4. Étude de $PSL_2(K)$

Exercice 1. Soit K un corps. On se propose de montrer que $\mathrm{SL}_2(K)$ est engendré par les matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(K)$.

1. Si $c \neq 0$, montrer qu'il existe $s, t, u \in K$ tels que $M = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. En déduire que si b est non nul, une égalité similaire est satisfaite.
3. Si $b = c = 0$, se ramener à 1) ou 2) en composant par une matrice triangulaire et conclure.

Exercice 2. Soit K un corps. On considère le sous-groupe (dit de Borel) de $\mathrm{SL}_2(K)$

$$\mathbb{B} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} ; a \neq 0, b \in K \right\}$$

1. Etant donné $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(K)$ avec $c \neq 0$, montrer qu'il existe $P_1, P_2 \in \mathbb{B}$ tels que $M = P_1 w P_2$, où $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. En déduire que $\mathrm{SL}_2(K)$ est la réunion disjointe de $\mathbb{B}$ et de $\mathbb{B}w\mathbb{B}$.
3. En déduire qu'il n'existe pas de sous-groupe G tel que $\mathbb{B} \subsetneq G \subsetneq \mathrm{SL}_2(K)$.
4. Montrer que $\mathbb{B} \cap w\mathbb{B}w^{-1}$ est égale à l'ensemble des matrices diagonales dans $\mathrm{SL}_2(K)$.
5. Montrer que $\bigcap_{g \in \mathrm{SL}_2(K)} g\mathbb{B}g^{-1}$ est égal au centre de $\mathrm{SL}_2(K)$ (*On pourra utiliser la question précédente, et considérer* $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$).

Exercice 3. On se propose de montrer que si K est un corps de cardinal au moins 4, alors $\mathrm{SL}_2(K)$ est égal à son groupe dérivé $D(\mathrm{SL}_2(K))$.

1. Soient $a, t \in K^*$ et supposons $a^2 \neq 1$. Calculer le commutateur de $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Conclure à l'aide de l'exercice 1.

Exercice 4. Soit K un corps de cardinal au moins 4, $N \lhd \mathrm{PSL}_2(K)$ un sous-groupe normal, et $H = \pi^{-1}(N) \lhd \mathrm{SL}_2(K)$ la préimage de N par l'application naturelle $\pi \colon \mathrm{SL}_2(K) \to \mathrm{PSL}_2(K)$.

1. Montrer en utilisant l'exercice 2 que $H\mathbb{B}$ est égal à $\mathbb{B}$ ou $\mathrm{SL}_2(K)$.
2. Si $H\mathbb{B} = \mathbb{B}$ montrer que N est trivial (*Utiliser à nouveau l'exercice 2*).

Supposons maintenant $H\mathbb{B} = \mathrm{SL}_2(K)$, et considérons le sous-groupe U de $\mathbb{B}$ des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Si $u \in U$, montrer que $wuw^{-1} \in HU$.
2. Montrer que $HU = \mathrm{SL}_2(K)$ (*On pourra utiliser la question précédente et l'exercice 1*).
3. En déduire que $\mathrm{SL}_2(K)/H$ est isomorphe à $U/(U \cap H)$, et donc en particulier est commutatif.
4. En déduire que H contient $D(\mathrm{SL}_2(K))$.
5. Conclure que $\mathrm{PSL}_2(K)$ est simple.

Exercice 5. 1. En utilisant l'action naturelle sur les droites vectorielles de $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$, montrer que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ est isomorphe à S_4.

2. En déduire que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ est isomorphe à A_4, et donc en particulier n'est pas simple.
3. Montrer que $SL_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ est d'ordre 24, et calculer l'ordre de $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. En déduire que $SL_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ n'est pas isomorphe à S_4.
4. Montrer que $SL_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ est égal à un produit semi-direct $N \rtimes H$ avec $N \triangleleft SL_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ normal d'ordre 8 et H d'ordre 3 que l'on précisera.

Exercice 6. Soient K un corps et n un entier strictement positif. On note D le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(K)$ formé par les matrices diagonales, et H l'ensemble des matrices $M \in \mathrm{GL}_n(K)$ qui ont exactement un coefficient non nul sur chaque colonne et sur chaque ligne.

1. Montrer que H est un produit semi-direct $D \rtimes W$, où W est l'ensemble des matrices de permutation.
2. On suppose que K possède au moins trois éléments. Montrer que H est le normalisateur de D dans $\mathrm{GL}_n(K)$, c'est-à-dire l'ensemble des $g \in \mathrm{GL}_n(K)$ tels que $gDg^{-1} = D$. Ce résultat subsiste-t-il quand $K = \mathbb{F}_2$?