Préparation à l'Agrégation
Université Paul Sabatier

Décembre 2019

Examen "Algèbre bilinéaire"

Durée: 2 heures

Documents, calculatrices et téléphones interdits. Justifiez toutes vos réponses.

I - Forme quadratique sur les matrices 2×2

On note E l'espace vectoriel des matrices réelles de taille 2×2. Pour toute matrice $A \in E$ on pose

$$q(A) = \operatorname{tr}(A^2).$$

1. Montrer que q est une forme quadratique sur E, et déterminer sa forme polaire (en cherchant à minimiser les calculs...).

   Solution. (**1.5 points**)
   q est une forme quadratique car $q(A) = b(A, A)$ où $b : (A, B) \mapsto \operatorname{tr}(AB)$ est bilinéaire. Soit on justifie que b est symétrique en rappellant que même si $AB \neq BA$, on a toujours $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, soit on trouve une expression plus symétrique à l'aide de la relation $b(A, B) = \frac{1}{4}(q(A+B) - q(A-B))$, pour obtenir

$$b(A, B) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(AB) + \frac{1}{2}\operatorname{tr}(BA).$$

2. Exprimer q dans la base canonique de E, donner une décomposition de Gauss de q, et en déduire sa signature.

   Solution. (**1.5 points**)
   Si on écrit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on a $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & \dots \\ \dots & cb + d^2 \end{pmatrix}$ donc $q(A) = a^2 + 2bc + d^2$.
   Une décomposition de Gauss est

$$q(A) = a^2 + \frac{1}{2}(b+c)^2 - \frac{1}{2}(b-c)^2 + d^2.$$

   La signature de q est $(3, 1)$.

3. À l'aide de la formule de Cayley-Hamilton, pour tout $A \in E$ exprimer A^2 en fonction de A, $\operatorname{tr}(A)$ et $\det(A)$.

   Solution. (**1 point**)
   Le polynôme caractéristique de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est

$$P_A(X) = X^2 - (a+d)X + ad - bc = X^2 - \operatorname{tr}(A)X - \det(A).$$

   En appliquant la formule de Cayley-Hamilton $P_A(A) = 0$, on trouve

$$A^2 = (\operatorname{tr} A)A - (\det A)I_2$$

On considère maintenant le sous-espace $F \subset E$ des matrices de trace nulle.

4. Montrer que pour tout $A \in F$ on a $q(A) = -2\det(A)$.

   Solution. (**1 point**)
   Par la question précédente pour $A \in F$ on a $A^2 = -(\det A)I_2$, et donc $q(A) = \operatorname{tr}(A^2) = -2\det(A)$.

5. Donner la signature et déterminer une base orthogonale pour la restriction $q|_F$.

   SOLUTION. (**2 points**)
   Si on écrit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ *on obtient* $\det A = -a^2 - bc$*, donc* $q(A) = -2\det(A) = 2a^2 + 2bc = 2a^2 + \frac{1}{2}(b+c)^2 - \frac{1}{2}(b-c)^2$ *et* q *est de signature* $(2,1)$.
   Une base orthogonale (obtenue en prenant la base duale des formes linéaires de la décomposition) est
   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

II - Prolongement d'isométrie

Soit E un espace vectoriel, q une forme quadratique sur E, et $F \subseteq E$ un sous-espace vectoriel. Pour les deux premières questions on attend que vous rappeliez sans justification le résultat du cours qui donne une condition suffisante, et que vous justifiez en une phrase pourquoi elle est nécessaire.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (E, q) pour que $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$, pour tout choix de sous-espace F.

   SOLUTION. (**1.5 points**)
   La CNS est que q *soit non dégénérée.*
   Si q *est non dégénérée, alors on a vu en cours que* $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$.
   Si q *est dégénérée, on peut prendre* $F = E$*, alors* $F^\perp = \ker q \supsetneq \{0\}$.

2. Sans hypothèse particulière sur (E, q), donner une condition nécessaire et suffisante sur F pour que $E = F \oplus F^\perp$.

   SOLUTION. (**1.5 points**)
   La CNS est que F *soit régulier.*
   Si F *est régulier, c'est-à-dire* $q|_F$ *non dégénérée, alors on a vu en cours que* $E = F \oplus F^\perp$.
   Si F *est singulier, on a* $F \cap F^\perp \supsetneq \{0\}$*, et donc* F *et* $F^\perp$ *ne peuvent pas être en somme directe.*

On considère maintenant $\mathbb{R}^3$ muni de la forme quadratique standard q de signature $(2,1)$, c'est-à-dire

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2.$$

3. Donner un exemple de sous-espace $F \subset \mathbb{R}^3$ tel que $\mathbb{R}^3$ ne soit pas la somme directe de F et $F^\perp$.

   SOLUTION. (**1 point**)
   On prend F *une droite engendrée par un vecteur isotrope* v*, par exemple* $v = (1,0,1)$*. Alors* $F \subset F^\perp$*, ce qui interdit que* F *et* $F^\perp$ *soient en somme directe.*

On rappelle que $P \subset \mathbb{R}^3$ est un *plan hyperbolique* si P est un sous-espace de dimension 2 tel que la forme $q|_P$ soit de signature $(1,1)$.

4. Donner un exemple de deux plans hyperboliques distincts dans $\mathbb{R}^3$.

   SOLUTION. (**1 point**)
   On peut prendre les plans $P_1 = \mathrm{vect}(e_1, e_3)$ *et* $P_2 = \mathrm{vect}(e_2, e_3)$.

