Structures algébriques (groupes)
Examen final - Corrigé

I - Exemples (8 points).

Justifier en une ou deux phrases chacune des réponses :

1. Donner, si c'est possible, un exemple d'élément d'ordre 30 dans le groupe symétrique S_{10}.

   Solution. (**1 point**)
   $\sigma = (1\,2\,3\,4\,5)(6\,7\,8)(9\,10)$ *convient, car* σ *est de type* $2, 3, 5$, *et donc son ordre est* $PPCM(2, 3, 5) = 30$.

2. Donner un exemple d'élément d'ordre infini dans le groupe $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

   Solution. (**1 point**)
   Il suffit de prendre une rotation d'axe quelconque et d'angle de la forme $2\pi\alpha$, *avec* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *un réel non rationnel.*

3. Donner deux exemples non isomorphes de groupes d'ordre 10.

   Solution. (**1 point**)
   Le groupe cyclique $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ *(qui est commutatif), et le groupe diédral* D_{10} *(groupe des isométries préservant un pentagone régulier, qui est non commutatif).*

4. Donner un exemple de morphisme non trivial du groupe symétrique S_n vers le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$.

   Solution. (**1 point**)
   Le morphisme signature, qui a une permutation σ *associe* $(-1)^r$ *si* σ *s'écrit à l'aide de* r *transpositions.*

5. Donner un exemple de p-groupe non commutatif, pour un nombre premier p de votre choix.

   Solution. (**1 point**)
   Le groupe diédral D_8 *(groupe des isométries d'un carré), ou encore le groupe quaternionique* $\mathbb{H}_8$, *tous deux d'ordre* $8 = 2^3$.

6. Donner trois exemples d'isométries g_1, g_2, g_3 dans le groupe $\mathrm{Isom}(C)$ des isométries du plan préservant un carré, qui soient toutes d'ordre 2 mais deux à deux non conjuguées.

   Solution. (**1 point**)
   Symétrie par rapport à une diagonale, symétrie centrale, symétrie par rapport

à une droite passant par des milieux de côtés opposés. Si $g_i = \omega g_j \omega^{-1}$, alors le lieu fixe de g_i est l'image par ω du lieu fixe de g_j, ce qui permet de conclure que les trois exemples donnés sont deux à deux non conjugués.

7. Si p est un nombre premier, donner un exemple de p-Sylow dans le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

   Solution. (**1 point**)
   Le groupe d'ordre p des matrices 2×2 triangulaires supérieures avec 1 sur la diagonale. En effet $|\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})| = (p^2-1)(p^2-p) = p(p^2-1)(p-1)$ où $m = (p^2-1)(p-1)$ est premier avec p.

8. Donner, si c'est possible, un exemple de permutation $\omega \in S_9$ qui conjugue les permutations

$$\sigma_1 = (1\,2)(3\,4\,5)(6\,7\,8\,9) \quad \text{et} \quad \sigma_2 = (1\,2\,3\,4)(5\,6\,7)(8\,9),$$

   c'est-à-dire tel que $\sigma_2 = \omega\sigma_1\omega^{-1}$.

   Solution. (**1 point**)
   C'est possible car les longueurs des cycles coïncident, et on peut prendre $\omega = (1\,8\,3\,5\,7\,2\,9\,4\,6)$

II - Questions de cours (6 points).

Vous devriez consacrer environ une demi-page pour chacune des questions suivantes.

1. Rappeler la définition de sous-groupe distingué, puis montrer que si H est un sous-groupe d'indice 2 d'un groupe G, alors H est distingué dans G.

   Solution. (**1.5 points**)
   On dit qu'un sous-groupe $H \subset G$ est distingué si pour tout $g \in G$, on a $gHg^{-1} = H$. Cette condition peut aussi s'écrire $gH = Hg$.

   Maintenant supposons $H \subset G$ d'indice 2. Soit g in G, on veut montrer que $gH = Hg$. D'une part, si $g \in H$, alors $gH = Hg = H$. D'autre part, si $g \in G \setminus H$, alors comme les deux classes à gauche (et de même les deux classes à droite) forment une partition de G, on a $gH = Hg = G \setminus H$.

2. Donner la liste des groupes commutatifs d'ordre 100 à isomorphisme près, en énonçant le théorème de classification que vous utilisez.

   Solution. (**1.5 points**)
   On sait que tout groupe commutatif fini s'écrit de façon unique comme un produit de groupes cycliques $\mathbb{Z}/a_i\mathbb{Z}$, avec a_{i+1} qui divise a_i pour tout i. On obtient 4 groupes commutatifs d'ordre 100 à isomorphisme près :

$$\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/50\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/20\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}.$$

On pouvait aussi utiliser l'autre théorème de classification, qui dit que tout groupe commutatif fini s'écrit de façon unique (à l'ordre des facteurs près) comme un produit de p-groupes cycliques. On obtient alors les 4 groupes sous la forme équivalente suivante :

$$\mathbb{Z}/25\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/25\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z},$$
$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}.$$

3. En utilisant une action que l'on précisera, montrer qu'un groupe G d'ordre p^a, où p est premier et $a \geq 1$, admet un centre $\mathcal{Z}(G)$ non réduit à $\{1\}$.

