UPS, L2 Parcours spécial, Théorie des Groupes

FEUILLE 2

Actions de groupes.

> **Rappel : Formule des classes**
> Si G est un groupe fini opérant sur un ensemble fini X, pour tout $x \in X$ on a l'égalité :
>
> $$|G| = |\mathrm{Orb}(x)| \cdot |\mathrm{Stab}(x)|$$
>
> Si de plus on choisit des représentants $x_i \in X$ des orbites, alors
>
> $$|X| = \sum_i |\mathrm{Orb}(x_i)|$$

Exercice 1. Soit $G = \left\{ f = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in GL(2; R) \right\}$.

On fait agir G sur $\mathbb{R}^2$ de façon naturelle. Décrire les orbites.

Exercice 2. On fait agir S_3 sur S_3 par conjuguaison. Décrire les orbites et les stabilisateurs.

Exercice 3. Un groupe de 35 éléments opère sur un ensemble de 19 éléments en ne laissant fixe aucun d'eux. Combien y a t-il d'orbites ?

Exercice 4. Soit G un groupe de $143 = 11.13$ éléments opérant sur un ensemble de 108 éléments. Montrer qu'il existe un point fixe.

Exercice 5. Soit G un groupe d'ordre n et q un diviseur de n. On fait agir G sur G par conjuguaison. Montrer que si $g \in G$ est d'ordre q alors $|Orb(g)|$ divise n/q.

Exercice 6. En considérant l'action par conjugaison de A_5 sur l'ensemble des $5-$cycles montrer qu'il existe deux classes de conjugaisons de $5-$cycles dans A_5.

Exercice 7. Soit G un groupe fini qui opère sur un ensemble fini S. Pour tout $g \in G$, on pose :

$$\mathrm{Fix}(g) = \{s \in S \text{ tel que } g \cdot s = s\}.$$

a) Démontrer la formule $\sum_{s\in S} |\mathrm{Stab}(s)| = \sum_{g\in G} |\mathrm{Fix}(g)|$.

b) En déduire la formule de Burnside :

$$|G| \times (\text{nombre d'orbites}) = \sum_{g\in G} |\mathrm{Fix}(g)|.$$

Exercice 8. Soit G le groupe des isométries directes de $\mathbb{R}^3$ préservant un cube.

a) Montrer que G est isomorphe à S_4.

b) Décrire géométriquement les classes de conjugaison de G.

c) A l'aide de la formule de Burnside, déterminer le nombre de façons de colorier les faces d'un cube avec au plus trois couleurs à disposition.

Exercice 9. Soit $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ le groupe des matrices 2×2 à coefficients réels et de déterminant égal à 1. On note

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

le demi-plan supérieur (appelé *demi-plan de Poincaré*).

a) Montrer que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$$

définit une action de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ sur $\mathbb{H}$.

b) Quel est le stabilisateur de i ?

c) Interpréter géométriquement l'action d'une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et l'action d'une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$.

d) Quelle est l'orbite de i sous l'action de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$?

e) L'action de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ sur $\mathbb{H}$ est-elle transitive ?

Exercice 10. Soit $n \geq 1$ et $\mathrm{O_n}(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n) \mid {}^tAA = I\}$ le groupe orthogonal de degré n sur $\mathbb{R}$. On considère l'action de $\mathrm{O_n}(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n$ définie par

$$\forall (A,x) \in \mathrm{O_n}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n, \quad A \cdot x = Ax.$$

Montrer que les orbites sont les sphères de centre 0.
Indication : Vous pouvez utiliser sans démonstration les faits suivants :

- Tout vecteur de norme 1 peut être compléter en une base orthonormée.
- La matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée est une matrice orthogonale.

Groupe symétrique.

Exercice 11. Soient $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Calculer (en notation cyclique) $\sigma \circ \tau$, $\sigma^2 \circ \tau$, $\sigma \circ \tau^{-1}$.

b) Quels sont les ordres de τ, σ, $\sigma \circ \tau$, $\sigma^2 \circ \tau$, $\sigma \circ \tau^{-1}$?

c) Exprimer τ comme un produit de transpositions de la forme $(i, i+1)$.

d) Exprimer $\sigma \circ \tau$ comme un produit de $3-$cycles.

Exercice 12.

a) Montrer que tout élément $\sigma \in S_n$ est conjugué à son symétrique σ^{-1}.

b) Soit $\tau = (1234)$ dans S_4, expliciter la conjugaison entre τ et τ^{-1}.

Exercice 13. On note :

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$s' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 3 & 7 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Ces deux permutations sont-elles conjuguées dans S_7 ?

b) Posons $s_1 = (35)s'$, $s_2 = (57)s'$. Ces deux permutations sont-elles conjuguées à s ?

Exercice 14.

a) Quels sont les diviseurs de $|S_5|$?

b) Combien y a-t-il de classes de conjugaison dans S_5 ?

c) Quels sont les ordres possibles pour un élément de S_5 ?

Exercice 15. Montrer que les 3-cycles engendrent A_n pour $n \geq 3$.

Exercice 16. Montrer que tout groupe fini G peut être vu comme un sous-groupe d'un groupe symétrique S_n pour un certain n.

Exercice 17. Dans S_8, déterminer le nombre de permutations qui se décomposent :

a) en un produit de deux cycles de longueur 3,

b) en un produit de trois cycles dont deux de longueur 2 et un de longueur 3.

c) Mêmes questions dans A_8.

Exercice 18.

a) Combien y-a-t'il d'éléments d'ordre 2 dans A_4 ?

b) Montrer que le groupe engendré par ces éléments est normal dans A_4.

c) En déduire un exemple de 3 groupes $F \subset G \subset H$ avec F normal dans G, G normal dans H, mais F non normal dans H.

Exercice 19. Dans le groupe symétrique S_9, on considère les cycles

$$\sigma = (1, 4, 5, 2, 3, 6) \text{ et } \tau = (7, 6, 5, 8, 9).$$

a) Quelle est la signature de $\pi = \sigma\tau$?

b) Décomposer π en produit de cycles disjoints. Quel est l'ordre de π ?

c) Expliquer pourquoi π^{2001} est produit de trois transpositions disjointes. Calculer ces trois transpositions.

Exercice 20. On considère les deux permutations dans S_6 :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Donner les décompositions en cycles disjoints de σ et τ.

b) Calculer l'ordre de σ et τ. Ces deux permutations sont-elles conjuguées ?

c) Calculer la signature de $\sigma^2\tau^3$.

d) Combien y a-t-il d'élément de S_6 qui sont conjugués à τ ?

e) Décomposer $\tau \circ \sigma^{-1}$ en un produit de 3-cycles, si c'est possible.

Exercice 21. On considère dans S_7 :

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 1 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

a) Ecrire π comme produit de cycles disjoints.

b) En déduire la signature et l'ordre de π.

c) Combien y-a-t'il d'éléments dans S_7 conjugués avec π ?

Exercice 22.

a) Donner un exemple de sous-groupe d'ordre 2, 3, et 4 du groupe alterné A_4.

b) A_4 admet-il un sous-groupe d'ordre 6 (si oui, donner un exemple ; si non, justifier) ?

Exercice 23. Montrer que le groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ (matrices 2×2 de déterminant 1 à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) est isomorphe au groupe symétrique S_3. (Question subsidiaire : qu'obtient-on si on regarde les matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$?).