Algèbre

Examen partiel

Durée: 2 heures

Ni document ni calculatrice. Le barême sur 21 est indicatif.

I - Exemples (8 points)

1. Donner la liste des classes $\bar{a}$ inversibles dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, en précisant à chaque fois l'inverse.
2. Donner la liste des classes $\bar{a}$ qui sont des diviseurs de zéro dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, en précisant à chaque fois le produit qui donne la classe nulle.
3. Soit K un corps. Donner la liste des idéaux de K (justifier en une ligne maximum).
4. Donner un exemple d'anneau principal A contenant un élément a non nul et non inversible (que l'on précisera).
5. Donner un exemple d'anneau factoriel contenant un idéal I non principal (que l'on précisera).
6. Donner un exemple de corps K qui ne contient pas de sous-anneau isomorphe à $\mathbb{Z}$ (justifier en une ligne maximum).
7. Donner un exemple de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 2 tel que l'anneau quotient $\mathbb{R}[X]/(P)$ ne soit pas isomorphe à $\mathbb{C}$ (justifier en une ligne maximum).
8. Donner un exemple d'anneau commutatif contenant un élément $a \notin \{0,1\}$ idempotent (c'est-à-dire vérifiant $a^2 = a$).

II - Applications du cours (7 points)

Les quatre questions suivantes sont indépendantes.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}[X]$ le système de congruence $\begin{cases} P(X) \equiv X & \mod (X^2-1) \\ P(X) \equiv -2 & \mod (X+2) \end{cases}$
2. Soit $a \geq 0$ et $n \geq 2$ des entiers.
   (a) Montrer que si a et n sont premiers entre eux alors $\bar{a}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
   (b) La réciproque est-elle vraie ? (donner un contre-exemple ou un court argument).
3. (a) Calculer le PGCD $P(X)$ des polynômes $X^3+7X^2+8X-16$ et $X^3+6X^2+5X-12$ dans l'anneau $\mathbb{Q}[X]$.
   (b) Le quotient $\mathbb{Q}[X]/(P(X))$ est-il un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$? (si oui, exhiber une base, et si non, donner un court argument).
4. Soit A un anneau intègre, K son corps des fractions, et $P_1, P_2 \in A[X]$. Donner une condition (en la justifiant rapidement) qui assure que le quotient Q obtenu en effectuant la division euclidienne de P_1 par P_2 soit un polynôme à coefficient dans A.

III - Quizz (6 points).

Répondre par vrai ou faux en donnant suivant les cas un court argument (trois lignes grand maximum) ou un contre-exemple (réponse non justifiée = 0 point !).

1. Les anneaux quotients $\mathbb{R}[X]/(X-3)$ et $\mathbb{R}[X]/(X-4)$ sont isomorphes : vrai ou faux ?
2. L'anneau quotient $\mathbb{Z}[X]/(X^2-1)$ est intègre : vrai ou faux ?
3. Dans l'anneau quotient $\mathbb{R}[X,Y]/(X)$, les polynômes Y et YX représentent la même classe : vrai ou faux ?
4. Soit $n \geq 2$ un entier, et $\bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Alors $\bar{a}$ est ou bien inversible, ou bien un diviseur de zéro : vrai ou faux ?
5. Dans l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ les éléments $1+i$ et $1-i$ sont premiers entre eux : vrai ou faux ?
6. L'anneau quotient $\mathbb{R}[X]/(X^2+X+1)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$: vrai ou faux ?