

GÉOMÉTRIE

STÉPHANE LAMY

TABLE DES MATIÈRES

1. Groupe orthogonal, cas général	1
2. Intermède : Espaces affines, généralités	6
3. Espaces euclidiens	9
4. Digression : les cinq solides platoniciens	13
5. Sous-groupes finis de $SO_3(\mathbb{R})$	16
6. Barycentres en géométrie affine	18
7. Convexité, généralités	20
8. Retour sur les polyèdres convexes	23
9. Bonus : deux théorèmes classiques (Carathéodory et Helly)	25
10. Un peu de géométrie plane	27
11. Repère affine et coordonnées barycentriques dans le plan	29
12. Coniques affines	32
13. ...et en bonus, le cosinus...	34
Références	37

Quelques sources :

- [Per96], chapitre V, VI et VIII.
- [Com98], chapitres 6, 7 et 8.
- [CG13], chapitres V, XI et XII.
- [Szp09], chapitre 4.

1. GROUPE ORTHOGONAL, CAS GÉNÉRAL

[Per96, p.123-126]

Soit \mathbf{k} un corps de caractéristique différente de 2, E un \mathbf{k} -espace vectoriel de dimension n , q une forme quadratique non dégénérée sur E , et b sa forme polaire.

Rappel. Un vecteur $x \in E$ est **isotrope** si $q(x) = 0$. Un sous-espace vectoriel $F \subseteq E$ est **régulier** (resp. **singulier**) si $q|_F$ est non-dégénérée (resp. dégénérée), ce qui revient à dire $F \cap F^\perp = \{0\}$ (resp. $F \cap F^\perp \supsetneq \{0\}$). F est dit **totalelement singulier** (ou **totalelement isotrope**) si tous les vecteurs de F sont isotropes, ce qui revient à dire que $q|_F$ est la forme quadratique nulle, ou encore $F \subseteq F^\perp$.

Remarque. Certains auteurs disent non-isotrope/isotrope au lieu de régulier/singulier, par exemple [Per96, p. 123].

Lemme 1. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

Date: 1^{er} novembre 2019.

(1) u préserve la forme quadratique q :

$$\forall x \in E, q(u(x)) = q(x).$$

(2) u préserve la forme bilinéaire b :

$$\forall x, y \in E, b(u(x), u(y)) = b(x, y).$$

De plus tout endomorphisme u vérifiant ces propriétés est inversible.

Preuve. Le sens (2) \implies (1) est clair, et la réciproque suit de l'égalité suivante, qui utilise l'hypothèse car $\mathbf{k} \neq 2$:

$$b(x, y) = \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y)).$$

Si $x \in \ker u$, pour tout $y \in E$ on a $b(x, y) = b(u(x), u(y)) = b(0, u(y)) = 0$, et comme q et non dégénérée on obtient $x = 0$. \square

Définition. On appelle **groupe orthogonal** associé à q , noté $O(q)$, le sous-groupe des $u \in GL(E)$ préservant la forme quadratique q . Matriciellement, si dans une base donnée q a pour matrice symétrique A et u a pour matrice M , on a

$$u \in O(q) \iff M^t A M = A.$$

(car on doit avoir $x^t M^t A M y = x^t A y$ pour tous $x, y \in E$, en particulier pour tout couple de vecteurs de base). Le groupe spécial orthogonal $SO(q)$ est le sous-groupe de $O(q)$ des isométries de déterminant 1.

Remarque. (1) Les seules homothéties dans $O(q)$ sont $\pm \text{id}$:

$$q(\lambda x) = q(x) \iff \lambda^2 = 1.$$

(2) Tout élément $u \in O(q)$ est de déterminant ± 1 :

$$\det(M^t A M) = \det A \implies (\det M)^2 = 1.$$

Lemme 2. Si $u \in O(q)$ et $F \subseteq E$ est un sous-espace vectoriel, alors $u(F^\perp) = u(F)^\perp$. En particulier si F est stable par u , alors F^\perp est aussi stable par u .

Preuve. Pour tous $x \in F$, $y \in F^\perp$ on a

$$0 = b(x, y) = b(u(x), u(y)).$$

Cela implique $u(F^\perp) \subseteq u(F)^\perp$. De plus on a égalité des dimensions :

$$\dim u(F^\perp) = \dim F^\perp = \dim E - \dim F = \dim E - \dim u(F) = \dim u(F)^\perp,$$

d'où l'égalité attendue $u(F^\perp) = u(F)^\perp$. Si $u(F) = F$, on obtient donc $u(F^\perp) = u(F)^\perp = F^\perp$. \square

Lemme 3. Si $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel, alors $(F^\perp)^\perp = F$.

Preuve. Si $x \in F$, pour tout $y \in F^\perp$ on a $b(x, y) = 0$ d'où $F \subseteq (F^\perp)^\perp$. Par ailleurs on a égalité des dimensions :

$$\dim(F^\perp)^\perp = n - \dim F^\perp = n - (n - \dim F) = \dim F,$$

d'où l'égalité annoncée $(F^\perp)^\perp = F$. \square

Remarque. En dimension infinie l'inclusion $F \subseteq (F^\perp)^\perp$ peut être stricte. L'exemple standard [Per96, p.134] est de prendre $E = \ell^2$ l'espace des suites de réels de carrés sommables, et $F \subset E$ le sous-espace des suites dont tous les termes sont nuls sauf un nombre fini. On a $F^\perp = \{0\}$, et $(F^\perp)^\perp = E \supsetneq F$.

Remarque. Un plan hyperbolique contient exactement deux droites singulières, car $q(x_1, x_2) = x_1x_2 = 0$ équivaut à $x_1 = 0$ ou $x_2 = 0$.

Lemme 5. Soit (P, q) un plan muni d'une forme quadratique. Alors (P, q) est un plan hyperbolique ssi q est non dégénérée et P admet un vecteur isotrope non nul.

Preuve. Le sens direct est clair, supposons donc q non dégénérée et P admettant un vecteur isotrope non nul e_1 . Comme q est non dégénérée, il existe $v \in P$ tel que $b(e_1, v) = a \neq 0$. Quitte à remplacer v par $v - \frac{q(v)}{2a}e_1$, on peut supposer v isotrope sans changer la valeur $a = b(e_1, v)$. En posant $e_2 = v/a$, on obtient la base (e_1, e_2) attendue. \square

Lemme 6. Soit $u \in \text{GL}(E)$.

- (1) Si pour toute droite $D \subset E$ on a $u(D) = D$, alors u est une homothétie.
- (2) Si $\dim E = 2$ et il existe 3 vecteurs propres deux à deux non colinéaires pour u , alors u est une homothétie.

Preuve. Exercice (de révision!) \square

Proposition 7 ([Per96, p.186-187]). Le centre de $O(q)$ est $\{\text{id}, -\text{id}\}$, sauf dans le cas d'un plan hyperbolique sur le corps \mathbb{F}_3 .

Preuve. Soit D une droite engendrée par un vecteur non isotrope, et τ_D la réflexion orthogonale associée. Si $u \in \text{GL}(E)$ centralise $O(q)$, on a $\tau_D = u\tau_D u^{-1} = \tau_{u(D)}$, et donc u préserve la droite D .

Si $\dim E = 2$, alors ou bien toutes les droites de E sont non isotropes et on conclut par le lemme 6(1), ou bien E est un plan hyperbolique avec donc exactement 2 droites isotropes, et donc au moins 3 droites non isotropes qui permettent encore de conclure par le lemme 6(2), sauf dans le cas du corps de base \mathbb{F}_3 (il y a $q + 1$ droites vectorielles dans le plan sur le corps fini \mathbb{F}_q).

Supposons maintenant $\dim E \geq 3$. Si $P \subset E$ est un plan régulier, alors il est déterminé par deux de ses droites non-isotropes (par exemple une base orthogonale), et donc un tel plan est aussi laissé invariant par u . Remarquons alors que toute droite isotrope D est intersection de deux plans réguliers P_1, P_2 :

En effet si $D = \mathbf{k}v$, on peut trouver $v_1 \in E$ tel que $b(v, v_1) \neq 0$, et donc $P_1 = \mathbf{k}v + \mathbf{k}v_1$ est un premier plan régulier contenant D . Soit v_2 un vecteur non nul dans P_1^\perp . Alors $P_2 = \mathbf{k}v + \mathbf{k}(v_1 + v_2)$ est un autre plan régulier contenant D .

On conclut de nouveau par le lemme 6(1) que u est une homothétie, et si de plus $u \in O(q)$, alors $u = \pm \text{id}$. \square

Remarque (Cas du plan hyperbolique sur \mathbb{F}_3). Si $q = xy$, alors

$$O(q) = \left\{ \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

qui est isomorphe au groupe abélien $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$.

Théorème 8 ([Per96, p.187]). Le groupe $O(q)$ est engendré par les réflexions orthogonales.

Preuve. Pour $n = 1$, on a $q(x) = ax^2$ pour un certain $a \neq 0$, et $O(q) = \{+1, -1\}$ d'ordre 2 engendré par la réflexion orthogonale $x \mapsto -x$. Supposons maintenant $n > 1$, et le résultat prouvé jusqu'en dimension $n - 1$.

Traisons d'abord le cas particulier où il existe un vecteur x non isotrope et fixe par u . Posons $L = x^\perp$ qui est stable par u par le lemme 2, alors $q|_L$ est non dégénérée, et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence pour écrire $u|_L$ comme un produit de réflexions sur L :

$$u|_L = \tau_r \circ \cdots \circ \tau_1.$$

En prolongeant chaque τ_i en la réflexion σ_i telle que $\sigma_i(x) = x$ et $\sigma_i|_L = \tau_i$ on obtient le résultat attendu.

Finalement, montrons qu'on peut toujours en composant u par au plus deux réflexions se ramener au cas où il existe un vecteur fixe non isotrope. Tout d'abord comme q est non dégénérée il existe un vecteur x non isotrope. Si $y = u(x)$ est distinct de x , alors au moins l'un des vecteurs $x - y$ ou $x + y$ est non isotrope, car ces deux vecteurs sont orthogonaux et (le cas facile $y = -x$ mis à part) forment une base du plan $\mathbf{k}x + \mathbf{k}y$ qui n'est pas totalement isotrope.

Si $x - y$ est non isotrope, alors $H = (x - y)^\perp$ contient $x + y$, et la réflexion orthogonale τ_H satisfait

$$\tau_H(x + y) = x + y, \quad \tau_H(x - y) = y - x,$$

d'où $x = \tau_H(y) = (\tau_H \circ u)(x)$.

Si $x + y$ est non isotrope, alors cette fois en posant $H = (x + y)^\perp$ on obtient $\tau_H(y) = -x$. En notant $L = x^\perp$, on a $\tau_L(x) = -x$ et donc $(\tau_L \circ \tau_H \circ u)(x) = x$. \square

Corollaire 9. *Pour $n \geq 3$, le groupe $\text{SO}(q)$ est engendré par les renversements.*

Preuve. Par le théorème, tout élément de $\text{SO}(q)$ est la composée d'un nombre pair de réflexions. Il reste à voir que si τ_1, τ_2 sont des réflexions orthogonales (distinctes), alors il existe des renversements orthogonaux σ_1, σ_2 tels que $\sigma_1\sigma_2 = \tau_1\tau_2$. Si $n = 3$, il suffit de poser $\sigma_i = -\tau_i$ pour $i = 1, 2$. Dans le cas $n \geq 4$, notons $H_i = x_i^\perp$ l'hyperplan de la réflexion τ_i , on a donc $(H_1 \cap H_2)^\perp = \mathbf{k}x_1 + \mathbf{k}x_2$ de dimension 2. On a $\text{Ker } q|_{H_1 \cap H_2} = (H_1 \cap H_2) \cap (\mathbf{k}x_1 + \mathbf{k}x_2)$ qui est de dimension au plus 1 (par exemple x_1 n'est pas dans cette intersection, car $x_1 \notin H_1$), et donc il existe $V \subset H_1 \cap H_2$ régulier et de dimension $n - 3$. On applique alors le raisonnement précédent à V^\perp , et on étend trivialement à V , pour obtenir les renversements attendus sur $E = V^\perp \oplus V$. \square

Remarque. Méditer sur l'analogie des résultats (et des preuves) précédents avec les résultats concernant le groupe symétrique : les transpositions engendrent S_n , et les 3-cycles engendrent A_n .

On termine avec des propriétés familières dans le plan euclidien, mais qui sont en fait valables pour un plan sur un corps arbitraire muni d'une forme quadratique non dégénérée :

Proposition 10. *Soit P un plan sur \mathbf{k} , et q une forme quadratique non dégénérée.*

- (1) *Si $u \in \text{O}(q)$ avec $\det u = -1$, alors u est une réflexion orthogonale.*
- (2) *Si $u \in \text{SO}(q)$ fixe un vecteur x non nul, alors $u = \text{id}$. [NB : [Per96, p. 188] suppose x non isotrope, c'est inutile]*
- (3) *Tout $u \in \text{SO}(q)$ s'écrit comme un produit de deux réflexions orthogonales $u = \tau_1\tau_2$, et on peut même imposer un choix arbitraire pour l'une des deux.*
- (4) *Si $u \in \text{SO}(q)$ et τ est une réflexion, alors $\tau u \tau = u^{-1}$.*
- (5) *Le groupe $\text{SO}(q)$ est abélien.*

Preuve. (1) Si x est non nul et non isotrope, on a vu dans la preuve du théorème qu'il existe une réflexion orthogonale τ telle que $\tau \circ u(x) = \pm x$. Comme $\det(\tau \circ u) = 1$ et $\varepsilon = \pm 1$ est valeur propre de $\tau \circ u$, on déduit que ε est la seule valeur propre de $\tau \circ u$. Enfin comme la droite x^\perp est stable par $\tau \circ u$ et distincte de $\mathbf{k}x$, on conclut que $\tau \circ u = \pm \text{id}$, et donc $u = \pm \tau$. Reste à remarquer qu'en dimension 2 l'isométrie $-\tau$ est encore une réflexion.

(2) Par le même argument on obtient que 1 est la seule valeur propre de u . Si x est non isotrope, on obtient une seconde droite propre avec x^\perp . Si x est isotrope, alors P est un plan hyperbolique, donc contient exactement 2 droites singulières, qui sont donc chacune des droites propres.

(3) Si disons τ_1 est donnée, alors $\det \tau_1 u = -1$ qui est donc une réflexion τ_2 .

(4) On écrit $u = \tau \tau'$ pour une certaine réflexion τ' , et

$$\tau u \tau = \tau^2 \tau' \tau = \tau' \tau = u^{-1}.$$

(5) Soit $u, v \in \text{SO}(q)$, on peut écrire $u = \tau_1 \tau_2$ comme un produit de deux réflexions, et

$$uvu^{-1} = \tau_1 \tau_2 v \tau_2 \tau_1 = \tau_1 v^{-1} \tau_1 = v. \quad \square$$

Exemple. Un développement qui a du succès est l'étude du groupe $\text{O}(p, q)$. Si on le présente il est bon d'avoir décortiqué le cas de $\text{O}(1, 1)$, c'est-à-dire des isométries du plan hyperbolique sur \mathbb{R} . Prenons la forme quadratique $q(x, y) = xy$. On a

$$\text{SO}(1, 1) = \{(x, y) \mapsto (\lambda x, \lambda^{-1} y) \mid \lambda \in \mathbb{R}^*\}.$$

et $\text{O}(1, 1)$ est le produit semi-direct (et pas direct!) du groupe distingué $\text{SO}(1, 1)$ et du sous-groupe d'ordre 2 engendré par $(x, y) \mapsto (y, x)$.

