
UNIVERSITÉ PARIS VII-
DENIS DIDEROT

Thèse de doctorat

Spécialité : Mathématiques

Présentée par : Bertrand Monthubert

Sujet : Groupoïdes et calcul pseudo-différentiel sur les variétés à coins

Date de soutenance : 16 janvier 1998

Jury :		
	Alain Connes	*Président*
	Paul Gérardin	
	Eric Leichtnam	
	Richard Melrose	*Rapporteur*
	Victor Nistor	*Rapporteur*
	Mihai Pimsner	
	Jean Renault	
	Georges Skandalis	*Directeur de thèse*

Introduction

Dans le but de généraliser le théorème d'Atiyah-Patodi-Singer ([**2**]), Richard Melrose (avec Paolo Piazza) a introduit et étudié dans un livre et dans plusieurs articles [**16, 19, 15, 17, 14**] un calcul pseudo-différentiel sur les variétés à bord, et plus généralement sur les variétés à coins.

En suivant les travaux de Hörmander ([**13**]), qui a montré que le calcul pseudo-différentiel sur une variété sans bord M peut être vu en termes de noyaux de Schwartz sur M^2, Melrose a défini un calcul pseudo-différentiel adapté aux problèmes de bord, le b-calcul, au moyen de noyaux de Schwartz sur un espace jouant le rôle de M^2, le "b-stretched product". Avec Victor Nistor ([**18**]), il a conduit l'étude de la clôture normique de l'algèbre des opérateurs b-pseudo-différentiels et de sa K-théorie.

Parallèlement, il apparaît dans les travaux d'Alain Connes (voir [**9**]) que le calcul pseudo-différentiel est naturellement lié aux groupoïdes de Lie.

Ainsi, dans le cas des variétés sans bord, le groupoïde associé est $M \times M$. De plus, l'introduction d'un groupoïde tangent permet de mieux comprendre le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer ([**3**]). En suivant ses idées, nous avons explicité en collaboration avec François Pierrot (voir [**21**]) cette construction pour tout groupoïde de Lie G (éventuellement à coins) dont les fibres G_y ($y \in G^{(0)}$) sont des variétés lisses (sans bord). Nous qualifierons de *longitudinalement lisse* un tel groupoïde de Lie.

Dans le cas d'une variété à coins X, le groupoïde $X \times X$ n'est bien entendu pas longitudinalement lisse. Il s'agit donc de le désingulariser, et de construire ainsi un groupoïde longitudinalement lisse noté $\Gamma(X)$; le calcul pseudo-différentiel sur $\Gamma(X)$ coïncide alors avec le b-calcul (à support compact) de Melrose. Nous introduisons également une algèbre de fonctions à décroissance rapide sur $\Gamma(X)$, que nous comparons aux opérateurs régularisants du b-calcul.

Dès lors, les questions de structure de l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels se réduisent à des problèmes de groupoïdes. Ainsi nous obtenons de nouvelles preuves pour plusieurs résultats de [**18**].

Les variétés à coins que Melrose et Piazza considèrent ne forment en fait qu'une classe de la catégorie des variétés à coins ; nous les appellerons variétés à coins plongés[1]. Par ailleurs, la présentation en termes de groupoïdes permet d'élargir la construction aux variétés à coins, en introduisant un groupoïde de Lie longitudinalement lisse universel pour les variétés à coins de même codimension maximale. Ainsi nous pouvons définir le calcul pseudo-différentiel sur les variétés à coins, et utiliser la théorie des C^*-algèbres de groupoïdes pour traîter les problèmes de théorie de l'indice sur les variétés à coins.

Le calcul pseudo-différentiel sur les groupoïdes de Lie a également été défini simultanément et indépendamment par V. Nistor, A. Weinstein et P. Xu (voir [**28, 23**]). Ces auteurs ont également défini un groupoïde associé à une variété à bord, et étudié la relation avec le b-calcul.

Dans le chapitre 1 nous donnons les définitions des variétés à coins et des variétés à coins plongés. Ces dernières seront systématiquement considérées comme plongées dans une variété lisse munie d'une famille transverse de sous-variétés de codimension 1, que nous appellerons équarrissage.

Le calcul pseudo-différentiel sur les groupoïdes de Lie est défini au chapitre 2. La définition que nous considérerons dans cette thèse, en termes de noyaux de Schwartz, est équivalente à celle de [**21**]. Nous traîtons également le cas où le groupoïde n'est pas séparé. Puis nous définissons un espace de fonctions à décroissance rapide sur G, permettant d'introduire des opérateurs régularisants supplémentaires.

