Examen partiel

Durée: 2 heures

Documents, calculatrice ou téléphone interdits. Le barème sur 20 est indicatif.

I - Exemples (5 points)

1. Donner un exemple de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 2 tel que l'anneau quotient $\mathbb{R}[X]/(P)$ ne soit pas isomorphe à $\mathbb{C}$ (justifier rapidement, deux phrases devraient suffire).
2. Dans l'anneau $\mathbb{Q}[X]$, donner un exemple de sous-anneau $B \subsetneq \mathbb{Q}[X]$, et un exemple (non trivial) d'idéal $I \subsetneq \mathbb{Q}[X]$.
3. Si $P = X^3 \in \mathbb{R}[X]$, donner un représentant de degré minimal de la classe $\bar{P}$ dans l'anneau quotient $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$.
4. Donner un PGCD de $1+i$ et $1-i$ dans l'anneau $\mathbb{Z}[i]$.
5. Donner un exemple d'anneau A contenant un idéal I premier mais non maximal, que l'on explicitera.

II - Questions de cours (6 points)

1. Soit $n \geq 2$, et $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que k et n sont premiers entre eux si et seulement si $\bar{k}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
2. Démontrer le lemme de Gauss sur $\mathbb{R}[X]$: si $A, B, C \in \mathbb{R}[X]$ sont trois polynômes tels que A, B sont premiers entre eux et A divise BC, montrer que A divise C.
3. Énoncer le théorème des restes chinois sur $\mathbb{Z}$, puis résoudre (rapidement) le système de congruence
$$\begin{cases} x \equiv 1 \mod 3 \\ x \equiv -4 \mod 5 \\ x \equiv 2 \mod 7 \end{cases}$$
4. Montrer qu'il existe un isomorphisme
$$\phi \colon \mathbb{R}[X]/(X^2+X+1) \to \mathbb{R}[X]/(X^2+1),$$
et expliciter les images $\phi(\bar{1})$, $\phi(\bar{X})$ des classes $\bar{1}$, $\bar{X} \in \mathbb{R}[X]/(X^2+X+1)$.

TSVP ⇒

III - Anneau $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ (4 points).

On attend une courte justification pour chacune des questions suivantes.

1. Donner la liste des éléments inversibles dans l'anneau $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.
2. Donner les diviseurs de zéro dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.
3. Montrer que les idéaux de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ sont principaux (*on pourra utiliser le morphisme naturel de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$*).
4. Donner la liste des idéaux de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, indiquer lesquels sont des idéaux maximaux, et à quels corps bien connus sont isomorphes les quotients de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ par ces idéaux maximaux.

IV - Anneaux factoriels et de Bézout. (5 points)

Soit A un anneau commutatif intègre, et (p_i) un système de représentants des irréductibles de A à inversibles près.
On suppose que A est *factoriel*, c'est-à-dire que tout élément $a \in A \setminus \{0\}$ admet une unique factorisation de la forme

$$a = x p_{i_1}^{\alpha_1} \dots p_{i_s}^{\alpha_s}, \tag{\dagger}$$

avec $\alpha_i \geq 1$, et x inversible.
On suppose également que A est un anneau de *Bézout*, c'est-à-dire que tout couple a, b d'éléments de A admet un PGCD, et qu'on peut écrire une relation de Bézout pour a et b.
Le but de cet exercice est de montrer que A est un anneau *principal*.

1. Rappeler la définition générale d'un anneau principal.
2. Soit I un idéal, qui est non nul et non égal à A. Justifier qu'il existe $a \in I \smallsetminus \{0\}$ qui minimise, parmi tous les élements de $I \smallsetminus \{0\}$, la somme des exposants $\sum_j \alpha_j$ dans l'écriture (†).
3. Soit $b, c \in I \smallsetminus \{0\}$. Montrer que le PGCD de b et c appartient aussi à l'idéal I.
4. Conclure.