Exercice. Théorème de Witt sur \mathbb{R} : voir [CG13, D.12 p. 191]. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{R} , muni d'une forme quadratique non dégénérée q . On suppose que $F, F' \subseteq E$ sont deux sous-espaces isométriques. Il s'agit de montrer que F^\perp et F'^\perp sont aussi isométriques (on se convaincra que cela équivaut à dire : "l'isométrie de F vers F' est induite par un élément $u \in \text{O}(q)$ "). On pourra commencer par le cas où F, F' sont réguliers.

2. INTERMÈDE : ESPACES AFFINES, GÉNÉRALITÉS

[Com98, Chapitre II]

On appelle **espace affine** un ensemble \mathcal{E} muni d'une action libre et transitive de $(E, +)$, où E un \mathbf{k} -espace vectoriel. On dit que E est la **direction** de l'espace affine \mathcal{E} .

Rappel : une action de groupe est dite transitive si elle admet une seule orbite, et libre (on dit aussi parfois simple) si chaque stabilisateur est trivial. Pour une action générale on a une bijection $G/\text{Stab}(x) \simeq \text{Orb}(x)$ pour chaque $x \in X$. Pour notre action libre et transitive de E sur \mathcal{E} ce sont toutes des bijections $E \simeq \mathcal{E}$: une pour chaque choix de x ! Chacune de ces bijections revient à "choisir une origine", et donc à "vectorialiser \mathcal{E} ".

Les éléments de \mathcal{E} sont appelés des **points**, et sont typiquement notés avec des lettres majuscules : $A, B, C, M, N \dots$

Les éléments de E sont appelés des **vecteurs** et sont typiquement notés avec une flèche : $\vec{x}, \vec{v} \dots$

Comme le groupe $(E, +)$ est commutatif, les notions d'action à gauche ou à droite sont équivalentes. Dans le contexte de la géométrie affine il est usuel de noter l'action de E sur \mathcal{E} comme une action à droite :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \times E &\rightarrow \mathcal{E} \\ (M, \vec{x}) &\mapsto M + \vec{x} \end{aligned}$$

Exemple. L'exemple standard est un sous-espace affine de \mathbf{k}^n , que l'on obtient comme ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires à n inconnues. Par exemple, les solutions \mathcal{E} de $x + y = 1$ forme une droite affine de \mathbf{k}^2 . Dans ce contexte il est naturel de prendre pour direction E la droite $x + y = 0$, car l'action de E sur \mathcal{E} correspond alors à l'addition des vecteurs dans le plan ambiant \mathbf{k}^2 . Si $M = (x, y) \in \mathcal{E}$, et $\vec{v} = (x_0, y_0) \in E$, on a bien

$$M + \vec{v} = (x + x_0, y + y_0) \in \mathcal{E}.$$

Exemple. Tout espace vectoriel E est muni d'une structure dite canonique d'espace affine (de direction E). C'est un cas particulier de l'exemple précédent. Cela revient à "oublier l'origine".

Notation. Par transitivité de l'action, pour tous points $M, N \in \mathcal{E}$ il existe un vecteur \vec{v} tel que $M + \vec{v} = N$. De plus l'action étant libre, ce vecteur \vec{v} est unique. On le note $\vec{v} = \overrightarrow{MN}$, et \overrightarrow{MN} est donc caractérisé par l'égalité (qui est aussi la raison pour préférer noter l'action à droite) :

$$M + \overrightarrow{MN} = N.$$

Lemme 11 (Chasles). *Soit \mathcal{E} un espace affine de direction E .*

- (1) *Pour tous $A, B, C \in \mathcal{E}$, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.*
- (2) *Pour tous $A, B \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.*

Preuve. (1) découle de la liberté de l'action et de l'égalité

$$A + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = B + \overrightarrow{BC} = C = A + \overrightarrow{AC}.$$

Le point (2) en découle en prenant $A = B = C$, puis $A = C$. □

Définition. Si $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ sont des espaces affines d'espace vectoriels respectifs E, E' , on dit que

$$f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$$

est une **application affine** s'il existe une application linéaire $v: E \rightarrow E'$ tel que pour tous $M \in \mathcal{E}$ et $\vec{x} \in E$ on ait

$$f(M + \vec{x}) = f(M) + v(\vec{x}).$$

Autrement dit on demande que le diagramme suivant commute, où les flèches horizontales correspondent aux action de E, E' sur $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} \times E & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ f \times v \downarrow & & \downarrow f \\ \mathcal{E}' \times E' & \longrightarrow & \mathcal{E}' \end{array}$$

On notera $v_f = v$ si on veut expliciter que l'application linéaire v est associée à f .

Définition. Soit \mathcal{E} un espace affine de direction E . Un **sous-espace affine** $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ est la donnée d'un sous-espace vectoriel $F \subseteq E$ et d'une orbite sous l'action de F :

$$\mathcal{F} = \text{Orb}(A) = \{A + \vec{x} \mid \vec{x} \in F\}$$

On dit que \mathcal{F} est le sous-espace de direction F passant par A .

Proposition 12 ([Com98, p. 110]). *L'application linéaire $v: E \rightarrow E'$ est uniquement déterminée par l'application affine $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$. De plus v est surjective (resp. injective) si et seulement si f est surjective (resp. injective).*

Preuve. Soit $A \in \mathcal{E}$, notons $B = f(A)$, et considérons les deux bijections :

$$\begin{array}{ccc} \varphi_A: E \rightarrow \mathcal{E} & & \varphi_B: E' \rightarrow \mathcal{E}' \\ \vec{x} \mapsto A + \vec{x} & & \vec{y} \mapsto B + \vec{y} \end{array}$$

Pour tout $\vec{x} \in E$ on a

$$f \circ \varphi_A(\vec{x}) = f(A + \vec{x}) = B + v(\vec{x}) = \varphi_B(v(\vec{x})).$$

On conclut que $v = \varphi_B^{-1} \circ f \circ \varphi_A$ est uniquement déterminée par f . \square

Exemple. (1) Translation de vecteur $\vec{y} : t(A) = A + \vec{y}$. L'application linéaire v associée est l'identité, car $t(A + \vec{x}) = A + \vec{x} + \vec{y} = t(A) + \vec{x}$. Réciproquement, si f est une application affine avec $v = \text{id}$, montrons que f est une translation. Précisément, choisissons $A \in \mathcal{E}$, notons $A' = f(A)$ et montrons que f est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$. Pour tout $M \in \mathcal{E}$, on a

$$f(M) = f(A + \overrightarrow{AM}) = A' + \overrightarrow{AM} = A + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AM} = M + \overrightarrow{AA'}.$$

(2) Projection sur un espace \mathcal{F} parallèlement à un espace \mathcal{F}' , où $E = F \oplus F'$. Pour $A \in \mathcal{E}$, l'intersection

$$\{A + \vec{x}' \mid \vec{x}' \in \mathcal{F}'\} \cap \mathcal{F}$$

est réduite à un seul point. En effet pour $B \in \mathcal{F}$ fixé, l'égalité $A + \vec{x}' = B + \vec{x}$, $\vec{x} \in F$, $\vec{x}' \in F'$, équivaut à $\overrightarrow{AB} = \vec{x}' - \vec{x}$, ce qui détermine de façon unique \vec{x} et \vec{x}' . On a

$$f(B + \overrightarrow{BA}) = f(A) = B + \vec{x},$$

et donc l'application linéaire associée $v: \overrightarrow{BA} \mapsto \vec{x}$ est la projection sur F parallèlement à F' .

Proposition 13. *Soit $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ une application affine bijective. Alors f^{-1} est affine, et $v_{f^{-1}} = v_f^{-1}$.*

Preuve. Soit $M \in \mathcal{E}'$, $\vec{x} \in E'$. On vérifie que $f^{-1}(M + \vec{x})$ et $f^{-1}(M) + v_f^{-1}(\vec{x})$ sont égaux en calculant leurs images par f :

$$f(f^{-1}(M) + v_f^{-1}(\vec{x})) = M + \vec{x} = f(f^{-1}(M + \vec{x})). \quad \square$$

On appelle **groupe affine** de \mathcal{E} , noté $\text{GA}(\mathcal{E})$, le groupe des transformations affines bijectives de \mathcal{E} dans \mathcal{E} .

Comme pour tout $M \in \mathcal{E}$ et $\vec{x} \in E$ on a

$$f \circ g(M + \vec{x}) = f(g(M) + v_g(\vec{x})) = f \circ g(M) + v_f \circ v_g(\vec{x}),$$

on obtient la

Proposition 14 ([Com98, p. 119]). *L'application $f \in \text{GA}(\mathcal{E}) \mapsto v_f \in \text{GL}(E)$ est un morphisme de groupes surjectif, de noyau les translations. En particulier $\text{GA}(\mathcal{E}) = E \rtimes \text{GL}(E)$ est un produit semi-direct, pour l'action naturelle de $\text{GL}(E)$ sur E .*

Remarque (Produit semi-direct externe ou interne). Le groupe additif de l'espace vectoriel E s'identifie de façon canonique au sous-groupe des translations dans $\text{GA}(\mathcal{E})$. Le groupe $\text{GL}(E)$ s'identifie également à un sous-groupe de $\text{GA}(\mathcal{E})$, mais plus de façon canonique. Il faut choisir un point $A \in \mathcal{E}$, puis prendre le sous-groupe de $\text{GA}(\mathcal{E})$ des transformations fixant A .

Définition. Soit \mathcal{E} un espace affine de direction E . On appelle **repère affine** la donnée d'un point $A \in \mathcal{E}$ et d'une base $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ de E . Notons que chaque \vec{x}_i s'écrit de façon unique $\vec{x}_i = \overrightarrow{AB_i}$, donc de façon équivalente un repère affine est la donnée de $n + 1$ points (A, B_1, \dots, B_n) tels que $\overrightarrow{AB_1}, \dots, \overrightarrow{AB_n}$ soit une base de E .

3. ESPACES EUCLIDIENS

Un espace vectoriel réel E de dimension finie n muni d'une forme quadratique q définie positive est appelé un **espace euclidien**. Autrement dit, E est isométrique à \mathbb{R}^n muni du produit scalaire standard, on pourra donc s'autoriser (via un choix de base) à identifier E au modèle \mathbb{R}^n standard. On notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire (forme polaire de q), et $\text{O}(E)$ ou $\text{O}_n(\mathbb{R})$ le groupe orthogonal. On dit qu'un espace affine \mathcal{E} est euclidien si l'espace vectoriel E associé est muni d'une structure euclidienne. Une transformation f d'un espace affine euclidien \mathcal{E} est appelée une isométrie si la transformation associée v_f est dans $\text{O}(E)$.

3.1. Dimension 2. Une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est dans $\text{O}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $A^t A = \text{id}$, ce qui équivaut à

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \\ b^2 + d^2 = 1 \end{cases}$$

La première condition donne l'existence d'un θ tel que $a = \cos \theta$, $c = \sin \theta$; la deuxième condition donne l'existence d'un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $b = -\lambda c$, $d = \lambda a$; et enfin la troisième condition donne $\lambda = \pm 1$. Remarquons que $\lambda = \pm 1$ est le déterminant de la matrice. Finalement on obtient que

$$\text{SO}_2(\mathbb{R}) = \left\{ R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

est le groupe des rotations, et toute matrice dans $\text{O}_2(\mathbb{R})$ de déterminant -1 est de la forme

$$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c'est à dire composition de la symétrie S d'axe les abscisses avec la rotation R_θ . Comme on l'a déjà noté de façon générale dans la proposition 10, une telle matrice S_θ est une réflexion orthogonale par rapport à une certaine droite. On peut le retrouver et préciser la conjuguante :

$$S_\theta = R_\theta \circ S = R_{\theta/2} \circ R_{\theta/2} \circ S = R_{\theta/2} \circ S \circ R_{\theta/2}^{-1}.$$

Remarque. On a des isomorphismes

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) & \\ \swarrow \simeq & & \searrow \simeq \\ \bar{\theta} \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} & \xrightarrow{\simeq} & e^{i\theta} \in S^1 \end{array}$$

Lemme 15. *Tout sous-groupe fini $G \subset \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est cyclique, de la forme $G = \langle R_\theta \rangle$ avec $\theta = \frac{2\pi}{n}$ où $n = |G|$.*

Preuve. Grâce à l'isomorphisme de la remarque 3.1, il suffit de montrer l'énoncé analogue pour un sous-groupe $G \subset S^1 \subset \mathbb{C}^*$ d'ordre n . Pour tout $z \in G$, ordre z divise n et donc $z^n = 1$. Autrement dit z est une racine n ième de l'unité, et par égalité des cardinaux l'inclusion $G \subseteq U_n$ est en fait une égalité :

$$G = U_n = \{e^{2i\pi \frac{k}{n}} \mid k = 0, \dots, n-1\} = \langle e^{\frac{2i\pi}{n}} \rangle. \quad \square$$

Remarque. Remarquer la simplification apportée par l'usage des nombres complexes : on s'est servi du fait qu'un polynôme de degré n sur \mathbb{C} a exactement n racines (ici le polynôme $X^n - 1$).

Rappelons qu'on appelle groupe **diédral** D_n le groupe des isométries du plan préservant le polygone régulier dont les sommets sont les racines n ières de l'unité. Explicitement, en utilisant les nombres complexes et en notant $\alpha = e^{\frac{2i\pi}{n}}$:

$$D_n = \{z \mapsto \alpha^k z\} \cup \{z \mapsto \alpha^k \bar{z}\}$$

où $k = 0, \dots, n-1$. C'est un groupe non abélien sauf quand $n = 1$ ($D_1 \simeq \mathbb{Z}/2$) ou $n = 2$ ($D_2 \simeq \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$).

Lemme 16. *Tout sous-groupe fini $G \subset \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ non inclus dans $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est isomorphe (et même conjugué) au groupe diédral D_n pour un certain $n \geq 1$.*

Preuve. Soit $\tau \in G$ de déterminant -1 . C'est une réflexion orthogonale, et il existe une rotation $r \in \mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$ qui conjugue cette réflexion à la réflexion $z \mapsto \bar{z}$ (réflexion par rapport à l'axe des abscisses).

De plus $G \cap \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est d'indice 2 dans G , et cyclique d'un certain ordre n , engendré par $z \mapsto \alpha^k z$ avec $\alpha = e^{2i\pi/n}$.

Finalement rGr^{-1} contient le groupe diédral D_n , donc lui est égal par égalité des cardinaux. \square

3.2. Dimension n . Forme normale des éléments de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$:

Théorème 17 ([Com98, p. 155], [Per96, p. 147]). *Soit $v \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Alors $\mathbb{R}^n = \bigoplus F_k$ est somme directe orthogonale de sous-espaces F_k non nuls invariants par v , et minimaux pour cette propriété. Ces sous-espaces sont de dimension 1 ou 2. Ceux de dimension 1 sont engendrés par des vecteurs propres associés aux valeurs propres -1 ou $+1$. Pour ceux de dimension 2, et pour tout choix d'une base orthonormée d'un tel F_k , la matrice de la restriction de v à F_k est de la forme*

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

avec θ non multiple de π .