La définition du groupoïde associé à un équarrissage est donnée dans le chapitre 3. Cette construction repose sur l'éclatement d'une sous-variété de codimension 1 dans un groupoïde qui lui est transverse. Le groupoïde de l'équarrissage est le produit fibré des éclatements par

---

[1] Une variété à coins est une variété modelée sur $\mathbb{R}^n_+$. Nous appellerons variété à coins plongés une variété à coins dont toutes les hyperfaces sont plongées.

rapport à chaque sous-variété composant l'équarrissage. Nous montrons que cette contruction est fonctorielle.

Nous pouvons alors, dans le chapitre 4, définir le groupoïde $\Gamma(X)$ d'une variété à coins plongés X, en tant que restriction du groupoïde d'un équarrissage dans lequel X se plonge. Nous définissons alors le calcul pseudo-différentiel sur X comme le calcul pseudo-différentiel sur le groupoïde de Lie longitudinalement lisse $\Gamma(X)$. Nous étendons ce calcul en introduisant un espace de fonctions à décroissance rapide sur $\Gamma(X)$.

Dès lors nous prouvons que pour une variété à bord X, le b-calcul (à support compact) est le calcul pseudo-différentiel sur $\Gamma(X)$. Cette identification passe par la comparaison entre le b-stretched product de X et $\Gamma(X)$. Une définition du b-stretched product pour une variété à coins plongés est également donnée.

Nous montrons également que les opérateurs régularisants du b-calcul sont des fonctions à décroissance rapide sur $\Gamma(X)$.

Le chapitre 5 reprend plusieurs résultats de Melrose et Nistor ([**18**]), notamment sur la structure de $C^*(\Gamma(X))$, et présente de nouvelles preuves de ces résultats basées sur les propriétés des C^*-algèbres de groupoïdes.

Dans le chapitre 6 nous étendons les constructions précédentes au cas des variétés à coins générales. Dans ce cadre nous définissons un groupoïde $\mathcal{G}(X)$, généralement non-séparé, et sa composante s-connexe $\Gamma(X)$. Ceci nous permet de définir le calcul pseudo-différentiel sur X comme le calcul pseudo-différentiel sur $\mathcal{G}(X)$ ou sur $\Gamma(X)$ indifférement.

Le groupoïde $\mathcal{G}(X)$ est en fait universel (en un certain sens) pour les variétés à coins de même codimension maximale. En effet, si X et X' sont deux variétés à coins de même codimension maximale, alors $\mathcal{G}(X)$ et $\mathcal{G}(X')$ sont équivalents. Or d'après un résultat de P. Muhly, J. Renault et D. Williams ([**22**]), que nous étendons au cas non-séparé, les C^*-algèbres de deux groupoïdes non-séparés sont équivalentes au sens de Morita. Donc leurs groupes de K-théorie sont isomorphes.

Enfin, le chapitre 7 regroupe les calculs de la K-théorie de la C^*-algèbre de $\Gamma(X)$ dans quelques exemples de variétés à coins.

Deux articles ont précédé l'écriture de cette thèse. Nous reproduisons en appendice une note aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, [**21**], écrite avec François Pierrot, sur le calcul pseudo-différentiel sur les groupoïdes de Lie et l'indice analytique défini à l'aide du groupoïde tangent. Par ailleurs, nous avons repris dans le texte un article ([**20**]) sur le calcul pseudo-différentiel sur les variétés à coins plongés. Les définitions et résultats de cet article se trouvent dans les chapitres 2, 3 et 4.

Remerciements

En tout premier lieu je tiens à exprimer ma reconnaissance envers Alain Connes, Paul Gérardin, Eric Leichtnam, Mihai Pimsner et Jean Renault d'avoir accepté de faire partie de mon jury, et à Richard Melrose et Victor Nistor d'avoir bien voulu en être les rapporteurs, avec une rapidité dont je leur sais gré.

C'est avec une patience et une gentillesse immenses que Georges Skandalis a dirigé cette thèse, qui porte profondément sa marque. Ces années de travail sous sa direction ont été particulièrement décisives dans mon parcours ; je reste fasciné par son talent et par sa joie de faire des mathématiques.

Mihai Pimsner a encadré mon travail lors de mon séjour à l'université de Pennsylvanie, et est à l'origine du sujet de cette thèse. Je lui suis extrêmement reconnaissant pour son accueil généreux, pour le temps qu'il a passé à m'apprendre beaucoup de mathématiques.