   Solution. (**1.5 points**)
   On considère l'action de G sur lui-même par conjugaison :

$$\begin{aligned} G \times G &\to G \\ (g\,,x) &\mapsto gxg^{-1} \end{aligned}$$

   Les éléments du centre $\mathcal{Z}(G)$ correspondent aux orbites singleton de cette action. Tout autre orbite est de cardinal différent de $1 = p^0$, et divisant p^a, en particulier c'est un multiple de p. En écrivant que $|G| = p^a$ est la somme des cardinaux des orbites, et en réduisant modulo p, on obtient

$$0 \equiv |\mathcal{Z}(G)| \mod p.$$

   En particulier $|\mathcal{Z}(G)| \neq 1$, c'est-à-dire $\mathcal{Z}(G)$ est non trivial.

4. Rappeler dans quel cas on dit que $G = K \rtimes H$ est le produit semi-direct de deux sous-groupes K et H, puis montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \rtimes H$, pour un sous-groupe $H \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ isomorphe à $\mathbb{C}^*$ que l'on précisera.

   Solution. (**1.5 points**)
   On dit que $G = K \rtimes H$ si $K \lhd G$ est distingué, $KH = G$ et $K \cap H = \{1\}$.

   On pose H égal au groupe des matrices de la forme $D_a := \begin{pmatrix} a & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$, *où $a \in \mathbb{C}^*$.*

   On a $\det D_a = a$ ce qui donne $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \cap H = \{id\}$. Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est de déterminant a, alors $A = (AD_a^{-1})D_a$ ce qui montre que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \cdot H$. Enfin $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \lhd \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ comme noyau du morphisme déterminant.

III - Le groupe symétrique S_4 (6 points).

1. Etablir la liste complète des classes de conjugaison dans le groupe symétrique S_4, en précisant pour chacune son cardinal.

   Solution. (**1.5 points**)
   Les classes de conjugaison sont données par le type (longueur des cycles dans la décomposition canonique). On obtient 5 classes de conjugaison :

   - *La classe de l'identité (cardinal 1);*
   - *La classe des transpositions (cardinal 6);*
   - *La classe des 3-cycles (cardinal 8);*
   - *La classe des 4-cycles (cardinal 6);*
   - *La classe des double transpositions (cardinal 3).*

2. Soit $\mathcal{T}$ un tétraèdre régulier dans $\mathbb{R}^3$. Montrer que le groupe $\mathrm{Isom}(\mathcal{T})$ des isométries de $\mathbb{R}^3$ préservant $\mathcal{T}$ est isomorphe à S_4 (justification concise attendue, sans faire la liste des images !).

   Solution. (**1.5 points**)
   On note A_1, A_2, A_3, A_4 les sommets du tétraèdre. On définit un morphisme ϕ de $\mathrm{Isom}(\mathcal{T})$ *vers S_4, en posant $\phi(f) = \sigma$ si $f(A_i) = A_{\sigma(i)}$ pour tout i. On sait que* $\mathrm{Isom}(\mathcal{T})$ *est de cardinal égal au nombre de drapeaux du tétraèdre, ou encore à 4 fois le nombre d'arêtes, ce qui correspond ici a $4 \cdot 6 = 24$. Par ailleurs $24 = 4!$ est aussi le cardinal de S_4, donc pour montrer que ϕ est bijective il suffit de montrer que ϕ est injective. En mettant l'origine de $\mathbb{R}^3$ au centre du tétraèdre, on peut voir* $\mathrm{Isom}(\mathcal{T})$ *comme un sous-groupe de* $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$. *Si $f \in \mathrm{Isom}(\mathcal{T}) \subset \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ préserve la base A_1, A_2, A_3, alors $f = id$, ce qui montre l'injectivité de ϕ.*

3. Pour chacune des classes de conjugaison trouvées à la question 1, donner une isométrie dans $\mathrm{Isom}(\mathcal{T})$ qui réalise (via l'isomorphisme de la question 2) une permutation dans cette classe.

   Solution. (**1.5 points**)

   - *La classe de l'identité : l'identité;*
   - *La classe des transpositions : symétrie par rapport au plan passant par une arête et le milieu de l'arête opposée;*
   - *La classe des 3-cycles : rotation d'axe passant par un sommet et le milieu de la face opposée, et d'angle $\pm 2\pi/3$;*
   - *La classe des 4-cycles : en reliant les milieux de 4 des 6 arêtes on peut construire un carré (3 choix possibles), la rotation d'un quart de tour de ce carré suivi de la symétrie par rapport au plan contenant le carré est l'élément d'ordre 4 cherché;*
   - *La classe des double transpositions : rotation d'axe passant par des milieux d'arêtes opposées, et d'angle π.*

4. Donner la liste des sous-groupes distingués de S_4, en justifiant pourquoi votre liste est complète.

SOLUTION. (**1.5 points**)
Un sous-groupe distingué de S_4 est une union de classes de conjugaison (dont celle du neutre), et par le théorème de Lagrange son cardinal doit diviser 24. Ces contraintes donnent 4 candidats, dont on vérifie qu'ils sont bien des sous-groupes :

$$\{id\}, S_4, A_4, V_4$$

où A_4 est le groupe alterné, d'ordre 12 (contenant les 3-cycles et les double transpositions), et V_4 est le groupe d'ordre 4 contenant les double transpositions.