Géométrie affine et euclidienne

1 Formes quadratiques et groupe orthogonal

Soit $\mathbb{K}$ un corps. À moins d'indications contraires on supposera que $car(\mathbb{K}) \neq 2$. On note E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ sur le corps $\mathbb{K}$.

Exercice 1. Déterminer les vecteurs isotropes et les sous-espaces totalement isotropes (i.e $V \subset V^\perp := \{x \in E \,|\, b(x,v) = 0 \;\forall v \in V\}$) des formes :
(i) Sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $q = x_1^2 + x_2^2,\ 3x_1x_2,\ x_1^2 - x_2^2$;
(ii) Sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $q = x_1^2 + x_2^2$;
(iii) Pour $\mathbb{K} = \mathbb{F}_4$ (seulement les vecteurs isotropes) et $\mathbb{K} = \mathbb{F}_9$, $q = x_1^2 + x_2^2$.

Exercice 2. Soit q une forme quadratique sur E et b sa forme bilinéaire symétrique associée.

1. Montrer qu'il existe une base de E, orthogonale pour b et que, dans cette base, on a
$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$$
où $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. De plus, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}^*$ si et seulement si q est non dégénérée. (On pourra raisonner par récurrence).
2. En déduire que sur un corps algébriquement (ou même seulement quadratiquement) clos, les formes quadratiques non-dégénérées sont toutes équivalentes entre elles.
3. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ alors il y a $n+1$ classes d'équivalence de formes quadratiques non-dégénérées (déterminées par les signes des coefficients a_i).
4. *(Plus difficile et hors programme)* Prenons des nombres premiers $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{N}^*$. Sous quelle condition les formes
$$q_1(x) = p_1x_1^2 + p_2x_2^2 \quad \text{et} \quad q_2(x) = p_3x_1^2 + p_4x_2^2$$
sont-elles équivalentes sur $\mathbb{Q}$?

Exercice 3. *Caractérisation des isométries.* Soit q une forme quadratique non-dégénérée et $u : E \to E$ une application qui vérifie :
(i) $u(0) = 0$,
(ii) $\forall x, y \in E$, $q(u(x) - u(y)) = q(x - y)$.
Montrer que $u \in GL(E)$ (elle est linéaire et inversible) et donc $u \in O(q)$. (On pourra utiliser une base orthogonale.)

Exercice 4. *Caractérisation des similitudes.* Soient q et q' deux formes quadratiques non-dégénérées. On désigne par $C(q)$ (resp. $C(q')$) le cône isotrope de q (resp. de q') :
$$C(q) := \{x \in E \,|\, q(x) = 0\}.$$
On suppose que $C(q) = C(q')$.

1. Soit $x_o \in C(q)$ et $x_o \neq 0$. En considérant, parmi les vecteurs $\alpha x_o + x$ pour $x \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, ceux qui sont dans $C(q)$ montrer que l'hyperplan H orthogonal à x_o est le même pour q et q'.
2. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que si $x \notin H$ alors $q'(x) = \lambda q(x)$.
3. Montrer que, pour $x, y \notin H$ on a $b'(x,y) = b(x,y)$.

4. Conclure que $q' = \lambda q$.

Exercice 5. *Théorème de Witt sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, cas non dégénérée.*

Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel de dimension n muni d'une forme quadratique non dégénérée q de forme polaire b. Soit F un sous-espace de E de dimension m tel que q soit non dégénérée sur F. Soit F' un sous-espace isométrique à F (c'est-à-dire qu'il existe un automorphisme orthogonal $\sigma : F \to F'$ relatif à $q_{|F}$ et $q_{|F'}$ ou, de façon équivalente, formes $q_{|F}$ et $q_{|F'}$ sont équivalentes). On veut montrer que $F^\perp$ et $F'^\perp$ sont isométriques.

1. Montrer que $E = F \oplus F^\perp$ et que q est non dégénérée sur $F^\perp$.
2. Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, en déduire que $F^\perp$ et $F'^\perp$ sont isométriques.
3. Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On suppose que la signature de $q_{|F}$ est (r_F, s_F) et que la signature de q est (r, s). Montrer que la signature de $q_{|F^\perp}$ est donnée par $(r - r_F, s - s_F)$. En déduire que $F^\perp$ et $F'^\perp$ sont isométriques.
4. Conclure que l'isomorphisme $\sigma : F \to F'$ est la restriction d'un isomorphisme global de E.

2 Espaces affines

Exercice 6. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine sur un espace vectoriel E.

1. Dans $GA(\mathcal{E})$, quels sont les conjugués d'une translation $t_{\vec{a}}$? Quel est le stabilisateur de $t_{\vec{a}}$?
2. Soit K un sous-groupe de $GA(\mathcal{E})$ contenant le sous-groupe des translations T. Déterminer le centre de K.

Exercice 7. Soient A, B deux points de $\mathcal{E}$ (distincts ou non). On note s_A (resp. s_B) la symétrie affine de centre A (resp. B). Déterminer la composée $s_B \circ s_A$.

Exercice 8. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension finie n.

1. Montrer que $GA(\mathcal{E})$ agit transitivement sur l'ensemble des repères affines.

Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des applications affines satisfaisant $f^2 = f$.