J'ai eu la chance de pouvoir discuter de mes travaux avec Jonathan Block, Alain Connes, Max Karoubi, Gennadi Kasparov, Vincent Lafforgue, André Legrand, Eric Leichtnam, Jean Pradines, Jean Renault et Richard Zekri ; ces échanges ont toujours été très stimulants.

J'ai pu bénéficier d'excellentes conditions de travail au sein de l'équipe d'algèbres d'opérateurs, grâce notamment à Chanthou Auchet. J'en remercie les membres, particulièrement Michel Enock, Michel Hilsum, Jean-Luc Sauvageot et Jean-Michel Vallin, qui m'ont accueilli chaleureusement. La présence de Patrick Polo m'a toujours été d'une aide très constructive. J'associe à ces remerciements les participants du séminaire d'algèbres d'opérateurs au Collège de France, au tout premier rang desquels Etienne Blanchard et Pierre-Yves Le Gall, qui m'ont appris tout ce que je voulais savoir sur les C^*-algèbres sans jamais oser le demander, et François Pierrot avec qui j'ai eu le plaisir d'écrire la note aux C.R.A.S. reproduite en annexe.

Je remercie Eric Boix de m'avoir souvent fait profiter de son expertise informatique, et Pascal Duval et Stéphane Tran pour leur talent graphique.

Plusieurs personnes ont eu un poids particulier dans mon orientation personnelle, de façon directe ou non. Je souhaite remercier Madeleine Jouanny sans qui je serais peut-être en train de perdre mes derniers cheveux devant l'effondrement de la bourse sud-coréenne. Georges Mény m'a donné les moyens de ne pas prendre une voie où les mathématiques se résument à la règle de trois. Michel Broué m'a prouvé que la rigueur intellectuelle et morale a les mêmes bénéfices que la rigueur mathématique. Didier Dacunha-Castelle m'a montré les vertus de l'intégrité et de la simplicité.

Enfin, je remercie ma famille et mes amis qui m'ont soutenu, remonté le moral et les bretelles pendant ces années de thèse, tout particulièrement Erwane dont, pour le moins, la confiance et la souplesse furent sans faille, et Faustine, qui a pointé le bout du nez pour me dire qu'il était temps de conclure.

◇

Un
p'tit coin
d'parapluie contre
un coin d'paradis, elle
avait quelque chose d'un ange.
Un p'tit coin d'paradis con-
tre un coin d'parapluie,
je n'perdais pas
au change,
pardi.

◇

Georges Brassens,
Le parapluie

> Je ne crois pas que Heinz ferait un bon équarrisseur, il est trop maigre, mais on pourra lui faire affûter le rabot.
>
> Boris Vian, *L'équarrisage pour tous*

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

Variétés à coins

Dans ce chapitre nous donnons plusieurs définitions de la notion de variété à coins.

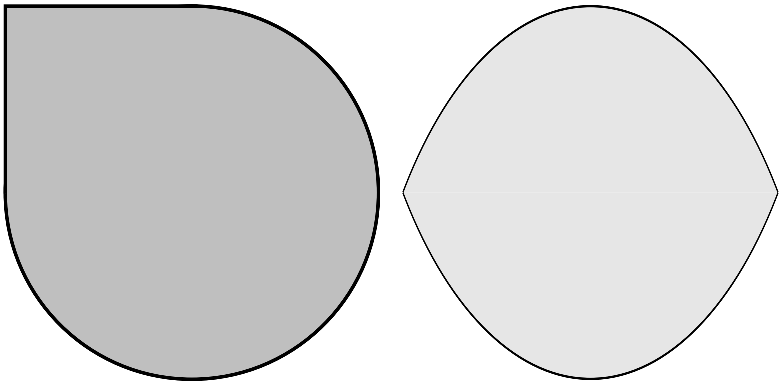
1.1. Définition "large" des variétés à coins

Définition 1.1.
Une variété à coins X est une variété modelée sur $\mathbb{R}_+^n$. Tout point p admet un voisinage difféomorphe à $\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, p correspondant au point de coordonnées nulles par ce difféomorphisme ; k est appelé codimension du point. Les composantes connexes de l'ensemble des points de codimension k sont appelées faces ouvertes de codimension k de la variété, et leurs clôtures sont les faces de X. On note $\mathcal{F}_k(X)$ l'ensemble des faces de codimension k ; on notera également $\mathcal{HF}(X)$ l'ensemble $\mathcal{F}_1(X)$ des hyperfaces de X. L'intérieur d'une face F est noté $\overset{\bullet}{F}$; $\overset{\bullet}{X}$ est le seul élément de $\mathcal{F}_0(X)$. Le bord de X est noté ∂X, c'est la réunion des faces de codimension strictement positive. En chaque point x, la face de dimension minimale parmi celles qui contiennent x est notée $F(x)$.

