Corrigé

1. Dans $\mathbb{R}^3$, considérons la droite vectorielle D contenant le vecteur $(1,0,0)$. Donner les équations de trois plans distincts P_1, P_2, P_3 contenant chacun la droite D.

> *Réponse* :
>
> (1 point) Les trois plans suivants (parmi beaucoup de choix possibles) conviennent :
>
> $$P_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ y = 0\}$$
> $$P_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z = 0\}$$
> $$P_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ y + z = 0\}$$

2. Donner une base du noyau de l'application linéaire f définie par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & x - 2y - 3z \end{array}$$

> *Réponse* :
>
> (1 point) Le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ est un plan vectoriel que l'on pouvait paramétrer sous la forme $\mathrm{Ker}(f) = \{(2y+3z, y, z);\ y, z \in \mathbb{R}^3$ ce qui permettait d'obtenir la base (parmi beaucoup de choix possibles) $v_1 = (2,1,0)$, $v_2 = (3,0,1)$.

3. Notons $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ une base de $\mathbb{R}^2$, et $\mathcal{F}$ la base définie par $\mathcal{F} = (e_1, e_1 + e_2)$. Si f est une application linéaire dont la matrice dans la base $\mathcal{E}$ est $[f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$, écrire la matrice $[f]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}}$ de f dans la base $\mathcal{F}$.

> *Réponse* :
>
> (2 points) On calcule
>
> $$f(e_1) = e_1 + 3e_2 = -2e_1 + 3(e_1 + e_2)$$
> $$f(e_1 + e_2) = 3e_1 + 7e_2 = -4e_1 + 7(e_1 + e_2)$$
>
> et donc $[f]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.
>
> Remarque : la matrice $[f]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}$, où on prend $\mathcal{F}$ comme base de départ et $\mathcal{E}$ comme base d'arrivée, est égale à $[f]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ mais ce n'était pas la question posée...