premier éclatement. On a $C_1.C_2 = \tilde{C}_1.\tilde{C}_2 + 2.2$ (les deux courbes sont de multiplicité 2 en $(0, 0)$), et $\tilde{C}_1.\tilde{C}_2 = C_1'.C_2' - 1.2$. Enfin, $(C_1.C_2)_{(0,0)} = C_1.C_2 - C_1'.C_2' = 6$. Remarquer qu'il n'est pas évident de trouver ce résultat en cherchant à appliquer directement la définition $(C_1.C_2)_{(0,0)} = \dim \mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^3, y^2 - x^5)$.

III - Surfaces de degré 2.

1. $g : [X : Y : Z : W] \in S \dashrightarrow [X : Y : W] \in \mathbb{P}^2$ est une application birationnelle car un inverse est donné par $[X : Y : W] \dashrightarrow [X : Y : \frac{W^2-Y^2}{X} : W]$ (sur l'ouvert $X \neq 0$). g est mal définie en un seul point : $[0 : 0 : 1 : 0]$.
2. $g^{-1} : [X : Y : W] \dashrightarrow [X^2 : XY : W^2 - Y^2 : XW]$ est bien définie en dehors des deux points $[0 : 1 : -1]$ et $[0 : 1 : 1]$.
3. Explicitement on a $f : [X : Y : W] \in \mathbb{P}^2 \dashrightarrow [X : W], [Y : W] \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ et $f^{-1} : [X : T], [Y : S] \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow [XS : YT : ST] \in \mathbb{P}^2$. Soit $\pi_1 : V_1 \to \mathbb{P}^2$ l'éclatement des points $[1 : 0 : 0]$ et $[0 : 1 : 0]$, et $\pi_2 : V_2 \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ l'éclatement du point $[1 : 0], [1 : 0]$. On vérifie que $V_1 = V_2 = V$ (faire un dessin en écrivant explicitement les cartes des éclatements). Ainsi V est l'union disjointe d'un ouvert isomorphe à $\mathbb{C}^2$ est des trois diviseurs exceptionnel des éclatements, qui sont donc chacun d'auto-intersection -1.
4. $[X : T], [Y : S] \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to [XY : \frac{XS+TY}{2} : TS : \frac{XS+TY}{2}] \in S$ convient.
5. Toutes les formes quadratiques sont équivalentes sur $\mathbb{C}$, donc un automorphisme linéaire de $\mathbb{P}^3$ envoie Q sur S, ainsi la question précédente permet d'affirmer que Q est isomorphe à $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

IV - Cubique gauche

1. $P_1 = y - z^2, P_2 = x - yz$ conviennent.
2. $\overline{f} : [T : U] \in \mathbb{P}^1 \to [T^3 : T^2U : TU^2 : U^3] \in \mathbb{P}^3$.
3. $\overline{P_1} = YW - Z^2$ et $\overline{P_2} = XW - YZ$, on remarque que $[1 : 1 : 0 : 0] \in \{\overline{P_1} = \overline{P_2} = 0\}$ alors que $[1 : 0 : 0 : 0]$ est le seul point à l'infini de $\overline{C}$.
4. $P_3 = y^2 - xz$ convient.
5. $\pi(\overline{C})$ est la courbe plane d'équation $y^2 = x^3$, on vérifie que $(0, 0)$ est le seul point singulier (dans une carte centrée au point à l'infini l'équation est de la forme $u = t^3$, donc lisse).

Questions subsidiaires

Voici les questions subsidiaires qui n'ont été abordées par personne; je vous laisse y réfléchir (si vous en trouvez une, rédigez la et rendez la moi - avant le 13 décembre, date du dernier cours)

1. Trouver un exemple d'un diviseur $D \subset X$ et de deux entiers n, m tel que $\phi_{nD}(X)$ et $\phi_{mD}(X)$ soit de dimensions différentes.
2. Comment caractériser les courbes singulières $C \subset \mathbb{C}^2$, tel que C devienne lisse après un seul éclatement ?
3. Est-il vrai que toute courbe lisse $C \subset \mathbb{P}^n$ est isomorphe à une courbe dans $\mathbb{P}^2$? à une courbe dans $\mathbb{P}^3$?