Devoir à rendre en cours le jeudi 4 décembre

Le devoir introduit la notion de sous-groupe libre, donne un critère – appelé "lemme du ping-pong" – pour reconnaître qu'un sous-groupe est libre, et propose d'appliquer ce critère dans $SL_2(\mathbb{R})$ et $SO_3(\mathbb{R})$. A noter qu'il existe une notion abstraite plus générale de "groupe libre", voir par exemple le livre [L3 Algèbre, p. 234] par Szpirglas & al.

Première partie : notion de sous-groupe libre

Soit G un groupe, et $h_1, \ldots, h_n$ des éléments de G. On dit que le sous-groupe $H = \langle h_1, \ldots, h_n \rangle$ est **libre** de rang n sur les générateurs $h_1, \ldots h_n$ si pour toutes suites finies

$$\begin{aligned} &i_1, \ldots, i_r \in \{1, \ldots, n\} \text{ avec } i_{k+1} \neq i_k \text{ pour tout } k, \\ &a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}, \end{aligned}$$

on a

$$h_{i_r}^{a_r} \ldots h_{i_1}^{a_1} \neq 1.$$

1. Montrer qu'un groupe fini G ne contient aucun sous-groupe libre.
2. Montrer qu'un groupe abélien ne contient aucun sous-groupe libre (de rang $n \geq 2$).
3. Donner un exemple de groupe infini non abélien qui ne contienne aucun sous-groupe libre (de rang $n \geq 2$).

Deuxième partie : lemme du ping-pong

Soit G un groupe, et $a, b \in G$ deux éléments d'ordre infini. On suppose que G agit sur un ensemble X, et qu'il existe $X_1, X_2 \subset X$ deux sous-ensembles disjoints et non vides tels que pour tout $k \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$:

$$a^k(X_1) \subset X_2 \quad \text{ et } b^k(X_2) \subset X_1.$$

On cherche à montrer que a et b engendrent un sous-groupe libre de rang 2.

1. Si $g = a^{m_r} b^{n_r} \ldots b^{n_2} a^{m_1}$, montrer que $g(X_1) \subset X_2$, et en déduire que $g \neq 1$.
2. Si $g = b^{m_r} a^{n_r} \ldots a^{m_2} b^{n_1}$, montrer que $g(X_2) \subset X_1$.
3. Quitte à remplacer g par un conjugué de g ou par g^{-1}, montrer qu'on peut toujours se ramener aux cas précédents et conclure.

Troisième partie : application à $SL_2(\mathbb{R})$

Soient $A, B \in SL_2(\mathbb{R})$ deux matrices dont les valeurs propres sont de module différent de 1. Supposons de plus que les deux droites propres de A sont distinctes de celles de B. On cherche à montrer que pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand le sous-groupe de $SL_2(\mathbb{R})$ engendré par A^n et B^n est libre.

On se place dans une base (v, v') de vecteurs propres pour la matrice A, associés à des valeurs propres $|\lambda| > 1$ et $|\lambda'| = 1/|\lambda| < 1$. Les droites propres de B sont alors de la forme $\{y = b_1 x\}$ et $\{y = b_2 x\}$, avec $b_1, b_2 \neq 0$ distincts.

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on considère

$$\begin{aligned} X_2^+ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 < |y| < \varepsilon |x|\}; \\ X_2^- &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 < |x| < \varepsilon |y|\}; \\ X_2 &= X_2^+ \cup X_2^-. \end{aligned}$$

1. Dessiner les ensembles X_2^+ et X_2^-.
2. Proposer une définition similaires d'ensembles X_1^+, X_1^- et X_1 pour B.
3. Montrer que pour ε assez petit, $X_1^+, X_2^+, X_1^-, X_2^-$ sont deux à deux disjoints.
4. Calculer l'équation de l'image par A^n de la droite $y = \frac{1}{\varepsilon} x$.
5. Montrer que pour $n > 0$ assez grand, $A^n(\mathbb{R}^2 \setminus X_2^-) \subset X_2^+$ et $A^{-n}(\mathbb{R}^2 \setminus X_2^+) \subset X_2^-$.
6. Conclure en appliquant le lemme du ping-pong.

Quatrième partie : application à $SO_3(\mathbb{R})$

1. Montrer qu'il existe un angle θ tel que $\cos\theta = \frac{3}{5}$, $\sin\theta = \frac{4}{5}$.
2. Montrer que les matrices $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ correspondent à des rotations de $\mathbb{R}^3$ dont on précisera l'angle et l'axe.

On cherche à montrer que A et B engendrent un sous-groupe libre de $SO_3(\mathbb{R})$. On pose

$$X_1 = \left\{ \frac{1}{5^k}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3 ;\ k \geq 0, a, b, c \in \mathbb{Z}, c \not\equiv 0 \mod 5, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 2c \\ c \end{pmatrix} \mod 5 \right\},$$

$$X_2 = \left\{ \frac{1}{5^k}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3 ;\ k \geq 0, a, b, c \in \mathbb{Z}, a \not\equiv 0 \mod 5, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a \\ \pm 2a \\ 0 \end{pmatrix} \mod 5 \right\}.$$

3. Montrer que A et B vérifient les hypothèses du lemme du ping-pong et conclure.