Preuve. On procède par récurrence sur la dimension n . Le cas $n = 1$ est clair, et le cas $n = 2$ a été traité plus haut. Supposons $n \geq 3$, et montrons qu'il existe un sous-espace F non-trivial stable par v , ce qui permettra de conclure en appliquant l'hypothèse de récurrence à chacun des facteurs de la décomposition orthogonale $F \oplus F^\perp$. Si v admet une valeur propre réelle, nécessairement égale à ± 1 , c'est terminé. Sinon, soit $\lambda, \bar{\lambda}$ un couple de valeurs propres complexes conjuguées, et $x \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre complexe pour λ . Alors \bar{x} est un vecteur propre pour $\bar{\lambda}$, et le plan $P = \mathbb{C}x + \mathbb{C}\bar{x}$ est invariant par u . Comme u est réel, u préserve $F = P \cap \mathbb{R}^n$, et $P \cap \mathbb{R}^n$ est le plan réel engendré par les vecteurs réels $x + \bar{x}$ et $i(x - \bar{x})$. \square

On reprend et précise le théorème 8 dans le cas d'un espace euclidien E , que l'on identifie à \mathbb{R}^n muni du produit scalaire standard.

Théorème 18 ([Per96, p. 143]). *Le groupe $O_n(\mathbb{R})$ est engendré par les réflexions orthogonales. Précisément, si $u \in O_n(\mathbb{R})$ avec espace des points fixes $\text{Fix } u$ de codimension r , alors u s'écrit comme un produit de r réflexions orthogonales.*

Preuve. Clairement si $u = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k$ est un produit de k réflexions orthogonales, alors $k \geq \text{codim } \text{Fix } u$, c'est-à-dire il faut au moins $\text{codim } \text{Fix } u$ réflexions pour écrire u . Il suffit donc de montrer que u s'écrit comme un produit d'au plus $\text{codim } \text{Fix } u$ réflexions orthogonales.

On procède par récurrence sur la codimension r , le cas $r = 0$ correspondant à $u = \text{id}$.

Si $r > 0$, prenons $x \in (\text{Fix } u)^\perp$ non nul, et notons $y = u(x)$, qui est aussi dans $(\text{Fix } u)^\perp$ par le lemme 2. Soit τ la réflexion de vecteur $x - y$. On remarque que

$$\langle x - y, x + y \rangle = 0$$

Donc $\tau(x - y) = y - x$, $\tau(x + y) = x + y$, et donc $\tau(x) = y$. Comme $x - y \in (\text{Fix } u)^\perp$, $\tau|_{\text{Fix } u} = \text{id}$. On a donc une inclusion $\text{Fix } u \subset \text{Fix}(\tau u)$, et cette inclusion est stricte car x est fixé par τu mais pas par u . Par hypothèse de récurrence, on peut écrire τu comme un produit d'au plus $\text{codim } \text{Fix}(\tau u) < r$ réflexions orthogonales. Donc u s'écrit comme un produit d'au plus $\text{codim } \text{Fix}(\tau u) + 1 \leq r$ réflexions orthogonales. \square

On s'intéresse maintenant aux isométries affines.

Le lemme suivant aurait pu apparaître dans la section "groupe orthogonal général", on donne ici la version euclidienne :

Lemme 19. *Soit E un espace euclidien, et $v \in O(E)$. Alors E est une somme directe orthogonale*

$$E = \text{Ker}(v - \text{id}) \oplus \text{Im}(v - \text{id}).$$

Preuve. Pour tous $x \in \text{Ker}(v - \text{id})$ et $y = v(z) - z \in \text{Im}(v - \text{id})$, on calcule

$$\langle x, y \rangle = \langle x, v(z) - z \rangle = \langle x, v(z) \rangle - \langle x, z \rangle = \langle v^{-1}(x), z \rangle - \langle x, z \rangle = \langle x, z \rangle - \langle x, z \rangle = 0.$$

Les sous-espaces $\text{Ker}(v - \text{id})$ et $\text{Im}(v - \text{id})$ sont donc orthogonaux, et comme ils sont de plus de dimensions complémentaires par le théorème du rang, le résultat suit. \square

Proposition 20 (Décomposition canonique d'une isométrie affine, [Com98, p. 163]). *Soit f une isométrie d'un espace affine euclidien \mathcal{E} , d'application linéaire associé $v \in \mathcal{L}(E)$. Il existe une unique expression*

$$f = t_{\vec{x}} \circ g$$

où g est une isométrie admettant un point fixe et $t_{\vec{x}}$ est une translation de vecteur $\vec{x} \in \text{Ker}(v - \text{id})$. De plus $t_{\vec{x}}$ et g commutent.

Preuve. • Existence. Soit $A \in \mathcal{E}$, et notons $A' = f(A)$. Par le lemme 19, il existe $\vec{x} \in \text{Ker}(v - \text{id})$ et $\vec{y} = v(\vec{z}) - \vec{z} \in \text{Im}(v - \text{id})$ tel que $\overrightarrow{AA'} = \vec{x} + \vec{y}$. Vérifions que $B = A - \vec{z}$ est fixe par $g = t_{-\vec{x}} \circ f$:

$$\begin{aligned} g(B) &= f(B) - \vec{x} = f(A) - v(\vec{z}) - \vec{x} = A + \overrightarrow{AA'} - v(\vec{z}) - \vec{x} \\ &= A + \vec{y} - v(\vec{z}) = A - \vec{z} = B. \end{aligned}$$

• Unicité. Si $f = t_{\vec{x}} \circ g = t_{\vec{x}'} \circ g'$ avec g, g' fixant respectivement B, B' et $\vec{x}, \vec{x}' \in \text{Ker}(v - \text{id})$. On a

$$B' + \vec{x}' = f(B') = f(B + \overrightarrow{BB'}) = f(B) + v(\overrightarrow{BB'}) = B + \vec{x} + v(\overrightarrow{BB'}) = B' + \overrightarrow{B'B} + \vec{x} + v(\overrightarrow{BB'}),$$

et donc

$$\vec{x}' - \vec{x} = v(\overrightarrow{BB'}) - \overrightarrow{BB'} \in \text{Im}(v - \text{id}).$$

Comme par hypothèse $\vec{x}' - \vec{x} \in \text{Ker}(v - \text{id})$, le lemme 19 donne $\vec{x}' - \vec{x} = 0$, d'où l'on tire $g = g'$.

• Commutation. Si $M \in \mathcal{E}$, on a

$$g \circ t_{\vec{x}}(M) = g(M + \vec{x}) = g(M) + v(\vec{x}) = g(M) + \vec{x} = t_{\vec{x}} \circ g(M). \quad \square$$

Exercice. Établir la liste des types d'isométries affines en dimension 2 : translations, rotations, symétries axiales, symétries-translations. Cas particuliers : identité, rotation d'angle π .

Exercice. Établir la liste des types d'isométries affines en dimension 3 : Translations, rotations, symétries orthogonales, symétries-translations ($\vec{t} \in H$), vissages (= rotation translations, $\vec{t} \in D$). Cas particuliers : identité, rotation d'angle π , symétrie centrale.

3.3. Dimension 3. ref : [Com98, chapitre 8]

On prend maintenant $n = 3$, $\mathbf{k} = \mathbb{R}$. De l'égalité $M^{-1} = M^t$ on déduit $\det M = \pm 1$; de plus les valeurs propres sont de module 1 : écrire $\|v\|^2 = v^T v = v^T M^T M v = \|\lambda v\|^2$. Une matrice dans $O_3(\mathbb{R})$ a une ou trois valeurs propres réelles. On obtient la liste (c'est aussi un cas particulier du théorème 17)

(1) $M = \text{id}$;

(2) M est conjuguée à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$: symétrie orthogonale par rapport à un plan ;

(3) M est conjuguée à $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: rotation d'angle θ (noter le cas particulier $\theta = \pi$, renversement) ;

(4) M est conjuguée à $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$: composée des deux cas précédents.

On étudie maintenant plus en détail le groupe spécial orthogonal $SO_3(\mathbb{R})$. Le groupe $SO_3(\mathbb{R})$ est donc le groupe des rotations de \mathbb{R}^3 dont l'axe passe par l'origine. Les renversements sont des éléments de $SO_3(\mathbb{R})$, et correspondent dans ce contexte aux rotations d'angle π .

Lemme 21. Quelques propriétés du groupe $SO_3(\mathbb{R})$:

- (1) *Les renversements engendrent $\text{SO}_3(\mathbb{R})$.*
- (2) *Les renversements sont deux à deux conjugués dans $\text{SO}_3(\mathbb{R})$.*
- (3) *Le groupe $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ est connexe.*
- (4) *Le centre du groupe $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ est trivial.*

Preuve. (1) (*faire un dessin!*) Soit D une droite vectorielle de \mathbb{R}^3 , et θ un angle. Considérons H le plan orthogonal à D , et $D_1, D_2 \subset H$ deux droites formant un angle $\theta/2$. Alors la composée des renversements d'axe D_1 et D_2 est une rotation d'angle θ et d'axe D : en effet tout point de D est fixe, et en restriction à H on a la composée de deux symétries axiales, c'est-à-dire une rotation.

(2) Soit $D_1 \neq D_2$ les axes de deux renversements σ_1, σ_2 . Dans le plan P engendré par D_1, D_2 , soit D l'une des bissectrices de ces deux droites. Alors le renversement σ d'axe D échange D_1 et D_2 , et donc $\sigma\sigma_1\sigma = \sigma_2$.

(3) Il est facile de voir que $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ est connexe par arc, en reliant toute matrice $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ à l'identité en faisant varier l'angle de θ à 0.

Un argument plus sophistiqué (mais qui s'applique à des cas plus généraux) est donné dans [CG13, p. 37] : le groupe $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ agit transitivement sur la sphère S^2 , avec stabilisateur d'un point $\text{SO}_2(\mathbb{R}) \simeq S^1$. Alors la connexité découle du fait général que si G/H et H sont connexe, alors G est connexe.

(4) Soit g dans le centre de $\text{SO}_3(\mathbb{R})$, et soit v un vecteur non nul de \mathbb{R}^3 . Notons r le renversement d'axe donné par v . Comme $grg^{-1} = r$, l'axe de r est préservé par g , et donc v est un vecteur propre pour g . Ceci étant vrai pour tout v , g est une homothétie, or l'identité est la seule homothétie dans $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ (argument tiré de [CG13, Lemme A.1.23 p. 17]).

□

Théorème 22 ([CG13, p. 239]). *Le groupe $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ est simple.*

Preuve. Soit $N \triangleleft \text{SO}_3(\mathbb{R})$ un sous-groupe distingué non trivial, on veut montrer que $N = \text{SO}_3(\mathbb{R})$. D'après le lemme précédent, il suffit de montrer que N contient un renversement. Soit $h \in N$ une rotation non triviale. On considère l'application continue

$$\begin{aligned} \varphi: \text{SO}_3(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ g &\mapsto \text{Tr}(ghg^{-1}h^{-1}). \end{aligned}$$

La trace d'une rotation d'angle θ de \mathbb{R}^3 est $1 + 2 \cos \theta$, ainsi l'application φ est à valeur dans $[-1, 3]$. Plus précisément, l'image de φ est un intervalle (car $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ est connexe), de la forme $[a, 3]$ (car $\varphi(h) = 3$, ou $\varphi(\text{id}) = 3$, au choix), et avec $a < 3$ (car le centre de $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ est trivial). Pour tout n entier assez grand, on a $a \leq 1 + 2 \cos(\pi/n) < 3$, et il existe alors g tel que $\text{Tr}(ghg^{-1}h^{-1}) = 1 + 2 \cos(\pi/n)$, autrement dit $u = ghg^{-1}h^{-1}$ est une rotation d'angle $\pm\pi/n$. De plus $u \in N$, car ghg^{-1} et h^{-1} sont dans N . Finalement u^n est le renversement cherché. □

4. DIGRESSION : LES CINQ SOLIDES PLATONICIENS

Un **polytope** (ou **polyèdre**) \mathcal{P} est l'enveloppe convexe d'un nombre fini (non coplanaires) de points dans \mathbb{R}^3 . En particulier \mathcal{P} est compact et d'intérieur non vide.

NB : polyèdre est souvent pris dans un sens moins strict : notamment, convexe pas forcément borné obtenu comme intersection de demi-espaces. A ce stade on considèrera comme "intuitivement évidentes" les notions de sommets, arêtes et faces, et notamment

le fait que les faces sont des polygones (au moins 3 arêtes), et que chaque sommet appartient à au moins 3 arêtes / 3 faces. Voir plus loin pour plus de détail sur comment définir ces notions en dimension n quelconque.

On notera S, A, F les nombres de sommets, arêtes et faces d'un polyèdre \mathcal{P} donné.

Proposition 23. *Pour tout polyèdre \mathcal{P} , on a la relation (dite d'Euler) $S - A + F = 2$.*

Preuve. Théorie de Morse ou “Polyèdre sortant de la piscine” : faire apparaître le solide sommet par sommet et évaluer la somme $S - A + F$ à chaque étape.

Autre preuve : topologique, par récurrence sur le nombre d'arêtes, voir [Com98, p. 146]. \square

Définition. On considère maintenant des polyèdres (disons “**semi-réguliers**”, mais le terme n'est pas standard) avec les propriétés suivantes :

- De chaque sommet est issu le même nombre $v_S \geq 3$ d'arêtes ;
- Chaque face est un polygone avec le même nombre d'arêtes $v_F \geq 3$.

Le v est pour “valence”. On appelle **symbole de Schläfli** d'un tel polyèdre le couple (v_F, v_S) .

Proposition 24. *Si \mathcal{P} est semi-régulier, alors il n'y a que 5 possibilités pour le couple (v_F, v_S) , qui sont $(3, 3), (3, 4), (4, 3), (5, 3), (3, 5)$.*

Preuve. Remarquer que $2A = S.v_S = F.v_F$. On écrit la relation d'Euler sous la forme $S + F = A + 2$, et on divise par $2A$ pour obtenir

$$\frac{1}{v_S} + \frac{1}{v_F} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A} > \frac{1}{2}.$$

Comme $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$, on voit que $v_F, v_S \leq 5$. Comme $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, on voit qu'au moins l'un des v_F, v_S doit être égal à 3. Ceci laisse les 5 possibilités listées. \square

Maintenant on va vers une définition des polyèdres réguliers en termes d'isométries.

Définition. Étant donné un polyèdre \mathcal{P} , un **drapeau** de \mathcal{P} est un triplet (s, a, f) où s est un sommet, a une arête et f une face avec $s \in a \subset f$.

Remarque. (1) Chaque arête est contenue dans deux faces, et contient deux sommets ; chaque arête apparaît donc dans exactement 4 drapeaux. Le nombre de drapeaux est donc égal à 4 fois le nombre d'arêtes.

(2) Une isométrie de \mathbb{R}^3 préserve un polyèdre \mathcal{P} si et seulement si elle préserve ses sommets (ici encore, résultat à préciser plus loin avec la notion de barycentre).

(3) On a un morphisme injectif $\text{Isom}(\mathcal{P}) \rightarrow S_n$, où n est le nombre de sommets de \mathcal{P} . (en supposant l'origine égale à l'isobarycentre de \mathcal{P} , et en prenant trois sommets d'une face on obtient une base de \mathbb{R}^3 : si ces trois sommets sont fixés l'isométrie est l'identité).

Définition. Un polyèdre \mathcal{P} est dit **régulier** si le groupe des isométries $\text{Isom}(\mathcal{P})$ agit transitivement sur les drapeaux de \mathcal{P} .

