2. Anneaux et polynômes

Exercice 2.1 1. Trouver deux polynômes distincts dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$ qui définissent la même fonction de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

2. Si K est un corps infini, montrer que deux polynômes distincts dans $K[X]$ définissent des fonctions distinctes de K dans K.

Exercice 2.2 1. Montrer qu'il existe un unique morphisme d'anneau de $\mathbb{Z}$ vers un anneau donné A.

2. Soit A un anneau. Que peut-on dire d'un idéal qui contient 0 ? et d'un idéal qui contient 1 ?
3. Soient F un corps, A un anneau. Pourquoi tout morphisme d'anneaux $\phi : F \to A$ est-il injectif ?

Exercice 2.3 1. Déterminer tous les morphismes d'anneaux de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$, puis de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z}$, et finalement de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Q}$.

2. Déterminer tous les morphismes d'anneaux de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, puis de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$, puis de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Exercice 2.4 On appelle ordre de nilpotence de $a \in A$ (anneau commutatif) :

$$\nu(a) := \inf\{n \in \mathbb{N} \mid an = 0\}.$$

Par convention, c'est donc ∞ si a n'est pas nilpotent. Montrer que $\nu(a+b) \leq \nu(a) + \nu(b) - 1$.

Exercice 2.5 Soit A un anneau commutatif. On dit que $a \in A$ est *idempotent* si $a^2 = a$.

1. Soient a et b deux idempotents de A tels que $ab = 0$ (on dit alors qu'ils sont orthogonaux). Montrer que $a + b$ est idempotent. Vérifier que le produit de deux idempotents quelconques est idempotent.
2. Soient a et b deux idempotents quelconques. Montrer que $a(1-b)$ et $b(1-a)$ sont des idempotents orthogonaux et que $a \star b := a + b - 2ab$ est idempotent.
3. Montrer que l'ensemble des idempotents muni des lois $\star$ et $\cdot$ (multiplication de A) est un anneau.

Exercice 2.6 1. Soit A un anneau intègre fini. Montrer que c'est un corps.

2. Peut-on appliquer ce résultat à $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$?

Exercice 2.7 On appelle *entier de Gauss* tout nombre complexe de la forme $z = x + iy$ avec x, y des entiers relatifs. Il s'agit d'un anneau commutatif intègre euclidien. Est-il un corps ?
Trouver un pgcd et une relation de Bézout pour $-1 + 13i$ et $4 + i$. Même question pour $8 + 26i$ et $1 + 17i$.

Exercice 2.8 1. Soit d un entier non carré. Si $d < 0$, on posera $\sqrt{d} := i\sqrt{-d}$. Vérifier que l'application $(a, b) \mapsto a + b\sqrt{d}$ de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{C}$ est injective et que son image est le sous-anneau $A := Z[d]$ de $\mathbb{C}$ engendré par $\sqrt{d}$.

2. Pour $z := a + b\sqrt{d}$ dans A, on pose $\overline{z} := a - b\sqrt{d}$ et $N(z) := z\overline{z}$. (Attention : l'application $z \mapsto \overline{z}$ ne coïncide avec la conjugaison de $\mathbb{C}$ que si $d < 0$). Vérifier que $z \mapsto \overline{z}$ est un automorphisme de l'anneau $(A, +)$.
3. Vérifier que l'application N envoie A dans $\mathbb{Z}$ et que $N(zz') = N(z)N(z')$.
4. Montrer que z est inversible dans A si, et seulement si, $N(z) = \pm 1$.
5. Montrer que un entier p est un élément irréductible de A si, et seulement si, p est premier dans $\mathbb{Z}$ et que ni p ni $-p$ ne sont de la forme $a^2 - \sqrt{d}b^2$, avec a, b entiers.

6. On prend $d := -6$. Trouver dans A un élément irréductible non premier.

Exercice 2.9 Etablir les isomorphismes suivants :

1. $K[X]/(X - \alpha) \simeq K$, où K est un corps et $\alpha \in K$.
2. $\mathbb{Z}[X]/(X^2 + 1) \simeq \mathbb{Z}[i]$.
3. $K[X, Y]/(X - \alpha) \simeq K[Y]$ où K est un corps et $\alpha \in K$.
4. $K[X, Y]/(X - \alpha, Y - \beta) \simeq K$ où K est un corps et $\alpha, \beta \in K$.
5. $\mathbb{R}[X]/(X^2 - 3X + 2) \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Cet anneau est-il un corps ?
6. $\mathbb{Z}[t]/(p) \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[t]$ où $p \in \mathbb{Z}$ premier.

Exercice 2.10 Soit p un nombre premier. Déterminer tous les diviseurs de zéro de l'anneau $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.

Exercice 2.11 Soit A un anneau principal.

1. Montrer que pour tout $a, b \in A$ il existe un PGCD de a et b et que l'on peut écrire une relation de Bézout.
2. Si $a, b \in A$ sont premiers entre eux montrer qu'on a un isomorphisme $A/(ab) \simeq A/(a) \times A/(b)$.

Exercice 2.12 Soit K un corps. Montrer qu'un idéal I de $K[X]$ est maximal si, et seulement si, il existe $P \in K[X]$ irréductible et $I = (P)$.

Exercice 2.13 On considère l'anneau $\mathbb{R}[X]$.

1. Déterminer l'idéal J engendré par les polynômes X^3+3X^2+4X+2 et $X^4+2X^3+3X^2+2X+2$.
2. Donner un isomorphisme entre l'anneau quotient $\mathbb{R}[X]/J$ et le corps $\mathbb{C}$.

Exercice 2.14 On considère dans l'anneau $\mathbb{Z}[X]$ les idéaux I, J engendrés par $2X$ et X^3, et par $3X$ et $X^2 + 1$ respectivement.

1. Montrer que $X^3 - 2X \in I \cap J$.
2. Montrer que $I + J = \mathbb{Z}[X]$. En déduire que $X^3 - 2X \in IJ$.
3. Montrer qu'il n'existe pas de polynômes $P \in I$ et $Q \in J$ tels que $X^3 - 2X = PQ$.

Exercice 2.15 On note $\mathbb{D} = \left\{ \frac{n}{10^k} \mid \ n \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N} \right\}$ l'ensemble des décimaux.

1. Vérifier que $\mathbb{D}$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.
2. Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{D}$. Est-ce que $\mathbb{D}$ est un corps ?
3. Montrer que pour tout $d \in \mathbb{D}$, $d \neq 0$, il existe un unique couple $(d', v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tel que $d = d'\ 10^v et 10 \not| d'$.

   Lorsque ces conditions sont satisfaites, on note : $\phi(d) = |d'|$. On convient que $\phi(0) = 0$.
4. Montrer que $\mathbb{D}$ est un anneau euclidien.
5. Donner des générateurs aussi simple que possible de l'idéal de $\mathbb{D}$ engendré par $\frac{46}{10}$ et $\frac{12}{100}$