Groupes

Examen partiel

Durée: 2 heures

Documents, calculatrice ou téléphone interdits. Le barème sur 21 est indicatif.

I - Exemples de groupes (6 points)

Pour chacune des six questions suivantes, je n'attends pas de justification, par contre bien préciser l'ensemble et la loi pour chacun des exemples de groupe.

1. Donner un exemple de groupe cyclique, et expliciter un générateur.
2. Donner un exemple de groupe commutatif, fini, et non cyclique.
3. Donner un exemple de groupe infini monogène, et expliciter un générateur.
4. Donner un exemple de groupe infini non monogène.
5. Donner un exemple de groupe fini non commutatif, et expliciter deux éléments qui ne commutent pas.
6. Donner un exemple de groupe infini non commutatif, et expliciter deux éléments qui ne commutent pas.

II - Sous-groupes de $\mathbb{Z}$ (4 points)

Donner la liste complète des sous-groupes de $\mathbb{Z}$ (groupe additif des entiers relatifs). J'attends ici une justification précise en quelques lignes.

III - Le groupe diédral D_4 (6 points)

Soit C un carré tracé dans le plan $\mathbb{R}^2$, on notera A_1, A_2, A_3, A_4 ses sommets énumérés dans le sens trigonométrique et O son centre (intersection des deux diagonales). On rappelle que la notation D_4 désigne le groupe des isométries du plan préservant le carré C. Faire un dessin !

1. Etablir la liste des éléments de D_4, en précisant pour chacun son ordre.
2. Le groupe D_4 est-il cyclique ?
3. Donner une partie génératrice de D_4 contenant deux éléments, en justifiant qu'il s'agit bien d'une partie génératrice.
4. Montrer que les groupes $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ne sont pas isomorphes.
5. Donner un sous-groupe de D_4 qui est isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, en explicitant l'isomorphisme.
6. Donner un sous-groupe de D_4 qui est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, en explicitant l'isomorphisme.

TSVP $\Rightarrow$

IV - Quizz (5 points).

Répondre par vrai ou faux en donnant suivant les cas un court argument (trois lignes grand maximum) ou un contre-exemple (réponse non justifiée = 0 point !).

1. Si G est un groupe cyclique, il existe $n \geq 1$ tel que G soit isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: vrai ou faux ?
2. Il existe un groupe d'ordre 6 qui ne contient aucun élément d'ordre 6 : vrai ou faux ?
3. Il existe un élément d'ordre 4 dans le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$: vrai ou faux ?
4. Il existe un groupe infini dont tous les éléments sont d'ordre fini : vrai ou faux ?
5. Une relation sur un ensemble X qui est symétrique et transitive est automatiquement réflexive : vrai ou faux ?