Corrigé examen partiel "Groupes"

I - Exemples de groupes (6 points)

1. Le groupe additif $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ est un exemple de groupe cyclique, $\bar{1}$ est un générateur (en effet $\bar{2} = \bar{1} + \bar{1}$ et $\bar{0} = \bar{1} + \bar{1} + \bar{1}$).

   Un autre exemple était le groupe multiplicatif $U_n \subset \mathbb{C}^*$ des racines $n$ième de l'unité, par exemple $U_3 = \{1, e^{2i\pi/3}, e^{-2i\pi/3}\}$, engendré par $e^{2i\pi/3}$.

2. Le groupe additif $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est un exemple de groupe commutatif, fini, et non cyclique.

3. Le groupe additif $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs est un exemple de groupe infini monogène (en fait, le seul à isomorphisme près), 1 est un générateur.

4. Le groupe multiplicatif $\mathbb{R}^*$ est un exemple de groupe *commutatif* (j'avais oublié le mot dans l'énoncé, mais cela ne semble avoir troublé personne...) infini non monogène.

   Autres exemples : Les groupes additifs $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

5. Le groupe $\mathrm{Isom}(T)$ des isométries du plan préservant un triangle équilatéral T (de sommets A, B, C, ordonnés dans le sens trigonométrique) est un exemple de groupe fini non commutatif. Si S_A et S_B sont les symétries d'axes les bissectrices issues de A et B, on a $S_B \circ S_A = R$ et $S_A \circ S_B = R^{-1}$ où R est la rotation d'angle $2\pi/3$ préservant T, ainsi S_A et S_B sont deux éléments de $\mathrm{Isom}(T)$ qui ne commutent pas.

6. Le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ des matrices inversibles 2×2 à coefficients réels est un exemple de groupe infini non commutatif. Par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mais $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Remarque : il existe des matrices dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ qui commutent, par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$...

II - Sous-groupes de $\mathbb{Z}$ (4 points : 2 pour la liste et 2 pour la justification)

Montrons que les sous-groupes du groupe additif $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs sont exactement les sous-groupes de la forme $n\mathbb{Z}$, pour un entier $n \geq 0$.

D'une part pour $n \geq 0$, l'ensemble $n\mathbb{Z}$ des multiples de n est bien un sous-groupe, c'est-à dire un ensemble non vide (car contenant 0) stable par addition et passage à l'opposé : si na et nb sont deux multiples de n, alors $na + nb = n(a+b)$ et $-na = n(-a)$ sont encore des multiples de n.

D'autre part on montre que tout sous-groupe H de $\mathbb{Z}$ est de cette forme. Si $H = \{0\}$, on a $H = 0\mathbb{Z}$ et on a fini. Sinon, on considère $n > 0$ l'entier positif minimal contenu dans H, et on montre que tout a dans H est un multiple de n. Ecrivons la division euclidienne $a = nq + r$ avec $0 \leq r < n$. Comme a et nq sont dans H, on a $r = a - nq$ dans H également, et la minimalité de n implique $r = 0$ comme attendu. Ainsi $H \subset n\mathbb{Z}$, et l'inclusion inverse étant claire, on conclut $H = n\mathbb{Z}$.

III - Le groupe diédral D_4 (6 points)

1. Le groupe diédral D_4 est d'ordre 8, voici la liste de ses éléments :

   - l'identité, d'ordre 1;
   - Les symétries par rapport à chacune des deux diagonales, d'ordre 2;

- Les symétries par rapport aux deux droites passant par les milieux de côtés opposés, d'ordre 2;
- Les rotations centrées en O et d'angle $\pm\pi/2$, d'ordre 4;
- La symétrie centrale, ou ce qui revient au même la rotation centrée en O d'angle π, d'ordre 2.

2. Le groupe D_4 est d'ordre 8 mais on vient de voir qu'il ne contient aucun élément d'ordre 8, donc il n'est pas cyclique.

3. Notons R la rotation d'angle $\pi/2$ et S la symétrie par rapport à une diagonale. Alors $\{R,S\}$ est une partie génératrice de D_4 : en effet $H = \langle R,S\rangle$ est un groupe contenant le groupe d'ordre 4 $\langle R\rangle$, et de plus le contenant strictement car $S \notin \langle R\rangle$. Par Lagrange on a d'une part 4 qui divise strictement $|H|$, et d'autre part $|H|$ qui divise $|D_4| = 8$: on conclut que $|H| = 8$ et donc $H = D_4$.

4. Un isomorphisme fait correspondre des éléments de même ordre. Or le groupe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ contient deux éléments d'ordre 4 ($\bar{1}$ et $\bar{3}$) alors que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ n'en contient pas (il contient le neutre et trois éléments d'ordre 2). Ainsi ces deux groupes, bien que de même ordre, ne sont pas isomorphes.

5. Le sous-groupe de D_4 engendré par la rotation R d'angle $\pi/2$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Explicitement on a un isomorphisme
$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} &\to \langle R\rangle \\ \bar{a} &\mapsto R^a \end{aligned}$$

6. Le sous-groupe $H = \{id, S_O, S_1, S_2\}$ de D_4 contenant la symétrie centrale S_O et les deux symétries par rapport aux diagonales est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Explicitement un isomorphisme est donné par la bijection $\varphi\colon \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \langle R\rangle$ qui envoie
$$\begin{array}{ll} (\bar{0},\bar{0}) \mapsto id & \qquad (\bar{1},\bar{0}) \mapsto S_O \\ (\bar{0},\bar{1}) \mapsto S_1 & \qquad (\bar{1},\bar{1}) \mapsto S_2 \end{array}$$
Il s'agit bien d'un morphisme car aussi bien dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ que dans H, le produit de deux éléments distincts d'ordre 2 donne le troisième élément d'ordre 2 du groupe.

IV - Quizz (5 points).

1. Vrai. Si G est un groupe cyclique, par définition il existe $g \in G$ et $n \geq 1$ tel que $G = \langle g\rangle = \{1, g, g^2, \dots, g^{n-1}\}$. Alors l'application $\phi : \bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mapsto g^a \in G$ est un isomorphisme.

2. Vrai. Le groupe $\mathrm{Isom}(T)$ des isométries préservant un triangle équilatéral est d'ordre 6 mais ne contient aucun élément d'ordre 6.

3. Vrai. Par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ correspond à une rotation d'un quart de tour, et on vérifie que $A^2 = -id$, $A^3 = -A$, $A^4 = id$.

4. Vrai. Il existe bien des groupes infinis dont tous les éléments sont d'ordre fini, par exemple le groupe additif $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$ des polynômes à coefficient dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Un exemple similaire s'obtient en considérant le produit d'un nombre infini de copies de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Un autre exemple est le groupe multiplicatif $U \subset \mathbb{C}^*$ de toutes les racines de l'unité de n'importe quel ordre.

5. Faux. Donnons un contre-exemple. Soit $X = \{0,1\}$, et considérons la relation $\sim$ donnée par $1 \sim 1$ mais $1 \not\sim 0$, $0 \not\sim 1$ et $0 \not\sim 0$. Cette relation est symétrique ($x \sim y$ implique $y \sim x$) et transitive ($x \sim y$ et $y \sim z$ implique $x \sim z$) mais pas réflexive (0 n'est pas en relation avec lui-même).

   De façon générale, le fait qu'une relation soit symétrique et transitive ne garantit pas que tout élément soit en relation avec au moins un élément (mais si c'est bien le cas, alors on a automatiquement la réflexivité).