3. Anneaux, Idéaux et leurs propriétés ; Polynômes à coefficients entiers ou rationnels.

Exercice 3.1 Soit K un corps. Montrer que $K[X,Y]$ n'est pas principal. Montrer que $\mathbb{Z}[X]$ n'est pas principal.

Exercice 3.2 Soit K un corps. Montrer que l'anneau $K[x,y,z,w]/(xy-zw)$ est intègre mais pas factoriel

Exercice 3.3 Dans un anneau factoriel, les idéaux premiers non nuls minimaux sont principaux.

Exercice 3.4 Soit g un stathme euclidien sur un anneau A. Montrer que :

1. $g(x)$ minimum si et suelement si x inversible,
2. $g(x) = g(y)$ et $x|y$ si et seulement si x et y sont *associés* (c'est à dire que x divise y et y divise x).

Exercice 3.5 Soit A un anneau tel que la fonction $g(x) = 0$ pour tout x dans A est un stathme euclidien. Montrer que A est un corps.

Exercice 3.6
1. Soit $p \neq 2$ un nombre premier. Démontrer que, pour tout $k \geq 0$, on a $(1+p)^{p^k} = 1 + p^{k+1}x$, avec x entier non multiple de p.
2. En déduire que l'élément $1+p \pmod{p^m}$ du groupe $(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^*$ est d'ordre $pm-1$.

Exercice 3.7 Pour deux espaces topologiques X et Y, on note $\mathcal{C}(X,Y)$ l'ensemble des fonctions continues de X vers Y.

1. Montrer que $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ est un anneau, avec les opérations $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ et $(fg)(x) = f(x)g(x)$, où $\mathbb{R}$ est muni de la topologie euclidienne.
2. Soit X un espace topologique compact. Montrer que les seuls idéaux maximaux de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ sont les idéaux de la forme $\{f | f(a) = 0\}$, où $a \in X$.
3. Montrer que ce n'est pas vrai dans $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

Exercice 3.8 Déterminer les solutions $n \in \mathbb{Z}$ des systèmes :

$$a)\left\{\begin{array}{lll} n & \equiv & 3 \pmod{17} \\ n & \equiv & 4 \pmod{11} \\ n & \equiv & 5 \pmod{6} \end{array}\right. \qquad b)\left\{\begin{array}{lll} n & \equiv & 3 \pmod{6} \\ n & \equiv & 2 \pmod{5} \\ n & \equiv & 6 \pmod{7} \end{array}\right. \qquad c)\left\{\begin{array}{lll} 2x & \equiv & 3 \pmod{5} \\ 3x & \equiv & 2 \pmod{4} \end{array}\right.$$

Avez-vous déjà resolu cet exercice ? Si oui, avez.vous changé de méthode ? Et pourquoi ?

Exercice 3.9 On dit qu'un anneau est local s'il admet un unique idéal maximal.

1. Montrer que un anneau A est local si et seulement si pour tout a, b non inversible dans A, $a+b$ est non inversible dans A. Dans ce cas, l'idéal maximal est l'ensemble de tous les éléments non inversibles.
2. Soit p un nombre premier e A l'anneau des fractions a/b avec a, b dans $\mathbb{Z}$ tels que $(b,p) = 1$. Montrer que si $I \subset A$ est un idéal propre, alors $I = (0)$ ou il existe un entier n tel que $I = (p^n)$. Déduire que A est local, en explicitant son idéal maximal

Exercice 3.10 Calculer les corps des fractions des anneaux suivants :

1. $A = \mathbb{Z}[i]$,

2. $A = K[X_1, \dots, X_n]$, avec K un corps,
3. $A = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, pour d dans $\mathbb{Z}$,
4. $A = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Exercice 3.11 On travaille dans l'anneau des polynômes $\mathbb{Q}[X]$.

1. Déterminer si $P = 3X^3 + 2X^2 + X + 4$ est irréductible.
2. Soit $Q = X^2 - 1$. Trouver deux polynômes U et V tels que $UP + VQ = 1$.

Exercice 3.12 Déterminer si les polynômes suivants sont irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$:

$$4X^3 - 3X - \frac{1}{2}\ ; \quad X^6 - 3X^3 + 12X - 3\ ; \quad X^n - 2 \text{ avec } n \geq 1.$$

Exercice 3.13

1. Quels sont les facteurs irréductibles de $X^4 - 1$, de $X^4 + 1$ et de$X^4 + X^2 + 1$, dans $\mathbb{Q}[X]$, dans $\mathbb{R}[X]$, dans $\mathbb{C}[X]$?
2. Soit $a \neq 0$ entier. Montrer que $X^4 + aX^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 3.14 Dans $\mathbb{Z}[X]$, considérons le polynôme $P(X) = X^4 + 1$. Montrer que $P(X)$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ et dans $\mathbb{Q}[X]$. Montrer que, pour tout nombre premier p, $\overline{P(X)} = X^4 + \overline{1}$ n'est pas irréductible dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 3.15 Pour quelles valeurs de l'entier naturel n le polynôme $(X+1)^n - X^n - 1$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?