Préparation à l'Agrégation
Université Paul Sabatier

novembre 2015

Examen "Groupes"

Durée: 2 heures

Documents, calculatrices et téléphones interdits.

I - Une action de groupe.

Soit G un groupe fini non trivial, et soit p le plus petit facteur premier de $|G|$. On veut montrer que tout sous-groupe H d'indice p de G est distingué.

1. Montrer que l'application $(g, xH) \in G \times G/H \mapsto gxH \in G/H$ définit une action de G sur l'ensemble G/H des classes à gauche modulo H, et calculer le stabilisateur de $xH \in G/H$.
2. Montrer que cette action induit un morphisme de groupe $\varphi : G \to S_p$ de G dans le groupe symétrique S_p. Le morphisme φ peut-il être le morphisme trivial ?
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi) \subset G$ est d'indice p.
4. Conclure.
5. (Question bonus, mais pas forcément plus dure !) Pouvez-vous proposer une preuve directe plus simple dans le cas $p = 2$?

II - Groupes d'ordre 12.

Les groupes abéliens.

1. Donner la liste des groupes abéliens d'ordre 12 à isomorphisme près, en justifiant (une phrase) que votre liste est complète et non redondante.

Le groupe alterné.

2. Donner la liste des sous-groupes distingués du groupe alterné A_4, de nouveau en justifiant rapidement que votre liste est complète et non redondante.
3. Montrer que A_4 n'admet aucun sous-groupe d'ordre 6.
4. Montrer que A_4 peut s'écrire comme un produit semi-direct, qui est non direct.

Le groupe diédral.

5. Donner la liste des classes de conjugaison des éléments d'ordre 2 dans le groupe diédral D_6 (défini comme le groupe des isométries du plan préservant un hexagone régulier).
6. Montrer que D_6 est un produit direct de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et du groupe symétrique S_3.
7. Montrer que D_6 peut aussi s'écrire comme un produit semi-direct (mais non direct) de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Un troisième larron.

8. Montrer que le sous-groupe G de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ engendré par les matrices $I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}$ est d'ordre 12 (où on a noté $j = e^{2i\pi/3}$).
9. Montrer que les groupes G, A_4 et D_6 sont deux à deux non isomorphes.

TSVP$\Longrightarrow$

III - Quizz.

Répondre de façon argumentée mais néanmoins concise à chacune des questions suivantes.

1. Les permutations $\sigma_1 = (123)\circ(215)$ et $\sigma_2 = (542)$ sont-elles conjuguées dans le groupe symétrique S_5 ? (Si oui, expliciter $\alpha \in S_5$ tel que $\sigma_2 = \alpha\sigma_1\alpha^{-1}$, et si non, donner un court argument).
2. Donner la liste des classes de conjugaison du groupe alterné A_5, en précisant pour chacune leur cardinal.
3. Le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^*$ est-il cyclique ? (Si oui, donner un générateur, et si non, donner un court argument).
4. Montrer que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ est isomorphe à S_3.
5. Quel est le cardinal de $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$? Et le cardinal de $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_4)$?
6. Pour tout groupe fini G, le cardinal de G est supérieur ou égal au cardinal de $\mathrm{Aut}(G)$: vrai ou faux ? (Si oui, donner un court argument, et si non, donner un contre-exemple).
7. Si on identifie le groupe S_4 avec les isométries directes de $\mathbb{R}^3$ préservant un cube, comment caractériser géométriquement le sous-groupe alterné A_4 ?
8. Quel est l'ordre maximal d'une permutation dans S_{10} ?