5. Action de groupes

Exercice 5.1 Soit $G = \left\{ f = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R}) \right\}$.
On fait agir G sur $\mathbb{R}^2$ de façon naturelle. Décrire les orbites et les stabilisateurs.

Exercice 5.2 On fait agir S_3 sur S_3 par conjugaison. Décrire les orbites et les stabilisateurs.

Exercice 5.3 En considérant l'action par conjugaison de A_5 sur l'ensemble des 5-cycles montrer qu'il existe deux classes de conjugaisons de 5-cycles dans A_5.

Exercice 5.4 Un groupe de 35 éléments opère sur un ensemble de 19 éléments en ne laissant fixe aucun d'eux. Combien y a t-il d'orbites ?

Exercice 5.5 Soit C un cube dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ et $G := \mathrm{Isom}^+(C)$ le groupe des rotations (isométries directes) de $\mathbb{R}^3$ préservant un cube. Le but de cet exercice est d'établir un isomorphisme $G \simeq S_4$.

1. On appelle *drapeau* du cube C un triplet (f, a, s) où f est une face de C, a une arête de C et s un sommet de C avec $s \in a \subset f$. Compter les drapeaux de C, et en déduire que le groupe $\mathrm{Isom}(C)$ des isométries préservant le cube est d'ordre 48.
2. Expliciter 24 rotations préservant le cube C donné.
3. En utilisant l'action de G sur les grandes diagonales du cube, montrer qu'il existe un morphisme surjectif de $\mathrm{Isom}^+(C)$ sur S_4. Conclure.

Exercice 5.6 Soit $G \simeq S_4$ le groupe des isométries directes de $\mathbb{R}^3$ préservant un cube.

1. Décrire géométriquement les classes de conjugaison de G.
2. A l'aide de la formule de Burnside, déterminer le nombre de façons de colorier les faces d'un cube avec au plus trois couleurs à disposition.

Exercice 5.7 Soit $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ le plan projectif à coéfficients dans $\mathbb{C}$. On rappelle que les points de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ sont identifiés par leur coordonnées homogènes. Autrement dit, $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ s'identifie à l'ensemble des triplets non nuls $[x_0 : x_1 : x_2]$ avec x_i dans $\mathbb{C}$, tels que $[x_0 : x_1 : x_2] = [\lambda x_0 : \lambda x_1 : \lambda x_2]$ pour tout λ dans $\mathbb{C}^*$.

On considère sur $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ l'action de $G = (\mathbb{C}^*)^2$ suivante $(\lambda, \mu) \cdot [x_0 : x_1 : x_2] = [x_0 : \lambda x_1 : \mu x_2]$.

Décrire les points fixes et les orbites de l'action de G sur $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.