Structures algébriques (groupes)
Examen final

Durée: 2 heures

Documents, calculatrice ou téléphone interdits. Le barême sur 20 est indicatif.

I - Exemples (8 points).

Justifier en une ou deux phrases chacune des réponses :

1. Donner, si c'est possible, un exemple d'élément d'ordre 30 dans le groupe symétrique S_{10}.
2. Donner un exemple d'élément d'ordre infini dans le groupe $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.
3. Donner deux exemples non isomorphes de groupes d'ordre 10.
4. Donner un exemple de morphisme non trivial du groupe symétrique S_n vers le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$.
5. Donner un exemple de p-groupe non commutatif, pour un nombre premier p de votre choix.
6. Donner trois exemples d'isométries g_1, g_2, g_3 dans le groupe $\mathrm{Isom}(C)$ des isométries du plan préservant un carré, qui soient toutes d'ordre 2 mais deux à deux non conjuguées.
7. Si p est un nombre premier, donner un exemple de p-Sylow dans le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.
8. Donner, si c'est possible, un exemple de permutation $\omega \in S_9$ qui conjugue les permutations
$$\sigma_1 = (1\,2)(3\,4\,5)(6\,7\,8\,9) \quad \text{et} \quad \sigma_2 = (1\,2\,3\,4)(5\,6\,7)(8\,9),$$
c'est-à-dire tel que $\sigma_2 = \omega\sigma_1\omega^{-1}$.

II - Questions de cours (6 points).

Vous devriez consacrer environ une demi-page pour chacune des questions suivantes.

1. Rappeler la définition de sous-groupe distingué, puis montrer que si H est un sous-groupe d'indice 2 d'un groupe G, alors H est distingué dans G.
2. Donner la liste des groupes commutatifs d'ordre 100 à isomorphisme près, en énonçant le théorème de classification que vous utilisez.
3. En utilisant une action que l'on précisera, montrer qu'un groupe G d'ordre p^a, où p est premier et $a \geq 1$, admet un centre $\mathcal{Z}(G)$ non réduit à $\{1\}$.
4. Rappeler dans quel cas on dit que $G = K \rtimes H$ est le produit semi-direct de deux sous-groupes K et H, puis montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \rtimes H$, pour un sous-groupe $H \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ isomorphe à $\mathbb{C}^*$ que l'on précisera.

III - Le groupe symétrique S_4 (6 points).

1. Etablir la liste complète des classes de conjugaison dans le groupe symétrique S_4, en précisant pour chacune son cardinal.
2. Soit $\mathcal{T}$ un tétraèdre régulier dans $\mathbb{R}^3$. Montrer que le groupe $\mathrm{Isom}(\mathcal{T})$ des isométries de $\mathbb{R}^3$ préservant $\mathcal{T}$ est isomorphe à S_4 (justification concise attendue, sans faire la liste des images !).
3. Pour chacune des classes de conjugaison trouvées à la question 1, donner une isométrie dans $\mathrm{Isom}(\mathcal{T})$ qui réalise (via l'isomorphisme de la question 2) une permutation dans cette classe.
4. Donner la liste des sous-groupes distingués de S_4, en justifiant pourquoi votre liste est complète.