Pour un polyèdre régulier \mathcal{P} :

- Chaque face est isométrique à un même polygone régulier ;
- De chaque sommet est issue le même nombre d'arêtes ;
- En particulier un polyèdre régulier est semi-régulier.

- Le barycentre des sommets est appelé le centre du polyèdre, tous les sommets sont à même distance de ce centre O , en particulier \mathcal{P} est inscrit dans une sphère.

Remarque. A noter qu'il existe des polyèdres semi-réguliers mais non réguliers ; par exemple un parallélépipède rectangle : les isométries agissent transitivement sur les 8 sommets, mais pas sur les 6 faces ni les 12 arêtes.

On pourrait être tenté de définir un polyèdre régulier par la condition plus faible que toutes les faces sont isométriques à un même polygone régulier ; mais ceci n'excluerait pas par exemple les polyèdres obtenus en juxtaposant deux pyramides de base un polygone régulier à $n = 3$ ou 5 côtés (pour $n \geq 6$, les faces ne pourraient plus être des triangles équilatéraux...). Ici le groupe d'isométrie (isomorphe au groupe diédral D_n à $2n$ éléments) agit transitivement sur les $2n$ faces, mais pas sur les $n + 2$ sommets ni les $3n$ arêtes.

Il se trouve que pour chacun des 5 couples (v_F, v_S) il existe exactement un polyèdre régulier correspondant. Voici la liste de ces “**solides platoniciens**” :

- $(3, 3)$: tétraèdre, 4 faces, 4 sommets, 6 arêtes.
- $(4, 3)$: cube, 6 faces, 8 sommets, 12 arêtes.
- $(3, 4)$: octaèdre, 8 faces, 6 sommets, 12 arêtes.
- $(5, 3)$: dodécaèdre, 12 faces, 20 sommets, 30 arêtes.
- $(3, 5)$: icosaèdre, 20 faces, 12 sommets, 30 arêtes.

NB : un polyèdre régulier admet un polyèdre dual également régulier, qui admet le même groupe d'isométrie. Du point de vue des groupes d'isométries il y a donc essentiellement 3 solides platoniciens.

- tétraèdre, qui est auto-dual.
- cube et octaèdre ;
- dodécaèdre et icosaèdre.

Pour un polyèdre \mathcal{P} donné, on note $\text{Isom}(\mathcal{P})$ le sous-groupe de $O_3(\mathbb{R})$ des isométries préservant \mathcal{P} , et $\text{Isom}^+(\mathcal{P})$ le sous-groupe des isométries directes (= rotations) préservant \mathcal{P} . On a en général :

Proposition 25. *Si \mathcal{P} est un polyèdre régulier :*

- $|\text{Isom}(\mathcal{P})| = 4A$ (le nombre de drapeaux) ;
- $|\text{Isom}^+(\mathcal{P})| = 2A$;
- $\text{Isom}(\mathcal{P}) \cong \text{Isom}^+(\mathcal{P}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Proposition 26. • *Si \mathcal{P} est un tétraèdre régulier, $\text{Isom}^+(\mathcal{P}) \simeq A_4$.*

- *Si \mathcal{P} est un cube ou un octaèdre régulier, $\text{Isom}^+(\mathcal{P}) \simeq S_4$.*
- *Si \mathcal{P} est un dodécaèdre ou un icosaèdre régulier, $\text{Isom}^+(\mathcal{P}) \simeq A_5$.*

Idée de preuve. Dans chaque cas il s'agit de faire agir sur un ensemble X à 4 ou 5 éléments.

- Tétraèdre : action sur les 4 sommets du tétraèdre.

- Cube : action sur les 4 grandes diagonales.
- Icosaèdre : actions sur les 5 triplets d'axes orthogonaux passant par des milieux d'arêtes.

On montre que cette action est fidèle. Ensuite on utilise la remarque que pour tout $n \geq 2$, A_n est l'unique sous-groupe d'indice 2 dans S_n . \square

Exemple. Détaillons un peu plus les rotations préservant un icosaèdre. L'icosaèdre est préservée par

- A_i décrivant l'ensemble des 12 sommets, les rotations d'axe OA_i et d'ordre 5. Il y a 6 tels axes, et 4 rotations non triviales pour chaque axe : 24 en tout.
- les rotations d'angle π (renversements) et d'axe OI , où I est le milieu d'une des 30 arêtes : il y en a 15.
- les rotations d'ordre 3 d'axe OJ , où J est le milieu d'une des 20 faces : il y en a $10 \times 2 = 20$.
- l'identité.

En tout 60 rotations. D'après la proposition 25 la liste est complète.

5. SOUS-GROUPES FINIS DE $SO_3(\mathbb{R})$

Théorème 27. *Tout sous-groupe fini G de $SO_3(\mathbb{R})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, D_n , A_4 , S_4 ou A_5 . Plus précisément, G est conjugué au groupe des rotations préservant l'un des polyèdres suivant (les cas $n = 1, 2$ mis à part)*

- $\text{Isom}^+(\text{pyramide de base un polygone régulier à } n \text{ côtés}) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
- $\text{Isom}^+(\text{double pyramide de base un polygone régulier à } n \text{ côtés}) \simeq D_n$
- $\text{Isom}^+(\text{tétraèdre régulier}) \simeq A_4$
- $\text{Isom}^+(\text{cube}) \simeq S_4$
- $\text{Isom}^+(\text{icosaèdre régulier}) \simeq A_5$.

Remarque (Cas particuliers). • Pas grand chose à dire sur le cas $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ quand $n = 1$, sauf que c'est le groupe trivial...

- Le cas $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ coïncide avec le cas D_1 , et correspond au groupe d'ordre 2 engendré par un renversement (rotation d'angle π et d'axe une certaine droite).
- On peut penser au groupe $D_2 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ comme au groupe des rotations préservant un parallélépipède rectangle.
- Pour la double pyramide, on peut presque toujours prendre un polygone régulier de sommet sur un équateur, et les deux sommets restants aux pôles nord et sud, sauf dans le cas $n = 4$. En effet on obtiendrait alors un octaèdre régulier, qui a plus de symétries que D_4 . En fait il y a autant de symétries que le cube (cube et octaèdre sont des solides duaux). Pour $n = 4$ il faut donc aplatir ou allonger les pyramides pour retrouver exactement D_4 .

On utilisera le

Lemme 28 (Burnside). *Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble X fini. Alors le nombre k d'orbites est donné par la moyenne du nombre de points fixes des éléments de G :*

$$k = \frac{1}{|G|} \sum_G |\text{Fix}(g)|$$

Preuve du théorème, première étape.

Soit $G \subset \text{SO}_3(\mathbb{R})$ un sous-groupe fini d'ordre $n \geq 2$. A tout élément de G distinct de l'identité on associe deux **pôles**, qui par définition sont l'intersection de l'axe de la rotation avec la sphère unité de \mathbb{R}^3 . Le groupe G agit sur l'ensemble X des pôles des éléments de G , qui est fini, et la définition donne la majoration suivante :

$$2 \leq |X| \leq 2(n-1).$$

Comme toute rotation distincte de l'identité dans G fixe exactement deux pôles, et que l'identité fixe tout les éléments de X , la formule de Burnside donne le nombre k d'orbites de cette action :

$$k = \frac{1}{n}(2(n-1) + |X|) = 2 + \frac{|X| - 2}{n} \geq 2.$$

On a aussi grâce à la majoration précédente

$$k \leq \frac{4(n-1)}{n} < 4.$$

On a donc $k \in \{2, 3\}$.

Fait 29. *Si $k = 2$, alors G est cyclique.*

Preuve. La formule précédente montre que $k = 2$ si et seulement si $|X| = 2$, et dans ce cas les rotations de G ont toutes le même axe. Ainsi G peut être vu comme un sous-groupe fini de rotation du plan orthogonal à cet unique axe, ce qui implique G cyclique. \square

Fait 30. *Si $k = 3$, notons $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ les orbites et $n_1 \leq n_2 \leq n_3$ les cardinaux des stabilisateurs correspondants.*

- (1) *Si $n_1 = n_2 = 2$, alors $|G| = |D_{n_3}| = 2n_3$.*
- (2) *Si non on est dans l'une des situations suivantes :*

- $(n_1, n_2, n_3) = (2, 3, 3)$, et $|G| = |A_4| = 12$.
- $(n_1, n_2, n_3) = (2, 3, 4)$, et $|G| = |S_4| = 24$.
- $(n_1, n_2, n_3) = (2, 3, 5)$, et $|G| = |A_5| = 60$.

Preuve. On commence par déterminer les triplets (n_1, n_2, n_3) possibles. La formule de Burnside se lit $3 = 2 + \frac{|X| - 2}{n}$. Par ailleurs on a $|\omega_i| = \frac{n}{n_i}$, et donc

$$\frac{|X|}{n} = \frac{|\omega_1| + |\omega_2| + |\omega_3|}{n} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}.$$

Finalement on obtient la condition

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = 1 + \frac{2}{n}.$$

Par définition, un pôle est fixé par au moins l'identité et une autre rotation, ainsi $n_1 \geq 2$. On a donc $n_1 = 2$, sinon la condition précédente ne serait pas remplie. Par le même argument, $3 \geq n_2 \geq 2$. Si $n_2 = 2$, alors n_3 est arbitraire, et $n = 2n_3$. Si $n_2 = 3$, alors $5 \geq n_3 \geq 3$, ce qui donne les trois cas listés. De plus on obtient $n = \frac{12n_3}{6-n_3}$, ce qui donne $n = 12, 24, 60$ lorsque $n_3 = 3, 4, 5$. \square

Preuve du théorème, deuxième étape.

On connaît des groupes correspondant aux cas listés : rotations préservant respectivement une double pyramide sur un polygone régulier, un tétraèdre, un cube ou un icosaèdre. Reste à voir que tout groupe avec les invariants (ordre du groupe, des orbites...) d'un tel exemple est en fait égal à un tel exemple. On traite l'un des cas, à titre d'illustration.

- Cas $(2, 3, 3)$ (tétraèdre). L'orbite ω_3 est de cardinal $12/3 = 4$, notons x_1, x_2, x_3, x_4 ses éléments. On peut de plus supposer que x_1 et x_2 ne sont pas symétriques par rapport à l'origine. Il existe une rotation $r \in \text{Stab}(x_1)$ d'ordre 3 (par la formule $|\text{Stab}| |\text{Orb}| = 12$), et donc quitte à réordonner on a $x_3 = r(x_2)$, $x_4 = r^{-1}(x_2)$. En particulier les points x_2, x_3, x_4 sont équidistants de x_1 . Comme on peut faire le même raisonnement pour chaque x_i , on obtient que x_1, x_2, x_3, x_4 sont les sommets d'un tétraèdre régulier préservé par G . Par ailleurs on sait que le groupe des rotations préservant un tétraèdre est d'ordre 12, notre groupe G étant d'ordre 12 il est donc égal au groupe du tétraèdre (isomorphe à A_4 , qui est l'unique sous-groupe d'indice 2 dans S_4).

En guise de conclusion :

Remarque. A noter que le groupe S_4 intervient à la fois comme $\text{Isom}^+(\text{cube})$ et comme $\text{Isom}(\text{tétraèdre})$. Il est instructif de transposer dans chacun de ces 3 points de vue tout ce que l'on sait sur ce groupe (classes de conjugaison, sous-groupes d'ordre donné, etc...)

6. BARYCENTRES EN GÉOMÉTRIE AFFINE

Soit \mathcal{E} un espace affine sur un \mathbf{k} -espace vectoriel E . Soient $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{E}$ des points et $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des scalaires. Étudions la fonction

$$\begin{aligned} \varphi: \mathcal{E} &\rightarrow E \\ M &\mapsto \sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{A_i M} \end{aligned}$$

Choisissons un point auxiliaire $O \in \mathcal{E}$, et posons

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{A_i O}, \quad \lambda = \sum_{i=1}^k \lambda_i.$$

On obtient

$$\varphi(M) = \vec{a} + \lambda \overrightarrow{OM}.$$

On voit que φ est constante égale à \vec{a} si $\lambda = 0$, et est une bijection sinon (homothétie-translation). Dans ce deuxième cas, il existe un unique point $G \in \mathcal{E}$ tel que $\varphi(G) = \vec{0}$, ce qui revient aux conditions équivalentes suivantes :

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = 0 \tag{1}$$

$$\lambda \overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{OA_i} \tag{2}$$

Définition. On dit que $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ est un **système massique**, que $\lambda = \sum_{i \in I} \lambda_i$ et la masse totale, et que G est le **barycentre** de ce système (uniquement défini dans le cas $\lambda \neq 0$, et non défini sinon). On note $G = \text{bar}((A_i, \lambda_i) \mid i \in I)$. (Combes parle de famille de points pondérés, c'est synonyme).

Remarque. Noter que le barycentre reste inchangé si l'on multiplie tous les poids par un même scalaire $t \neq 0$.

Proposition 31 (associativité du barycentre). *Soit $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ un système massique de masse totale $\lambda \neq 0$. Soit $I = \cup_{p=1}^s I_p$ une partition de I , et supposons que pour chaque $p = 1, \dots, s$ on a $\mu_p = \sum_{i \in I_p} \lambda_i \neq 0$. Posons $G_p = \text{bar}((A_i, \lambda_i) \mid i \in I_p)$. Alors le barycentre du système $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ est aussi le barycentre du système $(G_p, \mu_p)_{1 \leq p \leq s}$.*

Preuve. En utilisant les deux caractérisations du barycentre :

$$\vec{0} = \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \sum_{i=1}^p \left(\sum_{i \in I_p} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} \right) = \sum_{p=1}^s \mu_p \overrightarrow{GG_p}. \quad \square$$

Exemple. Soit $T \subset \mathbb{R}^3$ un tétraèdre (quelconque), de sommets non coplanaires A_1, A_2, A_3, A_4 . Pour $i = 1, \dots, 4$ notons G_i l'isobarycentre des 3 sommets distincts de A_i , et D_i la droite passant par A_i et G_i . Alors ces 4 droites plus les 3 droites passant par des milieux d'arêtes opposées sont concourantes (en l'isobarycentre des A_i).

On peut caractériser les applications affines à l'aide de la notion de barycentre :

Théorème 32 ([Com98, p.135]). *Une application $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ est affine si et seulement si elle préserve les barycentres.*

Preuve. Supposons f affine. Le barycentre G d'un système massique (A_i, λ_i) est caractérisé par l'égalité $\vec{0} = \sum \lambda_i \overrightarrow{GA_i}$. En appliquant f , et en notant avec des primes les images des points, on obtient

$$\vec{0}' = v_f(\vec{0}) = \sum \lambda_i \overrightarrow{G'A'_i},$$

et donc $G' = f(G)$ est le barycentre du système massique (A'_i, λ_i) .

