

Examen "Géométrie"

Durée: 2 heures

Documents, calculatrices et téléphones interdits. Justifiez toutes vos réponses.

I - Un prolongement d'isométrie

On considère $\mathbb{R}^4$ muni de la forme quadratique standard q de signature $(3,1)$, c'est-à-dire

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2.$$

1. Donner un exemple de sous-espace $F \subset \mathbb{R}^4$ tel que $\mathbb{R}^4$ ne soit pas la somme directe de F et $F^\perp$.

   Solution. (**2 points**)
   On peut prendre F une droite engendrée par un vecteur isotrope v, par exemple $v = (1,0,0,1)$. Alors $F \subset F^\perp$, ce qui interdit que F et $F^\perp$ soient en somme directe.

2. On dit que $P \subset \mathbb{R}^4$ est un *plan hyperbolique* si P est un sous-espace de dimension 2 tel que la forme $q|_P$ soit de signature $(1,1)$. Pour un tel plan hyperbolique, a-t-on $\mathbb{R}^4 = P \oplus P^\perp$?

   Solution. (**2 points**)
   De manière générale, si $F \subset E$ est un sous-espace régulier, c'est à dire tel que $q|_F$ est non dégénérée, alors $F \cap F^\perp = \{0\}$ et donc F et $F^\perp$ qui sont de dimensions supplémentaires sont en somme directe. Le cas d'un plan hyperbolique dans $\mathbb{R}^4$ muni d'une forme de signature $(3,1)$ est un cas particulier de ce fait général.

3. Si $P, P' \subset \mathbb{R}^4$ sont deux plans hyperboliques, montrer qu'il existe une isométrie de $(\mathbb{R}^4, q)$ qui envoie P sur P'.

   Solution. (**2 points**)
   Par la question précédente, $\mathbb{R}^4 = P \oplus P^\perp = P' \oplus P'^\perp$. Comme $q|_P$ est de signature $(1,1)$, on en déduit que $q|_{P^\perp}$ est de signature $(2,0)$, et idem pour $q|_{P'^\perp}$. Ainsi P et P' d'une part, et $P^\perp$ et $P'^\perp$ d'autre part, sont isométriques, et en choisissant des isométries $P \to P'$ et $P^\perp \to P'^\perp$ on construit une isométrie $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ diagonale par blocs 2×2.

II - Isométries du plan affine euclidien

On travaille dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure affine canonique. Les trois questions sont indépendantes.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante (et une courte preuve) pour que la composée de deux rotations de $\mathbb{R}^2$ soit une translation.

   Solution. (**2 points**)
   Si $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une isométrie affine préservant l'orientation de partie linaire v_f, alors f est une translation ssi $v_f = id$, et f est une rotation non triviale (de centre arbitraire) ssi $v_f \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est une rotation vectorielle non triviale. Comme $v_{f \circ g} = v_f \circ v_g$, la condition nécessaire et suffisante attendue est $v_f = v_g^{-1}$, autrement dit les rotations f et g doivent avoir des angles opposés.

2. Donner l'expression en coordonnées de la symétrie orthogonale f par rapport à la droite affine $\mathcal{D}$ passant par $(2,0)$ et de direction orthogonale au vecteur $\overrightarrow{x} = (2,1)$.

   Solution. (**2 points**)
   La symétrie v_f est donnée par

$$v_f(\overrightarrow{y}) = \overrightarrow{y} - 2\frac{\langle \overrightarrow{y}, \overrightarrow{x} \rangle}{\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{x} \rangle}\overrightarrow{x}.$$

Donc si $\overrightarrow{y} = (a, b)$, on trouve $v_f(a, b) = \frac{1}{5}(-3a - 4b, -4a + 3b)$. La symétrie cherchée s'obtient en translatant les points fixes par conjugaison par une translation :

$$\begin{aligned} f(a, b) &= (a + 2, b) \circ v_f \circ (a - 2, b) \\ &= (a + 2, b) \circ \frac{1}{5}(-3a - 4b + 6, -4a + 3b + 8) \\ &= \frac{1}{5}(-3a - 4b + 16, -4a + 3b + 8) \end{aligned}$$

3. Quels sont les sous-groupes du groupe affine $\mathrm{GA}(\mathbb{R}^2)$ qui peuvent apparaître comme groupe d'isométries préservant un quadrilatère convexe ? (*on demande une liste complète à isomorphisme près, avec justification*).

   SOLUTION. (**2 points**)
   Les sommets du quadrilatère doivent être permutés en préservant la relation "être relié par une arête", cela donne 8 permutations possibles qui sont toutes réalisées dans le cas d'un carré (groupe diédral D_4). Les autres groupes possibles sont donc des sous-groupes de D_4, d'ordre $4, 2$ ou 1 par Lagrange.

   Parmi les groupes d'ordre 4, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ n'est pas possible (un quadrilatère préservé par une rotation d'un quart de tour a tous ses angles égaux, et tous ses côtés de même longueur, c'est donc un carré, dont le groupe des isométries est strictement plus grand que $\mathbb{Z}/4$). Par contre le groupe $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ est réalisé par un rectangle non carré (ou un losange non carré).

