# 3. Anneaux, Idéaux et leurs propriétés ; Polynômes à coefficients entiers ou rationnels.

**Exercice 3.1** Soit $K$ un corps. Montrer que $K[X,Y]$ n'est pas principal. Montrer que $\mathbb{Z}[X]$ n'est pas principal.

**Exercice 3.2** Soit $K$ un corps. Montrer que l'anneau $K[x,y,z,w]/(xy-zw)$ est intègre mais pas factoriel. Montrer que la classe de $x$ est un élément irréductible mais pas premier dans le quotient

**Exercice 3.3** Dans un anneau factoriel, les idéaux premiers non nuls minimaux sont principaux.

**Exercice 3.4** Soit $g$ un stathme euclidien sur un anneau $A$. Montrer que :

1. $g(x)$ minimum si et seulement si $x$ inversible,
2. $g(x) = g(y)$ et $x|y$ si et seulement si $x$ et $y$ sont *associés* (c'est à dire que $x$ divise $y$ et $y$ divise $x$).

**Exercice 3.5** Soit $A$ un anneau tel que la fonction $g(x) = 0$ pour tout $x$ dans $A$ est un stathme euclidien. Montrer que $A$ est un corps.

**Exercice 3.6**
1. Soit $p \neq 2$ un nombre premier. Démontrer que, pour tout $k \geq 0$, on a $(1+p)^{p^k} = 1 + p^{k+1}x$, avec $x$ entier non multiple de $p$.
2. En déduire que l'élément $1+p \pmod{p^m}$ du groupe $(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^*$ est d'ordre exactement $p^{m-1}$.

**Exercice 3.7** Pour deux espaces topologiques $X$ et $Y$, on note $\mathcal{C}(X,Y)$ l'ensemble des fonctions continues de $X$ vers $Y$.

1. Montrer que $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ est un anneau, avec les opérations $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ et $(fg)(x) = f(x)g(x)$, où $\mathbb{R}$ est muni de la topologie euclidienne.
2. Soit $X$ un espace topologique compact. Montrer que les seuls idéaux maximaux de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ sont les idéaux de la forme $\{f | f(a) = 0\}$, où $a \in X$.
3. Montrer que ce n'est pas vrai dans $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

**Exercice 3.8** On dit qu'un anneau est local s'il admet un unique idéal maximal.

1. Montrer que un anneau $A$ est local si et seulement si pour tout $a$, $b$ non inversible dans $A$, $a+b$ est non inversible dans $A$. Dans ce cas, l'idéal maximal est l'ensemble de tous les éléments non inversibles.
2. Soit $p$ un nombre premier et $A$ l'anneau des fractions $a/b$ avec $a, b$ dans $\mathbb{Z}$ tels que $\mathrm{pgcd}(b,p) = 1$. Montrer que si $I \subset A$ est un idéal propre, alors $I = (0)$ ou il existe un entier $n$ tel que $I = (p^n)$. Déduire que $A$ est local, en explicitant son idéal maximal

**Exercice 3.9** Calculer les corps des fractions des anneaux suivants :

1. $A = \mathbb{Z}[i]$,
2. $A = K[X_1, \ldots, X_n]$, avec $K$ un corps,
3. $A = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, pour $d$ dans $\mathbb{Z}$,
4. $A = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

**Exercice 3.10** On travaille dans l'anneau des polynômes $\mathbb{Q}[X]$.

1. Déterminer si $P = 3X^3 + 2X^2 + X + 4$ est irréductible.

2. Soit $Q = X^2 - 1$. Trouver deux polynômes $U$ et $V$ tels que $UP + VQ = 1$.

**Exercice 3.11** Déterminer si les polynômes suivants sont irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$ :

$$4X^3 - 3X - \frac{1}{2}\ ; \quad X^6 - 3X^3 + 12X - 3\ ; \quad X^n - 2 \text{ avec } n \geq 1.$$

**Exercice 3.12**

1. Quels sont les facteurs irréductibles de $X^4 - 1$, de $X^4 + 1$ et de$X^4 + X^2 + 1$, dans $\mathbb{Q}[X]$, dans $\mathbb{R}[X]$, dans $\mathbb{C}[X]$ ?
2. Soit $a \neq 0$ entier. Montrer que $X^4 + aX^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

**Exercice 3.13** Trouver un polynôme primitif de $\mathbb{Z}[X]$ associé au polynôme $\frac{2}{3}X^2 + 5X + \frac{3}{2}$ de $\mathbb{Q}[X]$.

**Exercice 3.14** Déterminer si les polynômes suivants sont irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$ :

1. $P(X) = X^4 - 7X^2 + 3X + 3$.
2. $P(X) = X^6 - 11X^3 + 33X + 22$.
3. $P(X) = \frac{X^p - 1}{X - 1}$ pour $p$ premier.

**Exercice 3.15** Soit $E$ un espace vectoriel sur un corps $K$, et $u : E \to E$ un endomorphisme. Pour un polynôme $P(X)$ dans $K[X]$, on considère l'endomorphisme $P(u) : E \to E$. Montrer que, si $P_1(X)$ et $P_2(X)$ sont premiers entre eux, alors

$$\ker(P_1P_2(u)) = \ker(P_1(u)) \oplus \ker(P_2(u)).$$

**Exercice 3.16** Dans $\mathbb{Z}[X]$, considérons le polynôme $P(X) = X^4 + 1$. Montrer que $P(X)$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ et dans $\mathbb{Q}[X]$. Montrer que, pour tout nombre premier $p$, $\overline{P(X)} = X^4 + \overline{1}$ n'est pas irréductible dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$.

**Exercice 3.17** Pour quelles valeurs de l'entier naturel $n$ le polynôme $(X+1)^n - X^n - 1$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$ ?