Réciproquement, supposons que f préserve les barycentres. Étant fixé un point $A \in \mathcal{E}$ d'image $A' = f(A) \in \mathcal{E}'$, on définit une application $v: E \rightarrow E'$ en notant $v(\vec{x})$ le vecteur de E' tel que $f(A + \vec{x}) = A' + v(\vec{x})$. Il s'agit de montrer que v est linéaire. Soit $\vec{x}, \vec{y} \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{k}$, et notons $M = A + \vec{x}$, $N = A + \vec{y}$. Le barycentre G de $(A, 1 - \lambda - \mu), (M, \lambda), (N, \mu)$ vérifie

$$\overrightarrow{AG} = \lambda \overrightarrow{AM} + \mu \overrightarrow{AN} = \lambda \vec{x} + \mu \vec{y}$$

Par hypothèse, son image G' est le barycentre de $(A', 1 - \lambda - \mu), (M', \lambda), (N', \mu)$, d'où la relation

$$\overrightarrow{A'G'} = \lambda \overrightarrow{A'M'} + \mu \overrightarrow{A'N'} = \lambda v(\vec{x}) + \mu v(\vec{y}).$$

Puisque $v(\overrightarrow{AG}) = \overrightarrow{A'G'}$, on en déduit la relation attendue

$$v(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}) = \lambda v(\vec{x}) + \mu v(\vec{y}). \quad \square$$

On peut également caractériser les sous-espaces affines. Rappelons qu'étant donnée une partie A d'un espace affine \mathcal{E} , le sous-espace affine \mathcal{F} engendré par A est défini comme l'intersection de tous les sous-espaces affines contenant A .

Proposition 33 (version simplifiée de [Com98, p.136]). *Le sous-espace affine engendré par une partie (non vide) $A \subset \mathcal{E}$ est égal à l'ensemble des barycentres de points de A .*

Preuve. Notons \mathcal{F} le plus petit sous-espace affine contenant A , F sa direction, \mathcal{L} l'ensemble des barycentres de points de A , et $O \in A$ un choix de point.

Soit (A_i, λ_i) un système massique constitué de point de A avec $\sum \lambda_i \neq 0$, alors le barycentre G associé est dans \mathcal{F} car

$$\overrightarrow{OG} = \sum \lambda_i \overrightarrow{OA_i} \in F.$$

On a donc $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}$, reste à voir que \mathcal{L} est un sous-espace affine. Pour cela, il suffit de montrer que pour tous $G, G' \in \mathcal{L}$, $t, t' \in \mathbf{k}$, $O + t\overrightarrow{OG} + t'\overrightarrow{OG'} \in \mathcal{F}$.

Mais si (A_i, λ_i) et (A'_j, λ'_j) sont deux systèmes massiques, de barycentres respectifs G et G' , alors

$$t\overrightarrow{OG} + t'\overrightarrow{OG'} = \overrightarrow{OG''}$$

où $G'' \in \mathcal{L}$ est le barycentre du système massique $(A_i, t\lambda_i) \cup (A'_j, t'\lambda'_j) \cup (O, 1 - t\lambda - t'\lambda')$. \square

Enfin la notion de repère affine combinée à celle de barycentre donne des coordonnées barycentriques. Si \mathcal{E} est un espace affine, et A_0, \dots, A_n est un repère affine, alors tout point $M \in \mathcal{E}$ est le barycentre d'un système massique (A_i, λ_i) pour un choix de poids de somme $\sum \lambda_i \neq 0$. On dit que les λ_i qui sont bien définis à une constante multiplicative près, sont les **coordonnées barycentriques** de M par rapport au repère des A_i . Il est courant de normaliser en demandant que $\sum \lambda_i = 1$.

7. CONVEXITÉ, GÉNÉRALITÉS

[RW10, Chapitre 5].

Soit \mathcal{E} un espace affine réel.

Une partie C de \mathcal{E} est dite **convexe** si pour tous $M, N \in C$ et tout $\lambda \in [0, 1]$, le barycentre $\text{bar}((M, 1 - \lambda), (N, \lambda))$ est dans C , ce qui revient à dire $M + \lambda\overrightarrow{MN} \in C$.

Une **combinaison convexe** de points de \mathcal{E} est un barycentre $\text{bar}((A_i, \lambda_i) \mid i = 1, \dots, n)$ pour une famille finie de points $A_i \in \mathcal{E}$ et des poids $\lambda_i \geq 0$ de somme $\sum \lambda_i = 1$.

Une **combinaison affine** est définie de façon similaire, en enlevant juste la condition $\lambda_i \geq 0$. La dernière proposition montrait qu'un espace est affine si et seulement si il est stable par combinaison affine, et de même :

Lemme 34. *Une partie $C \subset \mathcal{E}$ est convexe si et seulement si elle est stable par combinaison convexe.*

Preuve. Le sens \Leftarrow est immédiat, et pour le sens direct l'associativité du barycentre permet une récurrence sur le nombre de points intervenant dans la combinaison convexe :

Si $G = \text{bar}(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ avec $\sum \lambda_i = 1$, $|I| \geq 3$, on peut supposer les $\lambda_i > 0$, et donc G est le barycentre des deux points (A_1, λ_1) et (G', λ') où G' est le barycentre du système $(A_i, \lambda_i)_{i \geq 2}$, et $\lambda' = \sum_{i \geq 2} \lambda_i$. \square

Si $X \subset \mathcal{E}$, l'**enveloppe convexe** de X , notée $\text{Conv } X$, est le plus petit convexe contenant X .

Lemme 35. *L'enveloppe convexe de X est égal à l'ensemble des combinaisons convexes de points de X .*

Preuve. L'ensemble de telles combinaisons convexes est contenu dans tout convexe contenant X , et forme un convexe par associativité du barycentre. \square

Un point $p \in C$ d'un convexe est dit **extrémal** s'il vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes. On notera $\text{Extr}(C)$ l'ensemble des points extrémaux d'un convexe C .

Lemme 36 ([Com98, p. 143]). Soit $C \subset \mathcal{E}$ un convexe, et $p \in C$. Sont équivalents :

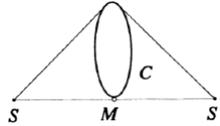
- (1) p n'est pas le milieu de deux points distincts de C :
- (2) p n'est pas une combinaison convexe de $n \geq 2$ points distincts de C avec poids > 0 .
- (3) $C \setminus \{p\}$ est convexe.

Preuve. (1) \implies (2), par contraposée. Si p est combinaison convexe de $n \geq 2$ points distincts de C avec poids > 0 , par associativité du barycentre on peut supposer $n = 2$ et écrire $p = \text{bar}((a, \lambda), (b, 1 - \lambda))$ pour $a, b \in C$ et $\lambda \in]0, 1[$. Donc $p \in]a, b[$, et en intersectant avec un petit cercle de rayon ε centré en p on trouve deux points de C dont le milieu est p .

(2) \implies (3). Soit $a, b \in C \setminus \{p\}$ et $\lambda \in]0, 1[$, par hypothèse le barycentre $\text{bar}((a, \lambda), (b, 1 - \lambda))$ n'est pas égal à p , et donc $C \setminus \{p\}$ est convexe.

(3) \implies (1) : clair par contraposée. \square

Exercice ([Com98, p. 145]). Expliquer pourquoi le convexe de \mathbb{R}^3 représenté ci-dessous admet un ensemble de points extrémaux qui n'est pas fermé.



Soit $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}$ un hyperplan affine, passant par un point A et de direction $\ell^{-1}(0)$, où ℓ est une forme linéaire sur E . Un tel hyperplan (avec un choix de ℓ) détermine deux **demi-espaces** $\mathcal{H}^+ = \{A + \vec{x} \mid \ell(\vec{x}) \geq 0\}$ et $\mathcal{H}^- = \{A + \vec{x} \mid \ell(\vec{x}) \leq 0\}$ qui sont chacun fermés convexes (avec des inégalités strictes on définit des ouverts convexes).

De façon équivalente, on peut introduire la forme affine $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(M) = \ell(\overrightarrow{AM})$, et poser $\mathcal{H} = f^{-1}(0)$, $\mathcal{H}^+ = f^{-1}([0, +\infty[)$, $\mathcal{H}^- = f^{-1}(]-\infty, 0])$.

On dit que \mathcal{H} est un **hyperplan d'appui** d'un convexe C si \mathcal{H} contient un point de C et C est contenu dans l'un des demi-espaces délimités par \mathcal{H} . (Par convention on peut choisir ℓ pour avoir $C \subset \mathcal{H}^+$).

Théorème 37 (Hahn-Banach géométrique, [RW10, p. 725]). Soient \mathcal{E} un espace affine réel de dimension fini, A un ouvert convexe de \mathcal{E} , et \mathcal{L} un sous-espace affine de \mathcal{E} tel que $A \cap \mathcal{L} = \emptyset$. Alors il existe un hyperplan $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}$ tel que $\mathcal{L} \subset \mathcal{H}$ et $A \cap \mathcal{H} = \emptyset$.

Preuve. On suppose A non vide et $\text{codim } \mathcal{L} \geq 2$, sinon il n'y a rien à montrer.

Commençons par le cas où \mathcal{L} est un point dans un plan \mathcal{E} . On vectorialise en prenant $\mathcal{L} = 0$ comme origine, on munit \mathcal{E} d'une structure euclidienne et on note S^1 le cercle de centre 0 et rayon 1. On projette radialement A sur S^1 (c'est une application continue et ouverte) :

$$a \in A \mapsto \frac{a}{\|a\|} \in S^1.$$

L'image de A est un arc ouvert de longueur au plus π , car ne contenant pas deux points opposés. Soit x l'une des deux extrémités de cet arc. La droite \mathcal{H} passant par x et l'origine répond à la question dans ce cas.

Considérons maintenant le cas $\dim \mathcal{E} \geq 3$. Soit \mathcal{M} un sous-espace affine de \mathcal{E} de dimension maximale contenant \mathcal{L} et disjoint de A . Supposons $\dim \mathcal{M} \leq \dim \mathcal{E} - 2$, et cherchons une contradiction. Soit \mathcal{F} un supplémentaire de \mathcal{M} dans \mathcal{E} , notons $\{O\} = \mathcal{M} \cap \mathcal{F}$ et $p: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ la projection sur \mathcal{F} parallèlement à \mathcal{M} . Comme $\dim \mathcal{F} \geq 2$, on

peut choisir $\mathcal{P} \subset \mathcal{F}$ un plan contenant O . $p(A) \cap \mathcal{P}$ est un ouvert convexe de \mathcal{P} ne contenant pas O . Par la première partie de la preuve il existe une droite $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ passant par O et ne rencontrant pas $p(A) \cap \mathcal{P}$. Alors $p^{-1}(\mathcal{D})$ est un sous-espace de \mathcal{E} contenant strictement $\mathcal{M} = p^{-1}(O)$ et ne rencontrant pas A , on contredit ainsi la maximalité de \mathcal{M} . \square

Corollaire 38 (preuve alternative à [Szp09, p. 131]). *Soit $C \subset \mathcal{E}$ un convexe fermé d'un espace affine réel de dimension finie. Alors pour tout point P dans la frontière de C il existe un hyperplan d'appui passant par P .*

Preuve. Appliquer le théorème 37 avec $\mathcal{L} = \{P\}$ et A l'intérieur de C . \square

Une **face** d'un convexe $C \subset \mathcal{E}$ est un sous-ensemble $F \subseteq C$ tel que si $a \in F$ est une combinaison convexe de point x_i de C , alors les x_i sont dans C . (noter que l'ensemble vide est une face).

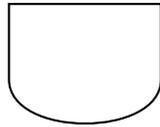
Une **face exposée** d'un convexe $C \subset \mathcal{E}$ d'intérieur non vide est l'intersection de C avec un hyperplan ne rencontrant pas l'intérieur de C . Autrement dit, une face exposée (non vide) de C est l'intersection de C avec un hyperplan d'appui. Le lemme 39 justifiera la terminologie en montrant qu'une face exposée est bien une face.

Signalons deux notions voisines de celle de point extrémal. Un **sommet** d'un convexe C est un point p dans ∂C tel que l'intersection de tous les hyperplans d'appui en p soit égale à $\{p\}$. Un point p de ∂C est **exposé** s'il existe un hyperplan d'appui \mathcal{H} tel que $\mathcal{H} \cap C = \{p\}$. Cela revient à dire que $\{p\}$ est une face exposée.

Exercice ([RW10, p. 731]). Soit C un convexe et $p \in \partial \mathcal{P}$. Montrer les implications

$$p \text{ sommet} \implies p \text{ exposé} \implies p \text{ extrémal},$$

et montrer que les réciproques sont fausses en général, à l'aide de la figure



Lemme 39 ([Szp09, p. 129]). *Si un hyperplan d'appui \mathcal{H} d'un convexe C contient une combinaison convexe de poids strictement positifs de points $M_i \in C$, alors les M_i sont dans \mathcal{H} . En particulier une face exposée de C est une face, et toute intersection de C avec une collection d'hyperplans d'appui est une face.*

Preuve. Choisissons $\ell = 0$ la direction de \mathcal{H} de façon à avoir $C \subset \mathcal{H}^+$, et notons A un point de \mathcal{H} . Si $G = \text{bar}(M_i, \lambda_i)$, on a $\overrightarrow{AG} = \sum \lambda_i \overrightarrow{AM_i}$, et donc $G \in \mathcal{H}$ donne

$$\vec{0} = \ell(\overrightarrow{AG}) = \sum \lambda_i \ell(\overrightarrow{AM_i})$$

Comme $\lambda_i > 0$ et $\ell(\overrightarrow{AM_i}) \geq 0$ pour tout i , on obtient $\ell(\overrightarrow{AM_i}) = 0$, c'est-à-dire $M_i \in \mathcal{H}$. \square

Lemme 40. *Si $C \subset \mathbb{R}^n$ est un convexe et \mathcal{H} est un hyperplan d'appui, alors*

$$\text{Extr}(C \cap \mathcal{H}) = \text{Extr}(C) \cap \mathcal{H}.$$

Preuve. L'inclusion \supseteq est claire (et en fait valable pour \mathcal{H} un hyperplan quelconque). Pour l'inclusion réciproque, soit $a \in \text{Extr}(C \cap \mathcal{H})$, et supposons que a est le milieu de $x, y \in C$. Par le lemme 39 on a $x, y \in \mathcal{H}$, par extrémalité de a dans $C \cap \mathcal{H}$ on en déduit $x = y = a$, ce qui donne l'extrémalité de a comme point de C . \square

Théorème 41 (Krein-Millman en dimension finie, [RW10, p. 733]). *Tout convexe compact dans un espace affine de dimension finie est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.*

Preuve. Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un convexe compact, et $\text{Extr}(K)$ l'ensemble de ses points extrémaux. Si $n = 1$, K est un intervalle et le résultat est clair. Procédons maintenant par récurrence sur n . Soit $a \in \partial K$, et \mathcal{H} un hyperplan d'appui en a . Par hypothèse de récurrence, et par le lemme 40,

$$K \cap \mathcal{H} = \text{Conv}(\text{Extr}(K \cap \mathcal{H})) = \text{Conv}(\text{Extr}(K) \cap \mathcal{H}).$$

Le lemme 39 donne alors $\text{Conv}(\text{Extr}(K) \cap \mathcal{H}) = \text{Conv}(\text{Extr}(K)) \cap \mathcal{H}$, et finalement $a \in \text{Conv}(\text{Extr}(K))$. Comme tout point b de l'intérieur de K est le barycentre de deux points a, a' de la frontière, le résultat suit. \square

Remarque. On peut envisager d'affaiblir l'hypothèse "compact" qui n'est pas optimale, mais on ne peut pas la supprimer totalement : un demi-espace fermé est convexe mais n'admet aucun point extrémaux...