2. Quelle est la nature des éléments de $\mathcal{P}$?
3. Pour tout $g \in GA(\mathcal{E})$ et $f \in \mathcal{P}$, on note $g \cdot f = g \circ f \circ g^{-1}$. Vérifiez que l'on définit ainsi une action sur $\mathcal{P}$. Quel est le nombre d'orbites ? Quelles sont-elles ?

Exercice 9. Soit $\mathcal{E}$ un espaces affine sur un $\mathbb{R}$–espace vectoriel E.

1. Soit $\mathcal{E}'$ un (autre) espace affine sur espace vectoriel E' et $f, g : E \to \mathcal{E}'$ deux applications affines (*i.e.* il y a des applications linéaires $v_f, v_g \in \mathrm{L}(E, E')$ telle que $f(A + \vec{x}) = f(A) + v_f(\vec{x})$ et $g(A + \vec{x}) = g(A) + v_g(\vec{x})$ pour tout $(A, \vec{x}) \in \mathcal{E} \times E$). Montrer que si
$$\{A \in \mathcal{E} \,|\, f(A) = g(A)\}$$
est non vide alors c'est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction $\ker(v_f - v_g)$.
2. Déduire que si f a un point fixe, il est unique si et seulement si $\ker(v_f - \mathrm{id}_E) = \{0\}$.
3. Supposons $\mathcal{E}$ de dimension finie. Montrer que pour que f admette un point fixe unique il faut et il suffit que 1 ne soit pas valeur propre de v_f. (On remarquera que $A + \vec{x}$ est fixé par f si et seulement si $\overrightarrow{Af(A)} = (v_f - \mathrm{id}_E)(\vec{x})$).
4. Conclure que si $v_f = \lambda \mathrm{id}_E$ avec $\lambda \notin \{0, 1\}$ alors f est une homothetie. Déterminer son centre.

Exercice 10. Soit $\mathcal{E}$ un espaces affine sur un $\mathbb{R}$–espace vectoriel E. On note $h(A, k)$ l'homothétie de centre A et rapport k.

1. Étudier la composée de deux isométries $h(A, k)$ et $h(A', k')$. Donner tous les détails. (Considérer les cas $kk' = 1$ et $kk' \neq 1$ séparemment et utiliser les conclusions de l'exercice précédent).
2. Considérer le cas $kk' \neq 1$. Considérer l'application $P \mapsto g(P)$ où $g(P)$ est l'unique point fixe de $h(A, k) \circ h(P, k')$. Montrer que g est affine et la caractériser.
3. Posons $h = h(A, k)$. Déterminer $\{f \circ h \circ f^{-1} \,|\, f \in GA(\mathcal{E})\}$. Quel est le groupe dérivé des homothéties et des translations ?

3 Espaces euclidiens et isométries des solides platoniciens

Exercice 11. On munit l'espace affine euclidien $(E, \mathcal{E})$ d'un repère orthonormé $(A, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$.

1. Montrer que l'application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, définie dans ce repère par

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{où } M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

   est une isométrie affine.
2. Préciser sa décomposition canonique : on pourra commencer par donner les points fixes de l'application linéaire associée. Ensuite, on rappelle que le vecteur de la translation cherchée est donné par la projection orthogonale de $\overrightarrow{Af(A)}$ sur $\ker(f - \mathrm{id}_E)$ (qui est $\ker(f - id_E)^{\perp}$?). Justifier votre réponse finale.
3. En déduire la nature de l'isométrie (donner toutes ses caractéristiques intéressantes).

Exercice 12. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3. Soit f un endomorphisme antisymétrique, c'est-à-dire que $(f(x), y) = -(x, f(y))$ pour tout $x, y \in E$.

1. Démontrer que $\mathrm{Im} f = (\ker f)^{\perp}$.
2. Démontrer que f est de rang pair.
3. Démontrer qu'il existe un unique $a \in E$ tel que : $\forall x \in E,\ f(x) = a \wedge x$.

Exercice 13. En considérant le tétraèdre et son groupe d'isométries, montrer qu'il y a un morphisme surjectif de S_4 dans S_3.

Exercice 14. En considérant le cube et son groupe d'isométries directes, montrer qu'il n'y a que 3 sous-groupes distincts d'ordre 8 dans S_4.

Exercice 15. Combien y a t-il de sous-groupes distincts

1. d'ordre 3 dans A_4 ? (Tétraèdre)
2. d'ordre 3 dans S_4 ? (Cube ou octaèdre)
3. d'ordre 5 dans A_5 ? (Icosaèdre)

Exercice 16. Groupes d'isométries des quadrilatères

1. Pourquoi est-il évident *a priori* que tous les carrés ont des groupes d'isométries isomorphes ?
2. Pourquoi il n'est pas clair *a priori* que tous les rectangles ont des groupes d'isométries isomorphes ?
3. Pourquoi peut-on affirmer *a priori* que les groupes d'isométries des rectangles, parallelogrammes et losanges sont des sous-groupes d'isométries du carré ?

Exercice 17. Soit X un solide platonicien, on note S son nombre de sommets, A son nombre d'arrêtes, F son nombre de faces et $\{p, q\}$ son symbole de Schläfli. On considère son groupe d'isométries directes $\mathrm{Is}^+(X)$. Expliquer les relations suivantes :

1. $|\mathrm{Is}^+(X)| = Sq$;
2. $|\mathrm{Is}^+(X)| = Fp$;
3. $|\mathrm{Is}^+(X)| = 2A$.