Préparation à l'Agrégation
Université Paul Sabatier

18 novembre 2016

# Examen "Groupes"

Durée: 2 heures

*Documents, calculatrices et téléphones interdits.*

Les dix questions sont indépendantes.
J'attends une rédaction précise et concise, avec néanmoins des phrases complètes en français. Beaucoup des questions ont été abordées en cours ou en TD, j'attends que vous redonniez les arguments clés. Vous devriez consacrer environ 10 minutes et une demi-page à chaque question.
L'usage des théorèmes de Sylow est interdit, *sauf* pour la question 10.

1. Considérons les deux éléments suivants du groupe symétrique $S_9$ :

$$\sigma_1 = (1\,2)(3\,4\,5)(6\,7\,8\,9) \quad \text{et} \quad \sigma_2 = (1\,2\,3\,4)(5\,6\,7)(8\,9).$$

   Justifier pourquoi $\sigma_1$ et $\sigma_2$ sont conjugués, puis exhiber une permutation $\omega \in S_9$ telle que $\sigma_2 = \omega\sigma_1\omega^{-1}$. Quel est le cardinal (une expression sous forme de produit d'entiers me suffit) de la classe de conjugaison de $\sigma_1$ dans $S_9$ ?

2. Soit $G = (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*$ le groupe multiplicatif des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Rappeler les résultats du cours qui permettent de prédire *a priori* d'une part que $G$ est cyclique, et d'autre part le nombre d'éléments dans $G$ qui peuvent être choisis comme générateur. Expliciter ensuite la liste des éléments $g \in G$ tel que $G = \langle g \rangle$.

3. Dans les groupes suivants, donner un exemple d'élément d'ordre 4 s'il en existe, ou sinon donner un argument pour justifier qu'il n'y en a pas :
   (a) Le groupe linéaire $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$;
   (b) Le groupe alterné $A_8$;
   (c) Le groupe $\mathrm{Isom}^+(T) \subset \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ des rotations de $\mathbb{R}^3$ préservant un tétraèdre régulier $T$.
   (d) Un groupe d'ordre 16 quelconque (ici il s'agit de décider si *tout* groupe d'ordre 16 admet un élément d'ordre 4).

4. Montrer que le groupe $\mathrm{Isom}(C)$ des isométries de $\mathbb{R}^3$ préservant un cube $C$ peut s'écrire comme un produit direct de deux sous-groupes isomorphes respectivement à $S_4$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Montrer ensuite que $\mathrm{Isom}(C)$ peut s'écrire comme un produit semi-direct (mais non direct) de deux sous-groupes isomorphes eux aussi à $S_4$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

5. Notons $G = \mathrm{Isom}^+(T)$ le groupe des rotations de $\mathbb{R}^3$ préservant un tétraèdre régulier $T$. Décrire géométriquement les éléments d'ordre 3 dans $G$, en déduire leur nombre, puis justifier (toujours géométriquement, c'est-à-dire, sans utiliser l'isomorphisme $\mathrm{Isom}^+(T) \simeq A_4$) qu'il existe deux éléments d'ordre 3 non conjugués dans $G$.

6. Donner la liste des groupes abéliens d'ordre 36 à isomorphisme près, et justifier que la liste est complète en énonçant précisément le théorème de classification que vous utilisez.

7. Montrer de façon élémentaire (aucun argument sophistiqué au-delà du théorème de Lagrange) que tout groupe d'ordre 6 non cyclique est isomorphe au groupe symétrique $S_3$.

8. Montrer que le groupe symétrique $S_3$ est isomorphe à son groupe d'automorphisme $\mathrm{Aut}(S_3)$.

9. Soit $p$ premier et $a \geq 1$. En utilisant une action de groupe que l'on précisera, montrer que tout groupe $G$ d'ordre $p^a$ admet un élément central (c'est-à-dire commutant avec tout élément de $G$) d'ordre $p$.

10. Montrer qu'il n'existe qu'un seul groupe d'ordre 35 à isomorphisme près.