Terminons par le résultat suivant, intuitivement clair :

Lemme 42 (Principe du segment). *Soit $C \subset \mathcal{E}$ un convexe d'un espace affine réel de dimension finie. Si $a \in C$ et $b \in \overset{\circ}{C}$, alors tout point $c \in]a, b[$ est aussi dans $\overset{\circ}{C}$.*

Preuve. Soit $h: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ l'homothétie uniquement déterminée par les conditions $h(a) = a$ et $h(b) = c$. Son rapport est $\lambda \in]0, 1[$. Alors $h(C)$ est un voisinage de $c = h(b)$, et $h(C) \subset C$, donc C est un voisinage de c comme attendu. \square

8. RETOUR SUR LES POLYÈDRES CONVEXES

[RW10, p. 758].

On travaille dans \mathbb{R}^n muni de sa structure affine canonique. On va définir les polyèdres de façon duale à celle utilisée pour notre étude en dimension 3 : intersection de demi-espaces, au lieu d'enveloppe convexe de points (point de vue "équation" par opposition à "paramétré").

Définition. On appelle **polyèdre** toute intersection finie de demi-espaces fermés de \mathbb{R}^n . Un **polytope** est un polyèdre compact. Si $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ est un polyèdre d'intérieur non vide, on dit que $\mathcal{P} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{H}_i^+$ est une **écriture minimale** s'il n'existe aucun sous-ensemble strict d'indices $J \subsetneq I$ tel que $\mathcal{P} = \bigcap_{i \in J} \mathcal{H}_i^+$. On peut adapter cette définition au cas où \mathcal{P} est d'intérieur vide, en travaillant dans le sous-espace affine engendré par \mathcal{P} .

Théorème 43. *Soit $\mathcal{P} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{H}_i^+ \subset \mathbb{R}^n$ une écriture minimale d'un polyèdre d'intérieur non vide. Pour tout $i \in I$, notons $\mathcal{F}_i = \mathcal{P} \cap \mathcal{H}_i$ (**facette**). Alors :*

- (1) \mathcal{F}_i est un polyèdre d'intérieur non vide dans \mathcal{H}_i (**intérieur relatif**, noté $\text{relint } \mathcal{F}_i$).
- (2) $\partial \mathcal{P} = \bigcup_i \mathcal{F}_i$, et $\bigcup_i \text{relint } \mathcal{F}_i$ est dense dans $\partial \mathcal{P}$.
- (3) L'écriture minimale est unique (à permutation des indices près).

Preuve. (1) Notons $\mathcal{P}_i = \bigcap_{j \neq i} \mathcal{H}_j^+$. Par minimalité de l'écriture de \mathcal{P} , on a une inclusion stricte $\mathcal{P} \subsetneq \mathcal{P}_i$. On peut donc choisir deux points a dans l'intérieur de \mathcal{P} et b dans $\mathcal{P}_i \setminus \mathcal{H}_i^+$. Par le lemme 42, $]a, b[$ est contenu dans l'intérieur de \mathcal{P}_i , et de plus le segment $]a, b[$ coupe l'hyperplan \mathcal{H}_i en un unique point c , qui est donc dans l'intérieur de $\mathcal{P}_i \cap \mathcal{H}_i = \mathcal{P} \cap \mathcal{H}_i = \mathcal{F}_i$.

(2) Par définition $x \in \mathcal{P}$ ssi $f_i(x) \geq 0$ pour tout $i \in I$, pour un certain choix de formes affines f_i définissant les hyperplans \mathcal{H}_i . Le point x est dans l'intérieur de \mathcal{P} ssi toutes ces inégalités sont strictes, et une égalité $f_i(x) = 0$ équivaut à $x \in \mathcal{F}_i \subset \partial\mathcal{P}$.

Si $x \in \mathcal{F}_i$, on choisit $y \in \text{relint } \mathcal{F}_i$, et par le lemme 42 on a $]x, y] \subset \text{relint } \mathcal{F}_i$, d'où la densité.

(3) Soit $\mathcal{P} = \bigcap_{j \in J} \mathcal{H}_j^+$ une écriture minimale. Pour $j \in J$, notons $\mathcal{F}_j' \subset \partial\mathcal{P}$ la facette correspondante, et soit $x \in \text{relint } \mathcal{F}_j'$. Alors pour $r > 0$ petit on a $B(x, r) \cap \partial\mathcal{P} \subset \text{relint } \mathcal{F}_j'$, et donc par densité il existe $i \in I$ tel que $\text{relint } \mathcal{F}_i \cap \text{relint } \mathcal{F}_j' \neq \emptyset$, ce qui implique $\mathcal{H}_i = \mathcal{H}_j'$. Ainsi l'ensemble des \mathcal{H}_j' est un sous-ensemble de celui des \mathcal{H}_i , d'où égalité par hypothèse de minimalité sur les \mathcal{H}_i . □

Définition. Soit $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ un polyèdre d'intérieur non vide. On appelle **n -face** de \mathcal{P} le polyèdre lui-même. Les **$(n - 1)$ -faces** sont les facettes uniquement déterminées grâce au théorème. Ensuite pour $0 \leq k < n$, on appelle **k -face** une facette d'une $(k + 1)$ -face de \mathcal{P} . Les 0-faces et 1-faces sont aussi appelées sommets et arêtes, et par convention l'ensemble vide est l'unique (-1) -face.

Lemme 44 ([RW10, p. 736]). *Soit $C \subset \mathcal{E}$ un convexe non vide d'un espace affine de dimension finie.*

- (1) *Si F est une face de C , et $A \subset C$ est convexe tel que $\text{relint } A \cap F \neq \emptyset$, alors $A \subseteq F$.*
- (2) *Si F, F' sont deux faces distinctes de C , leurs intérieurs relatifs sont disjoints.*

Preuve. (1) Par hypothèse il existe $a \in \text{relint } A \cap F$. Soit $x \in A$, on veut montrer $x \in F$. Si $x = a$ c'est fini, et sinon il existe $y \in A \subset F$ tel que $a \in]x, y[$, et comme F est une face cela implique $x, y \in F$.

(2) Par contraposée : si $\text{relint } F \cap \text{relint } F' \neq \emptyset$, le point précédent donne $F \subseteq F'$ et $F' \subseteq F$. □

Lemme 45 ([Szp09, p. 139]). *Soit $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}$ un polyèdre d'intérieur non vide, et $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ un sous-espace affine tel que $\mathcal{A} \cap \mathcal{P}$ soit d'intérieur non vide dans \mathcal{A} . Alors toute facette de $\mathcal{A} \cap \mathcal{P}$ est de la forme $\mathcal{A} \cap \mathcal{P} \cap \mathcal{H}_i$ où $\mathcal{P} \cap \mathcal{H}_i$ est l'une des facettes de \mathcal{P} .*

Preuve. On écrit $\mathcal{P} = \bigcap \mathcal{H}_i^+$. Comme $\mathcal{A} \cap \mathcal{P} = \mathcal{A} \cap \bigcap \mathcal{H}_i^+$ est non vide par hypothèse, chaque $\mathcal{A} \cap \mathcal{H}_i^+$ est ou bien \mathcal{A} , ou bien un demi-espace de \mathcal{A} délimité par $\mathcal{A} \cap \mathcal{H}_i$. Donc $\mathcal{A} \cap \mathcal{P}$ est un polyèdre défini par une famille minimale $\bigcap \mathcal{A} \cap \mathcal{H}_j^+$, pour $j \in J \subset I$. Les facettes de $\mathcal{A} \cap \mathcal{P}$ sont donc les $\mathcal{A} \cap \mathcal{P} \cap \mathcal{H}_j$. □

Proposition 46 ([RW10, p. 762]). *Soit $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ un polyèdre d'intérieur non vide.*

- (1) *Pour tout $0 \leq k \leq n$, les k -faces sont en nombre fini.*
- (2) *\mathcal{P} est l'union disjointe des intérieurs relatifs des k -faces, où k parcourt $1, \dots, n$. En particulier toute face de \mathcal{P} est une k -face pour un certain k .*
- (3) *Pour tout $a \in \partial\mathcal{P}$, l'intersection des hyperplans d'appui en a coïncide avec l'intersection des \mathcal{H}_i contenant a . (ceci justifie d'appeler les 0-faces des sommets).*
- (4) *Tout point extrémal de \mathcal{P} est une 0-face.*

Preuve. Le théorème 43 donne la finitude des $(n - 1)$ -faces, et on obtient ainsi (1) par récurrence sur n .

De même le point (2) est clair en dimension $n = 0$ (un point est égal à son intérieur relatif), et on procède ensuite par récurrence sur n , grâce au théorème 43 qui permet décrire \mathcal{P} comme l'union de l'intérieur de l'unique n -face et des $(n - 1)$ -faces (ou facettes).

(3). Si $a \in \partial\mathcal{P}$, notons \mathcal{F} l'unique k -face contenant a dans son intérieur relatif. Par le lemme 45, il existe une suite de faces emboîtées $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{n-k} \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_0 = \mathcal{P}$ tel que la face \mathcal{F} soit l'intersection des \mathcal{H}_i correspondant. L'intersection de tous les hyperplans d'appui passant par a (ou de façon intermédiaire les \mathcal{H}_i passant par a) est une face contenue dans \mathcal{F} : en fait elle est égale, sinon a serait au bord de \mathcal{F} , contradiction.

(4) : Tout point a contenu dans l'intérieur relatif d'une k -face, $k \geq 1$, est le milieu de deux points contenus dans l'intérieur de cette même face, donc n'est pas extrémal. \square

9. BONUS : DEUX THÉORÈMES CLASSIQUES (CARATHÉODORY ET HELLY)

Théorème 47 (Carathéodory). *Soit \mathcal{E} un espace affine de dimension $n > 0$, et A une partie non vide de \mathcal{E} . L'enveloppe convexe de A est égale à l'ensemble des combinaisons convexes d'au plus $n + 1$ points de A .*

Preuve. Soit M un point de l'enveloppe convexe de A , il s'agit de montrer que M est combinaison convexe d'au plus $n + 1$ points de A . Par définition de l'enveloppe convexe on sait que M est combinaison convexe de $s + 1$ points P_0, \dots, P_s de A . Supposons que $s > n$, il suffit de montrer que M est aussi combinaison convexe de s points parmi les P_i .

On choisit un point O quelconque de \mathcal{E} , et on écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{i=0}^s \lambda_i \overrightarrow{OP_i}$$

avec les $\lambda_i \geq 0$ et de somme $\sum \lambda_i = 1$. En fait on peut supposer les $\lambda_i > 0$, sinon il n'y a rien à montrer.

Comme $s > n$ les vecteurs $\overrightarrow{OP_1}, \dots, \overrightarrow{OP_s}$ sont liés : il existe des α_i non tous nul tel que

$$\sum_{i=1}^s \alpha_i \overrightarrow{OP_i} = 0$$

Quitte à changer le signe de tous les α_i , on peut supposer que l'un des α_i est strictement négatif.

Maintenant considérons les combinaisons (où $t \geq 0$) :

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{i=0}^s \lambda_i \overrightarrow{OP_i} + t \sum_{i=1}^s \alpha_i \overrightarrow{OP_i} = \lambda_0 \overrightarrow{OP_0} + \sum_{i=1}^s (\lambda_i + t\alpha_i) \overrightarrow{OP_i}.$$

Si $\alpha_i \geq 0$ on a bien sûr $\lambda_i + t\alpha_i > 0$ pour tout $t \geq 0$.

Si $\alpha_i < 0$, alors $\lambda_i + t\alpha_i \geq 0$ équivaut à $\frac{\lambda_i}{-\alpha_i} \geq t$. Posons $t_0 = \min \left\{ \frac{\lambda_i}{-\alpha_i}; \alpha_i < 0 \right\}$. Alors $\lambda_i + t_0\alpha_i \geq 0$ pour tout i et est nul pour au moins un indice i (celui ou ceux réalisant le min). On a ainsi exprimé M comme combinaison convexe (car $\lambda_0 > 0$, donc on échappe au cas où tous les coeff seraient devenus nul) d'au plus s points, comme attendu. \square

Corollaire 48. *L'enveloppe convexe d'un compact dans un espace affine \mathcal{E} de dimension finie n est compacte.*

Preuve. Soit K un compact de \mathcal{E} . Notons S le simplexe standard de dimension $n + 1$, qui est aussi compact :

$$S = \left\{ t = (t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1}; t_i \geq 0, \sum t_i = 1 \right\}$$

On considère l'application

$$f: K \times \dots \times K \times S \rightarrow \mathcal{E}$$

$$(P_0, \dots, P_n, t) \mapsto \sum_{i=0}^n t_i P_i$$

Par le théorème de Carathéodory l'image de f est égale à l'enveloppe convexe de K , et f est une application continue donc envoie compact sur compact. \square

Théorème 49 (Helly). *Soit \mathcal{E} un espace affine réel de dimension n et $\{C_i\}_{i \in I}$ une famille finie, de cardinal au moins $n + 1$, de parties convexes de \mathcal{E} , telle que toute sous-famille à $n + 1$ éléments soit d'intersection non vide. Alors $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$.*

Lemme 50 (Radon). *Soient \mathcal{E} un espace affine réel de dimension n , et $A \subset E$ un ensemble de cardinal au moins égal à $n + 2$. Alors il existe deux sous-ensembles disjoints A_1, A_2 dans A tels que $\text{Conv}(A_1) \cap \text{Conv}(A_2) \neq \emptyset$.*

Preuve. Soient x_0, \dots, x_{n+1} des points distincts de A . Les vecteurs $\overrightarrow{x_0 x_i}$, $i = 1, \dots, n+1$ sont liés, il existe donc des réels α_i non tous nuls tels que

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \overrightarrow{x_0 x_i} = 0.$$

Posons $\alpha_0 = -\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i$, alors on a

$$\sum_{i=0}^{n+1} \alpha_i \overrightarrow{x_0 x_i} = 0.$$

Comme les α_i sont non tous nuls et de somme nulle, les ensemble

$$I_1 = \{i = 0, \dots, n+1; \alpha_i > 0\} \text{ et } I_2 = \{i = 0, \dots, n+1; \alpha_i < 0\}$$

sont tous deux non vides. Posons $A_k = \{x_i; i \in I_k\}$ pour $k = 1, 2$. On obtient

$$\sum_{i \in I^+} \alpha_i \overrightarrow{x_0 x_i} = \sum_{j \in I^-} -\alpha_j \overrightarrow{x_0 x_j} \in \text{Conv}(A_1) \cap \text{Conv}(A_2). \quad \square$$

Preuve du théorème. Soit $m \geq n + 1$, et considérons $\{C_h\}_{1 \leq h \leq m}$ une famille de parties convexes de E , telle que toute sous-famille de cardinal $n + 1$ soit d'intersection non vide. On cherche à montrer que l'intersection de tous les C_h est non vide; on procède par récurrence sur m , le cas $m = n + 1$ étant clair. Par hypothèse de récurrence, pour tout $1 \leq k \leq m$ il existe un point

$$a_k \in \bigcap_{1 \leq h \leq m, h \neq k} C_h.$$

Soit A l'ensemble de ces points a_k . S'il existe deux indices $i \neq j$ tel que $a_i = a_j$, alors ce point a_i appartient à tous les C_h . Si par contre les a_k sont deux à deux distincts, on peut appliquer le lemme de Radon et obtenir $A_1 = \{a_i; i \in I_1\}$, $A_2 = \{a_j; j \in I_2\}$ deux sous-parties disjointes dont les enveloppes convexes se rencontrent.

