Structures algébriques (groupes)
Examen partiel

Durée: 2 heures

Documents, calculatrice ou téléphone interdits. Le barême sur 21 est indicatif.

I - Exemples (5 points)

Justifier en une ou deux phrases chacune des réponses :

1. Donner la liste des éléments d'ordre 4 dans le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ des complexes non nuls.
2. Donner un exemple de polygone P tel que le groupe $\mathrm{Isom}(P)$ des isométries du plan préservant P soit d'ordre 4.
3. Donner un exemple d'élément d'ordre 4 dans le groupe alterné A_8.
4. Donner (sans faire la liste des images !) un isomorphisme entre le groupe $\mathrm{Isom}(T)$ des isométries du plan préservant un triangle équilatéral et le groupe symétrique S_3.
5. Donner un exemple de groupe contenant à la fois des éléments d'ordre infini et des éléments d'ordre fini en plus du neutre.

II - Groupe symétrique (5 points)

Notons σ la permutation suivante de $\{1, \dots, 9\}$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 6 & 5 & 8 & 9 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Écrire la décomposition canonique en cycles de σ.
2. Calculer l'ordre de σ, en citant le résultat du cours utilisé.
3. Calculer la signature de σ.
4. Trouver, si c'est possible, une permutation $\omega \in S_9$ telle que
$$\omega\sigma\omega^{-1} = (1\,2)(3\,4\,5)(6\,7\,8\,9).$$
5. Calculer σ^{2016}.

TSVP ⇒

III - Groupes commutatifs (6 points)

1. Soient x et y deux éléments d'ordres finis, premiers entre eux, d'un groupe commutatif G. Montrer que l'ordre de xy est égal au produit des ordres de x et y.

2. Soit y un élément d'un groupe G d'ordre $p^\alpha m$ où m est un entier et p est premier. Montrer que y^m est d'ordre p^α.

3. Soit G un groupe commutatif fini. Montrer que si $x, y \in G$ sont d'ordre respectif a, b, alors il existe un élément dans G dont l'ordre est PPCM(a, b).

4. En déduire qu'il existe un élément de G dont l'ordre est le ppcm des ordres des éléments de G.

5. Calculer l'ordre de chaque élément du groupe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Le résultat de la question 4 est-il vérifié ?

6. Calculer l'ordre de chaque élément du groupe symétrique S_3. Le résultat de la question 4 est-il vérifié ?

IV - Quizz (5 points).

Répondre par vrai ou faux en donnant suivant les cas un court argument (trois lignes grand maximum) ou un contre-exemple (réponse non justifiée = 0 point !).

1. Le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est un exemple de groupe fini, commutatif et non cyclique : vrai ou faux ?

2. Tout sous-groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (où $n \geq 2$) est cyclique : vrai ou faux ?

3. Il existe deux groupes d'ordre 5 non isomorphes : vrai ou faux ?

4. Il existe une action sans point fixe d'un groupe d'ordre 15 sur un ensemble de cardinal 7 : vrai ou faux ?

5. Il existe 5 éléments d'ordre 2 dans le groupe Isom(C) des isométries du plan préservant un carré C : vrai ou faux ?