Algèbre

Examen final

Durée: 3 heures

Ni document ni calculatrice. Le barême sur 22 est indicatif.

I - Restes chinois (3 points)

1. Énoncer le théorème des restes chinois sur l'anneau $\mathbb{Z}$.
2. Résoudre sur $\mathbb{Z}$ le système de congruence : $\begin{cases} 2x \equiv 3 \mod 5 \\ 3x \equiv 2 \mod 4 \end{cases}$

II - Exemples (4,5 points)

1. Donner un exemple de deux polynômes distincts dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$ qui définissent la même fonction de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
2. Donner deux exemples typiques d'anneaux euclidiens.
3. Donner deux exemples typiques d'anneaux factoriels mais non principaux.
4. Donner un exemple de matrice $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ qui ne commute pas avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
5. Donner deux exemples de transvections dans $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$.
6. Donner un exemple de polyèdre convexe de $\mathbb{R}^3$ non régulier dont toutes les faces sont isométriques à un même polygône régulier.

III - Le groupe alterné A_4 (4 points).

1. En faisant agir A_4 sur l'ensemble des 3-cycles (on précisera comment), montrer qu'il y a exactement deux classes de conjugaison de 3-cycles dans A_4.
2. Etablir la liste complète des classes de conjugaison dans A_4, en précisant pour chacune son cardinal.
3. Soit $\mathcal{T}$ un tétraèdre régulier dans $\mathbb{R}^3$. Montrer que le groupe $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{T})$ des rotations de $\mathbb{R}^3$ préservant $\mathcal{T}$ est isomorphe à A_4 (par exemple en explicitant l'isomorphisme).
4. Pour chacune des classes de conjugaison trouvée à la question 2, donner une rotation dans $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{T})$ qui réalise (via l'isomorphisme de la question 3) une permutation dans cette classe.

IV - Anneaux de polynômes (4,5 points)

Les 3 premières questions sont des questions de cours.

1. Étant donné $Q(X) \in \mathbb{Z}[X]$, donner une condition qui assure que $Q(X)$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$ si et seulement s'il est irréductible sur $\mathbb{Q}$.
2. Si $p \in \mathbb{N}$ est premier, rappeler pourquoi l'anneau $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$ est factoriel. Est-ce aussi un anneau principal ?
3. Si $R(X) \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$ est de degré 3, expliquer pourquoi $R(X)$ est irréductible si et seulement s'il n'a pas de racine dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

On considère maintenant le polynôme $P = 5X^3 + 8X^2 + 6X + 2 \in \mathbb{Z}[X]$, et le polynôme modulo 3 associé $\bar{P} = \bar{5}X^3 + \bar{8}X^2 + \bar{6}X + \bar{2} \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$.

4. Montrer que $P = 5X^3 + 8X^2 + 6X + 2$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.
5. Décomposer $\bar{P}$ en facteurs irréductibles dans $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$.
6. Les anneaux quotients $A = \mathbb{Q}[X]/(P)$ et $B = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]/(\bar{P})$ sont-ils intègres ?

V - Quizz (6 points).

Répondre par vrai ou faux en donnant suivant les cas un court argument (trois lignes grand maximum) ou un contre-exemple (réponse non justifiée = 0 point !).

1. Tout groupe commutatif fini est cyclique : vrai ou faux ?
2. Il existe une action transitive d'un groupe à 4 éléments sur un ensemble à 2 éléments : vrai ou faux ?
3. Le groupe des isométries directes de $\mathbb{R}^3$ préservant un icosaèdre est simple : vrai ou faux ?
4. Si A est un anneau principal alors l'anneau de polynômes $A[X]$ est également principal : vrai ou faux ?
5. Les anneaux quotients $\mathbb{R}[X]/(X^2 - 1)$ et $\mathbb{R}[X]/(X^2 - 2X + 1)$ sont isomorphes : vrai ou faux ?
6. L'anneau quotient $\mathbb{Z}[X]/(X^2 + 1)$ est principal : vrai ou faux ?
7. L'anneau quotient $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]/(X^3 + X)$ contient exactement 8 éléments : vrai ou faux ?
8. Pour tout polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ de degré 1 l'anneau quotient $\mathbb{R}[X]/(P)$ est un corps : vrai ou faux ?