5. Groupes libres, présentations par générateurs et relations

Exercice 1. Définition courante des groupes libres (à comparer avec celle vue en cours). Soit F_2 l'ensemble des expressions de la forme $a^{n_1}b^{n_2}a^{n_3}b^{n_4}\dots x^{n_k}$ (avec $x = b$ si k pair et $x = a$ si k impair) ou de la forme $b^{n_1}a^{n_2}b^{n_3}a^{n_4}\dots x^{n_k}$ (avec $x = a$ si k pair et $x = b$ si k impair) où $k \in \mathbb{N}$ et (si $k = 0$) $n_1, ..., n_k$ entiers relatifs non nuls. On munit F_2 de la loi de groupe naturelle, par concaténation de deux expressions, puis simplifications éventuelles.

1. Quel est le neutre ? quel est le symétrique d'une expression ?
2. Montrer que tout groupe engendré par deux éléments x et y est isomorphe à un quotient de F_2 via un morphisme envoyant a sur x et b sur y, et que ceci caractérise le groupe F_2, à isomorphisme près, parmi les groupes à deux générateurs.
3. F_2 est appelé le groupe libre à deux générateurs a et b, et on peut construire de même pour tout $n \in \mathbb{N}$ le groupe libre F_n à n générateurs (dont tout groupe engendré par n éléments est quotient de façon naturelle). Identifier F_0 et F_1.
4. Montrer que F_3 n'est pas isomorphe à F_2 (*Indication : compter les sous-groupes d'indice* 2).

Exercice 2. Exemples simples de présentations de groupes.

1. Identifier le groupe de présentation $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1}\rangle$, c'est-à-dire le quotient du groupe libre F_2 à deux générateurs a et b par le "sous-groupe normal engendré par" $aba^{-1}b^{-1}$ (à ne pas confondre avec le sous-groupe engendré, plus petit et non normal).
2. Montrer que le groupe de présentation $\langle x, y, z \mid y^2zx^{-2}\rangle$ est libre (on précisera le nombre de générateurs).
3. Montrer que le groupe de présentation $\langle x, y \mid x^2, y^3, xyx^{-1}y^{-1}\rangle$ est cyclique.

Exercice 3. Présentations du groupe diédral. Soit G le groupe de présentation $\langle r, s \mid r^n, s^2, (sr)^2\rangle$, de générateurs r et s.

1. Vérifier que G est engendré par r et s et que $r^n = s^2 = (sr)^2 = e$ (le neutre de G) et en déduire que G a au plus $2n$ éléments.
2. Montrer que tout groupe engendré par deux éléments vérifiant ces relations – en particulier le le groupe diédral D_n – est isomorphe à un quotient de G.
3. Déduire des deux questions précédentes que G est isomorphe à D_n.
4. En déduire qu'une (autre) présentation de D_n est : $\langle x, y \mid x^2, y^2, (xy)^n\rangle$.

Exercice 4. Application du lemme du ping-pong.

1. Montrer que le sous-groupe G de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ engendré par les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est libre.

   Indication : considérer l'action naturelle sur $\mathbb{R}^2$ et appliquer le lemme du ping-pong.

2. Le résultat persiste-t-il pour le groupe engendré par $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ où $k \in \mathbb{N}$?

Exercice 5. Action strictement 3-transitive de $\mathrm{PGL}_2(K)$ sur la droite projective. Soit K un corps. On considère l'action naturelle de $\mathrm{GL}_2(K)$ sur l'ensemble $\mathrm{P}^1(K)$ des droites vectorielles du plan K^2.

1. On note $\mathrm{P}^1(K) = K \cup \{\infty\}$, k représentant la droite d'équation $x = ky$ si $k \in K$ et celle d'équation $y = 0$ si $k = \infty$. Montrer qu'avec cette notation, l'action est donnée par
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (k) = \frac{ak+b}{ck+d}$$
dans le cas général (i.e. si $k \in K$ et $ck + d \neq 0$) et préciser les cas particuliers.

2. Soient, dans $\mathrm{P}^1(K)$, k_1, k_2, k_3 distincts et w_1, w_2, w_3 distincts. Démontrer qu'il existe une matrice $M \in \mathrm{GL}_2(K)$, unique à produit près par un scalaire, telle que
$$M(z_1) = w_1,\ M(z_2) = w_2 \text{ et } M(z_3) = w_3$$
Indication : calculer d'abord la solution dans le cas particulier $(w_1, w_2, w_3) = (0, 1, \infty)$ *puis se ramener à ce cas par composition.*

3. Quel est le noyau du morphisme $\mathrm{GL}_2(K) \to S_{\mathrm{P}^1(K)}$? En déduire une action naturelle de $\mathrm{PGL}_2(K)$ sur $\mathrm{P}^1(K)$.

Exercice 6. Présentation de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Par restriction de l'action ci-dessus, on identifie $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ à un groupe de transformations de $\mathrm{P}^1(\mathbb{C})$ (ou de $\mathrm{P}^1(\mathbb{R})$) dans lui-même.

1. Montrer que ce groupe est engendré par les deux transformations
$$S : z \mapsto -1/z \text{ et } T : z \mapsto z + 1.$$
Indication : pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ *avec* $c > 0$*, calculer* $ST^{-q}A$*, où* q *est le quotient de la division euclidienne de* a *par* c*, et faire une récurrence.*

2. Vérifier que S est d'ordre 2 et que $U := TS$ est d'ordre 3.

3. Vérifier que S envoie $X_1 :=]0, +\infty[$ dans $X_2 :=]-\infty, 0[$ et que U et U^2 envoient X_2 dans X_1. En déduire (par la même méthode que dans le lemme du ping-pong) que tout élément de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ s'écrit de manière unique comme un produit d'éléments U et U^2 avec des S intercalés, autrement dit qu'on a la présentation
$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \langle s, u \mid s^2, u^3 \rangle.$$