   Le groupe $\mathbb{Z}/2$ est réalisé par un trapèze isocèle, qui admet un unique axe de symétrie.

   Le groupe trivial est réalisé par un quadrilatère quelconque.

III - Isométries préservant un tétraèdre

Soit $\mathcal{T}$ un tétraèdre régulier, et $\mathrm{Isom}(\mathcal{T}) \subset \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ son groupe d'isométrie, dont on rappelle qu'il est isomorphe à S_4. Les trois questions sont indépendantes.

1. Quelle est la forme normale (matrice diagonale par blocs de taille 1 ou 2) d'une isométrie d'ordre 4 dans $\mathrm{Isom}(\mathcal{T})$?

   SOLUTION. (**2 points**)
   La forme normale générale d'une isométrie de $\mathbb{R}^n$ est une matrice diagonale par bloc avec des 1, des -1 ou des blocs 2×2 de matrices de rotation.

   Ici en dimension 3, pour obtenir un élément d'ordre 4 il faut un bloc correspondant à une rotation d'ordre 4 (donc d'angle $\theta = \pm\pi/2$), et de plus un déterminant -1 car le sous-groupe des rotations préservant un tétraèdre est isomorphe à A_4 qui ne contient pas d'élément d'ordre 4. Finalement la matrice attendue est
   $$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   (elle est conjuguée à son inverse)

2. Donner une description géométrique d'un morphisme surjectif de $\mathrm{Isom}(\mathcal{T})$ vers le groupe symétrique S_3.

   SOLUTION. (**2 points**)
   On fait agir $\mathrm{Isom}(\mathcal{T})$ sur les 3 axes D_1, D_2, D_3 passant par des milieux d'arêtes opposées. Ceci donne le morphisme attendu, explicitement:

   $$\phi \in \mathrm{Isom}(\mathcal{T}) \mapsto \sigma \in S_3$$

   tel que $\phi(D_i) = D_{\sigma(i)}$ pour $i = 1, 2, 3$. Le morphisme est surjectif car on peut obtenir chaque transposition, qui engendrent S_3.

3. Donner géométriquement (dessin apprécié !) une description des sous-groupes d'ordre 8 dans $\mathrm{Isom}(\mathcal{T})$, et retrouver ainsi leur nombre.

 Solution. (**2 points**)
 On prend 2 paires d'arêtes opposées (trois choix possibles), et on considère le carré reliant leurs milieux. Alors le sous-groupe de $\mathrm{Isom}(\mathcal{T})$ *préservant ce carré est d'ordre 8, isomorphe au groupe diédral D_4. Il y a donc trois tels sous-groupes d'ordre 8.*

IV - Plan régulier

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique $\neq 2$, P un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 muni d'une forme quadratique q non dégénérée, et $\mathrm{O}(q)$ le groupe orthogonal associé.

1. Soit $u \in \mathrm{O}(q)$. Si $x \in P$ est non nul et non isotrope, montrer qu'il existe une réflexion orthogonale τ tel que $\tau \circ u(x) = x$ ou $-x$.

 Solution. (**2 points**)
 Si $u(x) = x$, on peut prendre τ la réflexion othogonale par rapport au plan $x^{\perp}$ pour obtenir $\tau \circ u(x) = -x$.

 Sinon, notons $y = u(x) \neq x$. L'un des deux vecteurs $x + y$ ou $x - y$ est non isotrope, et on peut considérer τ la symétrie orthogonale associée. Si $\tau = \tau_{x+y}$, alors $\tau \circ u(x) = \tau(y) = x$, et si $\tau = \tau_{x-y}$, $\tau \circ u(x) = \tau(y) = -x$.

2. En déduire que si $u \in \mathrm{O}(q)$ est de déterminant -1, alors u est une réflexion orthogonale.

 Solution. (**2 points**)
 Soit x un vecteur non isotrope pour q. Par la question précédente on peut trouver une réflexion τ telle que $\tau \circ u(x) = \pm x$, c'est-à-dire un vecteur propre de valeur propre ± 1 pour $\tau \circ u$. Comme $\det \tau \circ u = 1$*, cette valeur propre est double, et l'orthogonal au vecteur non isotrope x est une autre droite propre. Ainsi $\tau \circ u = \pm id$, donc $u = \pm \tau$, et comme on est en dimension 2, l'isométrie $-\tau$ est encore une réflexion orthogonale.*

3. Montrer que tout $u \in \mathrm{SO}(q)$ est un produit de deux réflexions orthogonales.

 Solution. (**2 points**)
 On prend τ_1 n'importe quelle réflexion orthogonale, et on applique le résultat précédent à $u \circ \tau_1$ pour conclure que $u \circ \tau_1 = \tau_2$ est une réflexion orthogonale. Finalement $u = \tau_2 \circ \tau_1$ comme attendu.