Préparation à l'Agrégation
Université Paul Sabatier

Décembre 2019

Examen "Algèbre bilinéaire"

Durée: 2 heures

Documents, calculatrices et téléphones interdits. Justifiez toutes vos réponses.

I - Forme quadratique sur les matrices 2×2

On note E l'espace vectoriel des matrices réelles de taille 2×2. Pour toute matrice $A \in E$ on pose

$$q(A) = \mathrm{tr}(A^2).$$

1. Montrer que q est une forme quadratique sur E, et déterminer sa forme polaire (en cherchant à minimiser les calculs...).
2. Exprimer q dans la base canonique de E, donner une décomposition de Gauss de q, et en déduire sa signature.
3. À l'aide de la formule de Cayley-Hamilton, pour tout $A \in E$ exprimer A^2 en fonction de A, $\mathrm{tr}(A)$ et $\det(A)$.

On considère maintenant le sous-espace $F \subset E$ des matrices de trace nulle.

4. Montrer que pour tout $A \in F$ on a $q(A) = -2\det(A)$.
5. Donner la signature et déterminer une base orthogonale pour la restriction $q|_F$.

II - Prolongement d'isométrie

Soit E un espace vectoriel, q une forme quadratique sur E, et $F \subseteq E$ un sous-espace vectoriel. Pour les deux premières questions on attend que vous rappeliez sans justification le résultat du cours qui donne une condition suffisante, et que vous justifiez en une phrase pourquoi elle est nécessaire.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (E, q) pour que $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$, pour tout choix de sous-espace F.
2. Sans hypothèse particulière sur (E, q), donner une condition nécessaire et suffisante sur F pour que $E = F \oplus F^\perp$.

On considère maintenant $\mathbb{R}^3$ muni de la forme quadratique standard q de signature $(2, 1)$, c'est-à-dire

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2.$$

3. Donner un exemple de sous-espace $F \subset \mathbb{R}^3$ tel que $\mathbb{R}^3$ ne soit pas la somme directe de F et $F^\perp$.

On rappelle que $P \subset \mathbb{R}^3$ est un *plan hyperbolique* si P est un sous-espace de dimension 2 tel que la forme $q|_P$ soit de signature $(1, 1)$.

4. Donner un exemple de deux plans hyperboliques distincts dans $\mathbb{R}^3$.
5. Pour un plan hyperbolique $P \subset \mathbb{R}^3$, a-t-on toujours $\mathbb{R}^3 = P \oplus P^\perp$?
6. Si $P, P' \subset \mathbb{R}^3$ sont deux plans hyperboliques, montrer qu'il existe une isométrie de $(\mathbb{R}^3, q)$, c'est-à-dire un élément de $\mathrm{O}(q)$, qui envoie P sur P'. (On pourra construire des bases de $\mathbb{R}^3$ dans lesquelles la matrice de l'isométrie s'écrit simplement).

TSVP⟹

III - Quizz

Pour chaque question on attend que vous justifiez votre “vrai ou faux” par un court argument ou un contre-exemple, suivant les cas.

1. Les formes quadratiques sur $\mathbb{R}^2$ données dans la base canonique par $q_1(x,y) = x^2 + y^2$ et $q_2(x,y) = -x^2 - 2y^2$ ont même discriminant : vrai ou faux ?
2. Deux rotations de $\mathbb{R}^3$ de même angle θ sont conjuguées dans le groupe $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$: vrai ou faux ?
3. Étant donné un sous-espace vectoriel $F \subseteq \mathbb{R}^n$, il existe un élément de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ dont l'ensemble des points fixes est égal à F : vrai ou faux ?
4. Sur $\mathbb{C}^n$ il existe une forme quadratique q tel que $q(v) = 0$ implique $v = 0$: vrai ou faux ?
5. Il existe quatre formes quadratiques non dégénérées et non congruentes sur $\mathbb{Q}^2$: vrai ou faux ?