Pour tout $i \in I_1$, on a $a_i \in \bigcap_{h \notin I_1} C_h$, et donc $\text{Conv}(A_1) \subset \bigcap_{h \notin I_1} C_h$. De même $\text{Conv}(A_2) \subset \bigcap_{h \notin I_2} C_h$. Soit $a \in \text{Conv}(A_1) \cap \text{Conv}(A_2)$, alors $a \in \bigcap_{1 \leq h \leq m} C_h$. \square

Une application combinatoire :

Proposition 51. Soient \mathcal{E} un plan affine, et $(S_i)_{i \in I}$ une famille (de cardinal au moins 3) de segments parallèles deux à deux distincts, admettant trois à trois une sécante commune. Alors la famille entière admet une sécante commune.

Preuve. On vectorialise \mathcal{E} en choisant un repère (\vec{e}_1, \vec{e}_2) tel que \vec{e}_2 soit la direction commune des S_i . A chaque S_i on associe l'ensemble C_i des $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que la droite d'équation $y = ax + b$ rencontre S_i . C_i est un convexe (bande délimitée par deux droites parallèles), et l'hypothèse signifie que les C_i s'intersectent trois à trois. Par le théorème de Helly il existe $(a, b) \in \bigcap_{i \in I} C_i$, et la droite $y = ax + b$ est une sécante commune à tous les S_i . \square

10. UN PEU DE GÉOMÉTRIE PLANE

ref : [Aud06, Chapitre III]

On travaille dans un plan euclidien (vectoriel, puis un peu plus loin affine).

Fait 52. Étant donnés deux vecteurs unitaires du plan euclidien \mathbb{R}^2 , il existe une unique rotation envoyant l'un sur l'autre.

Remarque. Dans \mathbb{R}^3 (ou en dimension $n \geq 3$), on a toujours l'existence, mais plus l'unicité...

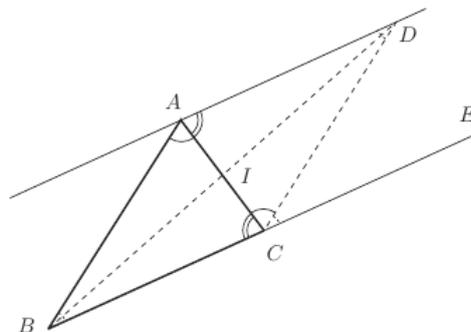
Définition. On appelle **angle orienté** un couple de vecteurs unitaire de \mathbb{R}^2 modulo action du groupe $\text{SO}(\mathcal{P})$ des rotations. Si e_1, e_2 est une base orthonormée directe de \mathcal{P} , si u, v est un couple de vecteurs unitaires, et si r est l'unique rotation envoyant u sur v , alors la matrice de r dans n'importe quelle base orthonormée est $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, et on dit que θ , bien défini à un multiple entier de 2π près, est la **mesure de l'angle orienté** représenté par u, v .

Remarque. On a une action simplement transitive de $\text{SO}_2(\mathbb{R})$ sur les angles orientés, ce qui permet de munir l'ensemble des angles orientés d'une structure de groupe : voir diagramme page 10.

Remarque. Cette façon de définir un invariant (angle) à partir d'une action est aussi à la base de la notion de birapport, pour l'action 3 fois transitive de $\text{GL}_2(\mathbf{k})$ sur les droites vectorielles de \mathbf{k}^2 .

Proposition 53. La somme des trois angles d'un triangle dans un plan euclidien est π .

Preuve.



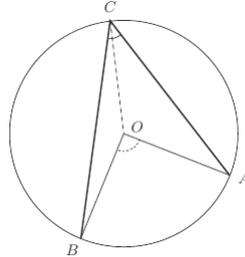
\square

Remarque. La composition des deux rotations d'angle π est une translation.

Proposition 54 (angle inscrit). *Si A, B, C sont trois points distincts d'un cercle de centre O , alors on a l'égalité d'angles*

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$$

Preuve.



Les triangles OAC et OBC sont isocèles, donc

$$\pi = 2(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CO}) + (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}).$$

Par ailleurs

$$2\pi = (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}),$$

d'où

$$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = 2((\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CO}) + (\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CA})) = 2(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) \quad \square$$

Remarque. • Vérifier que la preuve marche aussi pour une figure où O n'est pas à l'intérieur du triangle ABC . Comment interpréter le cas $C = A$ ou B ?

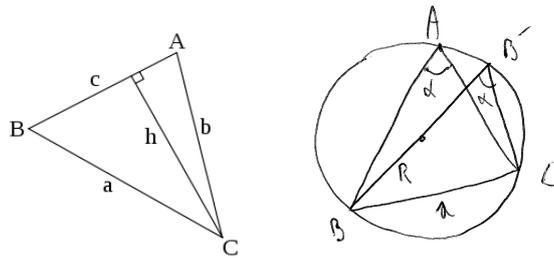
- Un cas particulier important : un triangle dont l'un des côtés est un diamètre est rectangle.

Proposition 55 (loi des sinus). *Dans un triangle ABC d'aire S et de rayon du cercle circonscrit R , avec longueurs de côtés a, b, c et angles α, β, γ , on a*

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = \frac{abc}{2S} = 2R.$$

En particulier, les coordonnées barycentriques (a, b, c) et $(\sin \alpha, \sin \beta, \sin \gamma)$ correspondent à un même point.

Preuve.



En notant h la longueur de la hauteur issue de C , on a

$$\sin \alpha = \frac{h}{b} \text{ et } \sin \beta = \frac{h}{a} \implies b \sin \alpha = a \sin \beta.$$

Comme $S = \frac{ch}{2}$, on obtient aussi

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{ab}{h} = \frac{abc}{2S}.$$

Enfin, en considérant le diamètre BB' , le triangle $B'BC$ est rectangle en C et d'angle α en B' (lemme de l'angle inscrit, deux fois), donc $\sin \alpha = \frac{a}{2R}$ comme attendu. \square

11. REPÈRE AFFINE ET COORDONNÉES BARYCENTRIQUES DANS LE PLAN

En parlant de coordonnées barycentriques dans un triangle du plan, de quelques points remarquables et de leur alignement sur la droite d'Euler, éventuellement à l'aide des nombres complexes, on doit pouvoir obtenir un développement (avec quelques variantes) qui se case au moins dans :

- 161. Distances et isométries d'un espace affine euclidien.
- 181. Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.
- 182. Applications des nombres complexes à la géométrie.

11.1. Coordonnées barycentriques et aires. Ref : [Eid09]

\mathcal{P} un plan affine réel, (A, B, C) les trois sommets d'un triangle non plat (= repère affine).

Pour tout $M \in \mathcal{P}$, il existe $x, y, z \in \mathbb{R}$ avec $x + y + z \neq 0$ tel que M soit le barycentre du système massique $(A, x), (B, y), (C, z)$. On dit que (x, y, z) sont les coordonnées barycentriques de M , elles sont uniquement définies à une constante multiplicative près. Si on normalise en demandant $x + y + z = 1$, et si $\overrightarrow{AM} = u\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{AC}$, alors

$$(x, y, z) = (1 - u - v, u, v).$$

Si \mathcal{P} est euclidien, alors un choix de base orthonormée de E étant fait, on peut calculer l'aire orientée d'un triangle MNP par un calcul de déterminant :

$$\text{Aire}(MNP) = \frac{1}{2} \det(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}).$$

Proposition 56. Soit \mathcal{P} un plan affine euclidien, et ABC un triangle. Pour tout point M les coordonnées barycentriques de M sont données par les aires orientées

$$\text{Aire}(MBC), \text{Aire}(MCA), \text{Aire}(MAB).$$

Preuve. Soit (x, y, z) les coordonnées barycentriques de M . Par définition

$$x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MC} = 0.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} 0 &= \det(\overrightarrow{MA}, x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MC}) \\ &= y \det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + z \det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}), \end{aligned}$$

et donc (changer l'ordre de $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}$ et diviser par 2) :

$$y \text{Aire}(MAB) = z \text{Aire}(MCA).$$

Autrement dit (y, z) est proportionnel à $(\text{Aire}(MCA), \text{Aire}(MAB))$, et les assertions analogues pour (x, y) et (x, z) donnent le résultat. \square

Remarque. Ce résultat se généralise en toute dimension, et en particulier en dimension 1 il se lit : les coordonnées barycentriques (x, y) d'un point M sur une droite AB correspondent aux longueurs signées des vecteurs $\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{AM}$.

11.2. Coordonnées barycentriques de points remarquables. [Eid09, p. 39].

On considère un triangle ABC d'un plan affine euclidien (angles α, β, γ , côtés a, b, c).

Par définition les coordonnées barycentriques de l'isobarycentre G sont $(1, 1, 1)$.

Lemme 57. *Les coordonnées barycentriques du centre I du cercle inscrit sont*

$$(a, b, c) = (\sin \alpha, \sin \beta, \sin \gamma).$$

Preuve. Par la proposition 56 il s'agit de calculer des aires de triangles. L'aire orientée du triangle BIC est $\frac{ra}{2}$, où r est le rayon du cercle inscrit, et le résultat suit. \square

Lemme 58. *Les coordonnées barycentriques du centre O du cercle circonscrit sont*

$$(\sin 2\alpha, \sin 2\beta, \sin 2\gamma) = (a \cos \alpha, b \cos \beta, c \cos \gamma).$$

Preuve. Par la proposition 56 il s'agit de calculer des aires de triangles. Par la proposition 55 (loi des sinus) l'aire du triangle OBC est $\frac{R^2 \sin 2\alpha}{2}$, où R est le rayon du cercle circonscrit, d'où le résultat sous la première forme. La seconde s'en déduit grâce à la loi des sinus qui donne $2R \sin \alpha = a$, avec la relation usuelle $\sin 2\alpha = 2 \cos \alpha \sin \alpha$. \square

Lemme 59. *Les coordonnées barycentriques de l'orthocentre H sont*

$$(\tan \alpha, \tan \beta, \tan \gamma) = (a \cos \beta \cos \gamma, b \cos \alpha \cos \gamma, c \cos \alpha \cos \beta).$$

(La première expression suppose que le triangle n'est pas rectangle, la seconde marche toujours).

Preuve. (On suppose le triangle non rectangle). Soit A' le projeté orthogonal de A sur BC , et h la longueur de la hauteur AA' . On a $\tan \beta = \frac{h}{A'B}$ et $\tan \gamma = \frac{h}{A'C}$, d'où les coordonnées barycentriques de A' sur la droite (BC) :

$$(A'C, A'B) = \left(\frac{1}{\tan \gamma}, \frac{1}{\tan \beta} \right) = (\tan \beta, \tan \gamma)$$

Ainsi les coordonnées de A et A' sont respectivement $(1, 0, 0)$ et $(0, \tan \beta, \tan \gamma)$, donc celles de $H \in (AA')$ sont de la forme $(x, \tan \beta, \tan \gamma)$ pour un certain $x \in \mathbb{R}$. Par symétrie le résultat suit, et la seconde expression en découle par la loi des sinus. \square

11.3. Cercle et droite d'Euler. [Eid09, p. 30]

Soit A, B, C un triangle d'un plan affine euclidien. Notons respectivement G le centre de gravité, H l'orthocentre et O le centre du cercle circonscrit Γ .

Notons G_A, G_B, G_C les milieux respectifs des côtés du triangle. Comme G est le barycentre du système massique $(A, 1), (G_A, 2)$ (et similairement pour B et C), on voit que le triangle G_A, G_B, G_C est l'image de A, B, C par l'homothétie h de centre G et rapport $-1/2$.

Notons Γ' , de centre Ω , l'image par h du cercle Γ centré en O . Le point O est l'intersection des médiatrices du triangle A, B, C , mais celles-ci sont aussi les hauteurs du triangles G_A, G_B, G_C , et donc $O = h(H)$ est l'orthocentre de G_A, G_B, G_C .

(Cela montre aussi au passage l'existence de l'orthocentre).

Proposition 60 (droite d'Euler). *Les point O, G, H sont alignés, et plus précisément : $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.*

Preuve. Puisque $O = h(H)$ on a $\overrightarrow{GO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$, on obtient

$$2\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OH},$$

d'où le résultat. \square

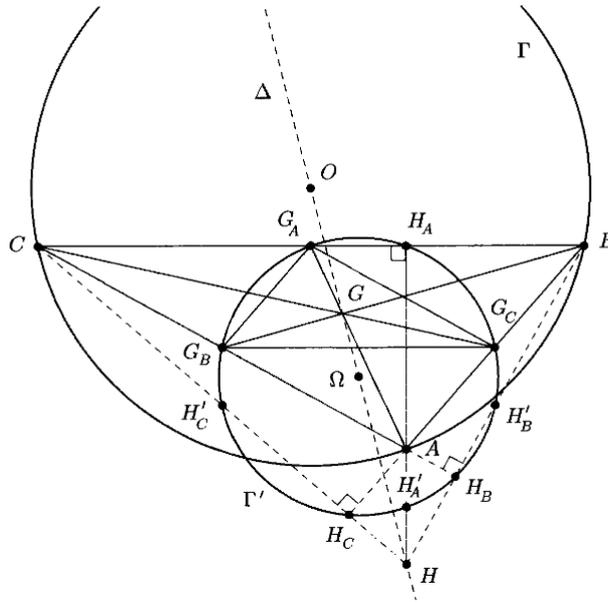


FIGURE 1

Proposition 61 (cercle d'Euler). *Il existe un cercle passant par les neuf points suivants : les milieux de côtés G_A, G_B, G_C , les pieds de hauteur H_A, H_B, H_C , et les milieux des segments joignant H à A, B, C . De plus ce cercle Γ' est l'image de Γ par l'homothétie de centre G et rapport $-1/2$, ou encore l'homothétie de centre H et rapport $1/2$.*

Preuve. Il est immédiat à partir de la relation $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ de voir que les deux définitions de Γ' coïncident, avec centre Ω le milieu de $[O, H]$. Pour voir par exemple que le pied de hauteur H'_A appartient à Γ' , il faut montrer que le symétrique orthogonal de H par rapport à la droite BC est sur Γ . On verra ça un peu plus loin en utilisant les nombres complexes. \square

11.4. Cercle et droite d'Euler bis, via les nombres complexes. On utilise maintenant les nombres complexes, et on note a, b, c les affixes des points A, B, C . Quitte à translater on peut supposer que le centre O du cercle circonscrit correspond au complexe 0, ainsi a, b, c sont de même module R .

Lemme 62 ([Eid09, p. 224]). *L'affixe de G est $\frac{a+b+c}{3}$ est celle de H est $a + b + c$. En particulier on retrouve la relation $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.*

Preuve. L'assertion sur l'affixe z de G découle directement de la caractérisation (2) du barycentre : on doit avoir

$$(a - z) + (b - z) + (c - z) = 0.$$

Pour la deuxième assertion, on pourrait vérifier que le point proposé convient par un calcul d'orthogonalité, mais donnons un argument plus élégant, et qui ne présuppose pas la connaissance de la réponse. Remarquons que la hauteur AH est parallèle à la médiatrice OG_A , où G_A d'affixe $\frac{b+c}{2}$ est le milieu du côté BC . En particulier les affixes z des points M de la hauteur AH sont exactement les complexes de la forme $z = a + \lambda \frac{b+c}{2}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. En prenant $\lambda = 2$, on voit que le point d'affixe $a + b + c$ est sur la hauteur

AH . Par symétrie, il est aussi sur les deux autres hauteurs, et donc c'est bien l'afixe de H . \square

Corollaire 63. *L'afixe du centre Ω du cercle d'Euler est $\frac{a+b+c}{2}$.*

Preuve. Le point Ω est le milieu de $[OH]$. \square

Fin de la preuve du cercle d'Euler. La symétrie orthogonale par rapport à la droite BC est l'application

$$s: z \mapsto b + c - \frac{bc}{R^2} \bar{z}$$

En effet c'est une symétrie orthogonale (car $-\frac{bc}{R^2}$ est de module 1), et on vérifie qu'elle fixe b et c (car $b\bar{b} = c\bar{c} = R^2$). On vérifie alors que l'image de H d'afixe $a + b + c$ est sur le cercle Γ de rayon R :

$$s(a + b + c) = b + c - \frac{bc(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})}{R^2} = -\frac{\bar{a}bc}{R^2}$$

qui est bien de module R . \square

11.5. **Autres.** Equations d'une droite affine dans un plan affine en coordonnées barycentriques : cf [Szp09, p. 110]...