5. Pour un plan hyperbolique $P \subset \mathbb{R}^3$, a-t-on toujours $\mathbb{R}^3 = P \oplus P^\perp$?

   SOLUTION. (**1 point**)
   Oui, toujours. De manière générale (question 2), si $F \subset E$ *est un sous-espace régulier, c'est à dire tel que* $q|_F$ *est non dégénérée, alors* $F \cap F^\perp = \{0\}$ *et donc* F *et* $F^\perp$ *qui sont de dimensions supplémentaires sont en somme directe. Le cas d'un plan hyperbolique dans* $\mathbb{R}^3$*, avec* $\mathbb{R}^3$ *muni d'une forme de signature* $(2,1)$*, est un cas particulier de ce fait général.*

6. Si $P, P' \subset \mathbb{R}^3$ sont deux plans hyperboliques, montrer qu'il existe une isométrie de $(\mathbb{R}^3, q)$, c'est-à-dire un élément de $\mathrm{O}(q)$, qui envoie P sur P'. (On pourra construire des bases de $\mathbb{R}^3$ dans lesquelles la matrice de l'isométrie s'écrit simplement).

   Solution. (**2 points**)
   Par la question précédente, $\mathbb{R}^3 = P \oplus P^\perp = P' \oplus P'^\perp$. Comme $q|_P$ est de signature $(1,1)$, on en déduit que $q|_{P^\perp}$ est de signature $(1,0)$, et idem pour $q|_{P'^\perp}$. Ainsi les plans P et P' d'une part, et les droites $P^\perp$ et $P'^\perp$ d'autre part, sont isométriques, et en choisissant des isométries $P \to P'$ et $P^\perp \to P'^\perp$ on construit une isométrie $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

   Concrètement on peut choisir v_1, v_2 une base de P, et v_1', v_2' une base de P', de façon à avoir $b(v_1, v_2) = b(v_1', v_2') = 1$ et $b(v_i, v_i) = b(v_i', v_i') = 0$. Puis on choisit v_3, v_3' des générateurs respectifs de $P^\perp$ et $P'^\perp$ avec $q(v_3) = q(v_3') = 1$, c'est possible car on sait que la signature est $(2,1)$ et que la signature d'un plan hyperbolique est $(1,1)$, donc la signature sur $P^\perp$ et $P'^\perp$ est $(1,0)$. Ainsi (v_i), (v_i') sont des bases de $\mathbb{R}^3$, et l'application qui envoie v_i sur v_i' pour $i = 1,2,3$ est l'isométrie cherchée.

III - Quizz

Pour chaque question on attend que vous justifiez votre "vrai ou faux" par un court argument ou un contre-exemple, suivant les cas.

1. Les formes quadratiques sur $\mathbb{R}^2$ données dans la base canonique par $q_1(x,y) = x^2 + y^2$ et $q_2(x,y) = -x^2 - 2y^2$ ont même discriminant : vrai ou faux ?

   Solution. (**1 point**)
   C'est vrai, les déterminants 1 et 2 sont bien de même signe, autrement dit sont égaux comme éléments de $\mathbb{R}^*/(\mathbb{R}^*)^2$.

2. Deux rotations de $\mathbb{R}^3$ de même angle θ sont conjuguées dans le groupe $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$: vrai ou faux ?

   Solution. (**1 point**)
   C'est vrai, pour trouver la conjugante on commence par envoyer l'axe de la première rotation sur l'axe de la seconde (les rotations agissent transitivement sur les droites de $\mathbb{R}^3$, en fait on peut utiliser le renversement par rapport à la bissectrice des deux axes), puis si les rotations sont en sens contraire on compose encore par un renversement qui retourne l'axe.

3. Étant donné un sous-espace vectoriel $F \subseteq \mathbb{R}^n$, il existe un élément de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ dont l'ensemble des points fixes est égal à F : vrai ou faux ?

   Solution. (**1 point**)
   C'est vrai: si F est de codimension d, il suffit de prendre d hyperplans dont l'intersection donne F, et de considérer la composition des symétries orthogonales par rapport à ces hyperplans.

   Autre façon de dire: prendre une base orthonormale de F : $e_1, \dots, e_{n-d}$, compléter en une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, et prendre l'isométrie de matrice dans cette base

$$\begin{pmatrix} I_{n-d} & 0 \\ 0 & -I_d \end{pmatrix}$$

4. Sur $\mathbb{C}^n$ il existe une forme quadratique q tel que $q(v) = 0$ implique $v = 0$: vrai ou faux ?

   Solution. (**1 point**)
   C'est faux, sauf si $n \leq 1$. En effet si v, w sont deux vecteurs indépendants avec $a = q(v), b = u(v,w), c = q(w)$ (où u est la forme polaire de q), si a ou c est nul c'est déjà un contre-exemple, et sinon en prenant λ une racine du polynôme $aX^2 + 2bX + c$ on constate que $q(\lambda v + w) = 0$, alors que $\lambda v + w \neq 0$.

5. Il existe quatre formes quadratiques non dégénérées et non congruentes sur $\mathbb{Q}^2$: vrai ou faux ?

   Solution. (**1 point**)
   C'est vrai, il en existe 4, et il en existe même une infinité (l'énoncé ne disait pas "exactement"

4 !), car il y a une infinité de discriminants disponibles en plus de 1 *(représentés par les nombres premiers): on peut prendre par exemple*

$$\begin{aligned} q_1(x,y) &= x^2 + y^2 \\ q_2(x,y) &= x^2 + 2y^2 \\ q_3(x,y) &= x^2 + 3y^2 \\ q_4(x,y) &= x^2 + 5y^2 \end{aligned}$$