4. Groupes Linéaires.

Exercice 4.1 Soit k un corps, k^{n+1} un k-espace vectoriel de dimension $n+1$ dont on fixe une base. On définit l'action de $\mathrm{GL}_{n+1}(k)$ sur k^{n+1} par multiplication à gauche : $M(x) = M.x$, pour $x = (x_0, \ldots, x_n)^T$ le vecteur de cordonnées de x dans la base choisie.
On introduit sur $k^{n+1} \setminus \{0\}$ la rélation d'équivalence suivante :

$$(x_0, \ldots, x_n) \sim (y_0, \ldots, y_n) \iff \text{il existe } \lambda \in k^* \text{ tel que } x_i = \lambda y_i \ \forall i.$$

L'ensemble quotient $\mathbb{P}^n_k := (k^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$ est appelé *espace projectif* de dimension n sur k.

1. Expliciter le centre $Z \subset \mathrm{GL}_{n+1}(k)$ du groupe linéaire.
2. Montrer que Z agit trivialement sur les classes d'équivalence par $\sim$.
3. On appelle automorphisme de $\mathbb{P}^n_k$ une application bijective $\mathbb{P}^n_k \to \mathbb{P}^n_k$ qui se relève en un isomorphisme de l'espace vectoriel k^{n+1}. Montrer que $\mathrm{PGL}_{n+1}(k)$ est isomorphe au groupe des autorphismes de $\mathbb{P}^n_k$ (avec la loi de composition).

Exercice 4.2 Soit K un corps. Le but de cet exercice est de montrer que $\mathrm{SL}_2(K)$ est engendré par les matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$, avec t dans K. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathrm{SL}_2(K)$.

1. Si $c \neq 0$, montrer qu'il existe $s, t, u \in K$ tels que $M = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. En déduire que si b est non nul, une égalité similaire est satisfaite.
3. Si $b = c = 0$, se ramener à 1) ou 2) en composant par une matrice triangulaire. Conclure.

Exercice 4.3 Soit K un corps. Le sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(K)$

$$\mathbb{B} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} ; a \neq 0, b \in K \right\}$$

est appelé le sous-groupe de Borel.

1. Etant donné $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(K)$ avec $c \neq 0$, montrer qu'il existe $P_1, P_2 \in \mathbb{B}$ tels que $M = P_1 w P_2$, où $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. En déduire que $\mathrm{SL}_2(K)$ est la réunion disjointe de $\mathbb{B}$ et de $\mathbb{B}w\mathbb{B}$.
3. En déduire qu'il n'existe pas de sous-groupe G tel que $\mathbb{B} \subsetneq G \subsetneq \mathrm{SL}_2(K)$.
4. Montrer que $\mathbb{B} \cap w\mathbb{B}w^{-1}$ est égale à l'ensemble des matrices diagonales dans $\mathrm{SL}_2(K)$.
5. Montrer que $\cap_{g \in \mathrm{SL}_2(K)} g\mathbb{B}g^{-1}$ est égal au centre de $\mathrm{SL}_2(K)$ (*On pourra utiliser la question précédente, et considérer* $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$).

Exercice 4.4 On se propose de montrer que si K est un corps de cardinal au moins 4, alors $\mathrm{SL}_2(K)$ est égal à son groupe dérivé $D(\mathrm{SL}_2(K))$.

1. Soient $a, t \in K^*$ et supposons $a^2 \neq 1$. Calculer le commutateur de $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Conclure à l'aide de l'exercice 4.2.

Exercice 4.5 Soit K un corps de cardinal au moins 4, $N \lhd \mathrm{PSL}_2(K)$ un sous-groupe normal, et $H = \pi^{-1}(N) \lhd \mathrm{SL}_2(K)$ la préimage de N par l'application naturelle $\pi\colon \mathrm{SL}_2(K) \to \mathrm{PSL}_2(K)$.

1. Montrer en utilisant l'exercice 4.3 que $H\mathbb{B}$ est égal à $\mathbb{B}$ ou $\mathrm{SL}_2(K)$.
2. Si $H\mathbb{B} = \mathbb{B}$ montrer que N est trivial (*Utiliser à nouveau l'exercice 4.3*).

Supposons maintenant $H\mathbb{B} = \mathrm{SL}_2(K)$, et considérons le sous-groupe U de $\mathbb{B}$ des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Si $u \in U$, montrer que $wuw^{-1} \in HU$.
4. Montrer que $HU = \mathrm{SL}_2(K)$ (*On pourra utiliser la question précédente et l'exercice 4.2*).
5. En déduire que $\mathrm{SL}_2(K)/H$ est isomorphe à $U/(U \cap H)$, et donc en particulier est commutatif.
6. En déduire que H contient $D(\mathrm{SL}_2(K))$.
7. Conclure que $\mathrm{PSL}_2(K)$ est simple.

Exercice 4.6

1. En utilisant l'action naturelle sur les droites vectorielles de $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$, montrer que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ est isomorphe à S_4.
2. En déduire que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ est isomorphe à A_4, et donc en particulier n'est pas simple.
3. Montrer que $SL_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ est d'ordre 24, et calculer l'ordre de $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. En déduire que $SL_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ n'est pas isomorphe à S_4.
4. Montrer que $SL_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ est égal à un produit semi-direct $N \rtimes H$ avec $N \lhd SL_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ normal d'ordre 8 et H d'ordre 3 que l'on précisera.

Exercice 4.7 Soient K un corps et n un entier strictement positif. On note D le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(K)$ formé par les matrices diagonales, et H l'ensemble des matrices $M \in \mathrm{GL}_n(K)$ qui ont exactement un coefficient non nul sur chaque colonne et sur chaque ligne.

1. Montrer que H est un produit semi-direct $D \rtimes W$, où W est l'ensemble des matrices de permutation.
2. On suppose que K possède au moins trois éléments. Montrer que H est le normalisateur de D dans $\mathrm{GL}_n(K)$, c'est-à-dire l'ensemble des $g \in \mathrm{GL}_n(K)$ tels que $gDg^{-1} = D$. Ce résultat subsiste-t-il quand $K = \mathbb{F}_2$?