Exercice : point de Lemoine ([Eid09, p. 13])

Exercice : droites parallèles en coordonnées barycentriques.

Exercice : alignement de G , O , H via leurs coordonnées barycentriques ??

12. CONIQUES AFFINES

Ref : [CG13, p. 164]

Définissons d'abord les objets à classifier. Une **conique affine** de \mathbb{R}^2 est un polynôme $f(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ de degré 2 (non nécessairement homogène), à une constante multiplicative près. On peut formaliser en disant qu'une conique affine est une orbite de l'action de \mathbb{R}^* sur les polynômes de degré (exactement) 2 :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}_2[x, y] &\rightarrow \mathbb{R}_2[x, y] \\ \lambda, f(x, y) &\mapsto \lambda f(x, y) \end{aligned}$$

A noter que l'objet géométrique "lieu des zéros" déterminé par f peut éventuellement être vide ou réduit à un point.

Sur \mathbb{R} la fonction détermine entièrement le polynôme :

Lemme 64. *Le morphisme qui a $P(X, Y) \in \mathbb{R}[X, Y]$ associe la fonction sur \mathbb{R}^2 : $(x, y) \mapsto P(x, y)$ est injective. En particulier, toute fonction polynomiale de degré 2 se décompose de façon unique en $f = q + \ell + c$, où q est une forme quadratique, ℓ une forme linéaire et c une constante.*

Preuve. On commence avec le résultat analogue à une variable : un polynôme $P \in \mathbb{R}[T]$ qui correspond à la fonction nulle $x \mapsto P(x)$ est le polynôme nul, car un polynôme non nul a un nombre fini de racines (au plus n , où $n = \deg P$).

Maintenant si $P = \sum a_i(Y)X^i \in \mathbb{R}[X, Y]$ correspond à la fonction nulle, alors pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$ fixé on a $P(T, y_0) = \sum a_i(y_0)T^i$ qui est le polynôme nul, donc les coefficients $a_i(Y)$ qui sont des polynômes en Y admettent y_0 pour racine, et on conclut à nouveau par le résultat à une variable appliqué individuellement à chaque coefficient. \square

Remarque. Sur un corps fini il existe des polynômes non nul qui correspondent à la fonction nulle : $T(T+1)$ sur \mathbb{F}_2 , $T(T-1)(T+1)$ sur \mathbb{F}_3 , etc... Cependant sur un corps \mathbb{F}_q à $q \geq 3$ éléments, tout polynôme de degré 2 non nul correspond à une fonction polynôme non nulle, avec la même preuve que ci-dessus.

Le groupe affine $\text{GA}_2(\mathbb{R}) \simeq \text{GL}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$ agit sur l'ensemble \mathcal{C} des coniques affines par précomposition :

$$\begin{aligned} \text{GA}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{C} &\rightarrow \mathcal{C} \\ (g, f) &\mapsto f(g^{-1}(x, y)) \end{aligned}$$

Cette action préserve le degré, et induit une action de $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ sur la partie quadratique q de f (le vérifier en coordonnées).

On définit une action (congruence projective) du groupe $\mathbb{R}^* \times \text{GL}_2(\mathbb{R})$ sur les formes quadratiques, par $(\lambda, g) \cdot q := \lambda q \circ g^{-1}$.

Noter que sans le λ c'est l'action par congruence "usuelle" : si q est de matrice (symétrique) A , et g est de matrice P , alors

$$q(x) = x^T A x \quad \text{et} \quad q(g^{-1}x) = (P^{-1}x)^T A P^{-1}x = x^T P^{-T} A P^{-1}x.$$

Lemme 65. *L'action de congruence projective sur les formes quadratiques non identiquement nulles de \mathbb{R}^2 admet trois orbites, dont des représentants sont $x^2 + y^2$, $x^2 - y^2$ et x^2 .*

Preuve. L'action par congruence usuelle admet 5 orbites, correspondant aux signatures $(2, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 0)$ et $(0, 1)$, et la multiplication par $\lambda < 0$ identifie les cas $(2, 0)$ et $(0, 2)$ d'une part, et $(1, 0)$ et $(0, 1)$ d'autre part. \square

Théorème 66. *Soit $f = q + \ell + c$ une conique affine de \mathbb{R}^2 .*

(i) *Si q est projectivement congruente à $x^2 + y^2$, alors f est équivalente à l'une des trois coniques suivantes :*

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 1; \emptyset \\ x^2 + y^2 - 1; (\text{ellipse}) \\ x^2 + y^2; (\text{point isolé}) \end{aligned}$$

(ii) *Si q est projectivement congruente à $x^2 - y^2$, alors f est équivalente à l'une des deux coniques suivantes :*

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 - 1; (\text{hyperbole}) \\ x^2 - y^2; (\text{droites sécantes}) \end{aligned}$$

(iii) *Si q est projectivement congruente à x^2 , alors f est équivalente à l'une des quatre coniques suivantes :*

$$\begin{aligned} x^2 - y; (\text{parabole}) \\ x^2 - 1; (\text{droites parallèles}) \\ x^2; (\text{droite double}) \\ x^2 + 1; \emptyset \end{aligned}$$

De plus ces 9 coniques affines sont deux à deux non projectivement congruentes.

Preuve. (i) On écrit

$$f = x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = (x + a)^2 + (y + b)^2 + c - 4(a^2 + b^2)$$

et on obtient les trois cas, suivant le signe de $c - 4(a^2 + b^2)$. Par exemple si $c - 4(a^2 + b^2) = \lambda^2 > 0$, on écrit

$$f = (x + a)^2 + (y + b)^2 + \lambda^2 = \lambda^2 \left(\left(\frac{x + a}{\lambda} \right)^2 + \left(\frac{y + b}{\lambda} \right)^2 + 1 \right).$$

(ii) On procède de la même façon, et on remarque que les équations $x^2 - y^2 - 1 = 0$ et $x^2 - y^2 + 1 = 0$ sont équivalentes, quitte à multiplier par -1 et échanger les rôles de x et y .

(iii) On part de l'expression $f = x^2 + 2ax + 2by + c = (x + a)^2 + 2by + c - a^2$, et on distingue les cas suivant si b est nul ou pas.

Si $b \neq 0$, en travaillant dans les coordonnées $x + a$, $-2by - c + a^2$ on obtient l'équation d'une parabole $x^2 - y = 0$.

Si $b = 0$ on obtient les trois derniers cas annoncés, suivant le signe de $c - a^2$. \square

Remarque. Suivant la leçon où on raconte ça on peut plus ou moins souligner la collection d'actions intervenant dans ce développement :

- Le groupe \mathbb{R}^* des homothéties agit sur les fonctions polynomiales (par post-composition) en préservant le degré, et en préservant le lieu des zéros ;
- $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ agit par congruence sur les formes quadratiques q ;
- $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ agit par précomposition sur les formes linéaires ℓ (action sur le dual) ;
- Le groupe \mathbb{R}^2 des translations agit par précomposition sur les fonctions polynomiales ;
- Du coup le groupe affine $\text{GA}_2(\mathbb{R})$, produit semi-direct des linéaires et des translations, agit aussi par précomposition sur les fonctions polynomiales.

Exercice. Soit D une droite affine de \mathbb{R}^2 , et $v \in \mathbb{R}^2 \setminus D$.

(1) Montrer qu'à similitude près on peut supposer $D = \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}$ et $v = (0, 1)$. Soit $e \in]0, \infty[$ (pour "excentricité"). On définit C comme le lieu des points u tel que $d(u, v) = ed(u, D)$.

- (2) Montrer que C est une conique et discuter sa nature en fonction du paramètre e .
- (3) Comment donner un sens à la phrase "la conique C tend vers un cercle quand $e \rightarrow 0$ " ?

13. ...ET EN BONUS, LE COSINUS...

Au niveau terminale, les fonctions \cos et \sin sont définies géométriquement, et la notation exponentielle $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ semble être introduite comme une définition. Comment justifier, en partant des définitions géométriques :

- aire d'un disque $= \pi r^2$, d'un secteur, ayant pris comme définition de π le rapport du périmètre d'un cercle à son diamètre.
- formules pour $\cos(a + b)$ et $\sin(a + b)$.
- $(\cos x)' = -\sin x$ et $(\sin x)' = \cos x$
- notation exponentielle $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

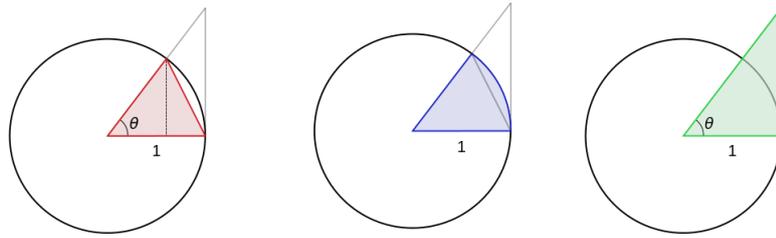


FIGURE 2. Trois surfaces d'aire croissante.

13.1. Aire d'un disque.

Proposition 67. *L'aire d'un disque de rayon r est πr^2 .*

Preuve. Preuve géométrique par découpage en n secteurs, réarrangement en un parallélogramme, et passage à la limite quand $n \rightarrow \infty$. Voir [wikipedia](#). \square

Corollaire 68. *L'aire d'un secteur angulaire de rayon r et d'angle θ est $\frac{1}{2}\theta r^2$.*

13.2. Fonctions cosinus et sinus. On définit $\cos x$ et $\sin x$ comme les abscisses et ordonnées du point d'angle x sur le cercle unité de \mathbb{R}^2 . Le nombre $\tan x$ s'obtient en intersectant la tangente au cercle en 1 avec la droite passant par le point d'angle x (d'où le nom!).

13.3. Une limite.

Proposition 69.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Preuve. On considère les trois aires représentées sur la figure 2. Le triangle rouge est d'aire $\frac{1}{2} \sin \theta$. Par le corollaire 68, le secteur bleu est d'aire $\frac{1}{2} \theta$. Enfin le triangle vert est d'aire $\frac{1}{2} \tan \theta$. On en déduit les inégalités

$$\sin \theta < \theta < \tan \theta.$$

On a donc, pour tout $x \in]0, \pi/2[$:

$$\frac{\sin x}{x} < 1 < \frac{\sin x}{x \cos x} \implies \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

On conclut $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ par le fameux "théorème des gendarmes" en observant que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = 1$. Le limite par valeurs inférieures s'obtient de façon similaire, en mettant des valeurs absolues partout. \square

13.4. Deux formules trigo.

Proposition 70. *Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On a*

$$\begin{aligned} \cos(a + b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a + b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b. \end{aligned}$$

Preuve. Si $\theta \in \mathbb{R}$, la rotation $R(\theta)$ d'angle θ (centrée à l'origine de \mathbb{R}^2) envoie $(1, 0)$ et $(0, 1)$ respectivement sur $(\cos \theta, \sin \theta)$ et $(-\sin \theta, \cos \theta)$. Autrement dit la matrice de $R(\theta)$ est

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

La proposition découle alors de l'égalité $R(a+b) = R(a) \circ R(b)$:

$$\begin{pmatrix} \cos(a+b) & \cdots \\ \sin(a+b) & \cdots \end{pmatrix} = R(a+b) = R(a)R(b) = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}$$

□

Corollaire 71.

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}.$$

Preuve. On prend $a = \frac{p}{2}$, $b = \frac{q}{2}$ et on remplace :

$$\begin{aligned} 2 \cos(a+b) \sin(a-b) &= 2(\cos a \cos b - \sin a \sin b)(\sin a \cos b - \cos a \sin b) \\ &= 2 \cos a \sin a (\cos^2 b + \sin^2 b) - 2 \cos b \sin b (\cos^2 a + \sin^2 a) \\ &= 2 \cos a \sin a - 2 \cos b \sin b \\ &= \sin 2a - \sin 2b. \end{aligned}$$

□

13.5. Dérivée des fonctions trigonométriques.

Proposition 72. $(\sin x)' = \cos x$ et $(\cos x)' = -\sin x$.

Preuve. Par définition $(\sin x)'$ est la limite quand h tend vers 0 de

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}.$$

En utilisant le corollaire 71 on obtient

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{2}{h} \cos \frac{2x+h}{2} \sin \frac{h}{2}.$$

Par la proposition 69 on obtient

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{h} \sin \frac{h}{2} = 1$$

et comme par ailleurs

$$\lim_{h \rightarrow 0} \cos \frac{2x+h}{2} = \cos x$$

on obtient finalement $(\sin x)' = \cos x$.

Pour obtenir $(\cos x)'$ on écrit :

$$(\cos x)' = (\sin(x + \pi/2))' = \cos(x + \pi/2) = -\sin x.$$

□

13.6. Fonctions logarithme et exponentielle. La fonction logarithme népérien est définie comme la primitive de $1/x$ s'annulant en 1 :

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

On définit la fonction exponentielle comme la fonction réciproque de $\ln x$:

$$\exp(\ln x) = x.$$

Proposition 73.

$$(\exp x)' = \exp x$$

Preuve. Par la formule de dérivée d'une fonction composée.

□

13.7. Développement de Taylor. Par Taylor-Lagrange :

Proposition 74. *Il existe $a, b, c \in]0, x[$*

$$\begin{aligned}\exp x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + e^a \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cos b \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sin c \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\end{aligned}$$

Les séries suivantes sont absolument convergentes sur tout disque $D(0, R) \subset \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\exp z &= \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}; \\ \cos z &= \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}; \\ \sin z &= \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.\end{aligned}$$

En particulier

Proposition 75 (Formule d'Euler). *Pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\exp ix = \cos x + i \sin x.$$

RÉFÉRENCES

- [Aud06] M. Audin. *Géométrie*. EDP Sciences, 2006.
- [CG13] P. Caldero & J. Germoni. *Histoires hédonistes de groupes et de géométries, Tome premier*. Calvage & Mounet, 2013.
- [Com98] F. Combes. *Algèbre et géométrie*. Bréal, 1998.
- [Eid09] J.-D. Eiden. *Géométrie*. C & M, 2009.
- [Per96] D. Perrin. *Cours d'algèbre*. Ellipses, 1996.
- [RW10] J.-P. Ramis & A. Warusfel. *Cours de mathématique vol.1 algèbre et géométrie*. De Boeck, 2010.
- [Szp09] A. Szpirglas, editor. *Mathématiques L3 Algèbre*. Pearson Education, 2009.

Le cercle et la droite d'Euler [Eid09, p. 31]

