Devoir à rendre en TD le mardi 2 avril

Dans tout ce problème, p désigne un nombre premier (et k un entier naturel). Un groupe est dit trivial s'il est réduit au neutre. Un p-groupe fini est un groupe dont l'ordre est une puissance de p.

Le problème va consister principalement à donner une preuve du théorème suivant, dû à Ludvig Sylow (1832-1918) :

Tout groupe fini d'ordre divisible par p^k contient un sous-groupe d'ordre p^k.

Première partie : choix d'une méthode

Il en existe beaucoup. Celle proposée ici est de démontrer indépendamment :

- le théorème de Sylow pour tout p-groupe fini,
- l'existence, dans tout groupe fini, d'un "p-Sylow", c'est-à-dire d'un p-(sous-)groupe dont l'indice n'est pas divisible par p.

Le théorème de Sylow en résultera. Pourquoi ?

Deuxième partie : quelques exemples

1. Rappeler l'énoncé du théorème de Lagrange.
2. Expliquer pourquoi, pour un p-groupe fini G, le théorème de Sylow équivaut à ce que nous appellerons abusivement la "réciproque du théorème de Lagrange", c'est-à-dire : pour tout diviseur d de $|G|$, il existe dans G un sous-groupe d'ordre d.
3. En admettant le théorème de Sylow, démontrer que tout groupe abélien fini vérifie aussi cette réciproque.
4. Toujours en admettant le théorème de Sylow, démontrer que le groupe alterné A_4 est le plus petit groupe ne vérifiant pas cette réciproque.

Troisième partie : cas d'un p-groupe

Soit H un p-groupe fini non trivial.

1. Montrer que le centre $Z(H)$ de H n'est pas trivial (utiliser l'équation aux classes pour l'action par conjugaison de H sur lui-même).
2. En déduire que $Z(H)$ contient un élément a d'ordre p (prendre une puissance adéquate d'un élément non neutre).
3. En considérant le groupe quotient $H/\langle a\rangle$, en déduire, par récurrence, le théorème de Sylow pour tout p-groupe fini.

Quatrième partie : existence d'un p-Sylow

Soient G un groupe d'ordre n et $L = GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ le groupe des matrices carrées de taille n, inversibles, à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

1. Montrer que G s'identifie (par un morphisme injectif) à un sous-groupe de L (injecter d'abord G dans le groupe symétrique S_n : c'est le "théorème" de Cayley).
2. Démontrer que L est d'ordre $(p^n-1)(p^n-p)(p^n-p^2)\ldots(p^n-p^{n-1})$.
3. On considère, dans L, le sous-groupe T des matrices triangulaires supérieures dont les n éléments diagonaux valent $\overline{1}$. Montrer que T est un p-Sylow de L.
4. Pour l'action de G sur l'ensemble L/T par translations à gauche, $g.(xT) = (gx)T$, montrer que le stabilisateur d'un élément quelconque xT de L/T est $xTx^{-1}\cap G$ et en déduire que ce sous-groupe de G est un p-groupe.
5. En déduire (en considérant l'équation aux classes) que G possède au moins un p-Sylow.