Corrigé

1. Calculer la limite quand x tend vers 0 de la fonction $f(x) = \dfrac{\sin x}{\ln(1+x)}$.

Réponse :

On connait les limites

$$\lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

on en déduit que $f(x) = \dfrac{sinx}{x} \cdot \dfrac{x}{\ln(1+x)}$ tend également vers 1 quand x tend vers 0.

NB : on pouvait aussi appliquer la règle de l'Hôpital.

2. Calculer la dérivée de la fonction

$$f(x) = \ln(\cos(x^3)).$$

Réponse :

$$f'(x) = \frac{1}{\cos(x^3)} \cdot (\cos(x^3))' = \frac{-3x^2 \sin(x^3)}{\cos(x^3)}.$$

3. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, et $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a+1) = 2f(a)$. Quelle conclusion obtient-on en appliquant le théorème des accroissements finis à f sur l'intervalle $[a, a+1]$?

Réponse :

On obtient qu'il existe $c \in]a, a+1[$ tel que

$$\frac{f(a+1) - f(a)}{(a+1) - a} = f'(c),$$

ce qui en remplaçant $f(a+1)$ par $2f(a)$ puis en simplifiant équivaut à

$$f(a) = f'(c).$$

4. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la primitive de f telle que $F(3) = 0$. Donner une expression de $F(x)$ à l'aide d'une intégrale.

Réponse :

$$F(x) = \int_3^x f(t)\, dt.$$