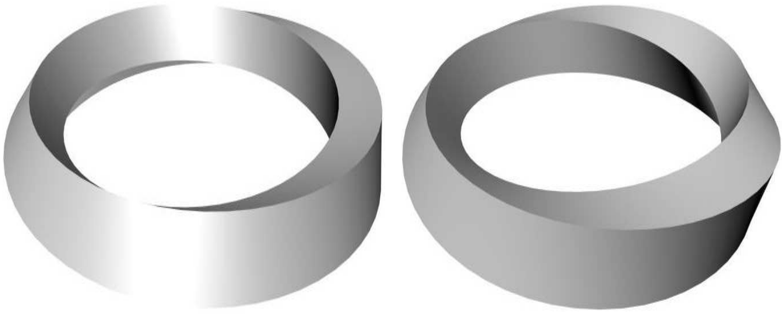
Cette définition est très générale, et permet des situations très variées. Donnons quelques exemples :

EXEMPLES. 0. Une variété sans bord est une variété à coins.

1. Toute variété à bord est une variété à coins. Elle est composée d'une face de codimension 0 (l'intérieur), et de faces de codimension 1 (le bord).
2. Le simplexe $\Sigma_n = \{(t_0, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}_+^{n+1}, t_0 + \ldots + t_n = 1\}$ est une variété à coins.
3. Un produit de variétés à coins est une variété à coins.
4. Les cubes de dimension n sont des variétés à coins.
5. La goutte à 1 ou 2 coins est également une variété à coins.



6. Le tore plein à section carrée (ou polygonale), donné par $[0,1] \times [0,1] \times \mathbb{S}^1$, est une variété à coins.
7. Le quotient d'une variété à coins par une action libre d'un groupe fini est une variété à coins.
8. Les tores pleins à section carrée (ou polygonale), obtenus par recollement du cylindre à base carrée (ou polygonale) en effectuant une rotation d'un quart de tour ou d'un demi-tour (c'est-à-dire $([0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R})/\mathbb{Z}$, où $\mathbb{Z}$ agit par $1 \cdot (a, b, t) = (1 - b, a, t+1)$ (quart de tour), ou par $1 \cdot (a, b, t) = (1-a, 1-b, t+1)$ (demi-tour)), fournissent deux exemples de nature différente de variétés à coins.



9. La bouteille de Klein à section carrée (ou polygonale) : $([0,1]\times[0,1]\times\mathbb{R})/\mathbb{Z}$, où l'action de $\mathbb{Z}$ est la réflexion par rapport à une diagonale sur $[0,1]\times[0,1]$, et la translation par 1 sur $\mathbb{R}$: $1\cdot(a,b,t)=(b,a,t+1)$.
10. La bouteille de Klein dont la section est une goutte à un coin, $(A\times S^1)/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, où A est la goutte à un coin introduite dans l'exemple 5, relativement à la réflexion par rapport à l'unique axe de symétrie de A, est une variété à coins.
11. Soit M une variété munie d'une action libre et propre de $\mathfrak{S}_n$. Alors $(M\times\Sigma_{n-1})/\mathfrak{S}_n$ est une variété à coins.
12. La pyramide à base carrée **n'est pas** une variété à coins : son sommet n'admet pas d'ouvert difféomorphe à un quelconque $\mathbb{R}_+^k\times\mathbb{R}^{n-k}$.

Le fibré tangent à une variété à coins se définit comme dans le cas des variétés sans bord, toutefois il ne s'agit plus d'un fibré vectoriel puisque sur le bord les vecteurs tangents forment un demi-espace vectoriel. Si F est une face de codimension $k\neq 0$, et $p\in\overset{\bullet}{F}$, on notera N_p, ou N_pF le normal au bord en p, c'est-à-dire le quotient de T_pX par l'image de T_pF par la différentielle de l'inclusion de $\overset{\bullet}{F}$ dans X.

Avec cette définition, N_pF n'est pas un espace vectoriel mais un quadrant d'un espace vectoriel. En effet, au voisinage de p, F est l'intersection de k hyperfaces (dites locales) H_i ; dès lors on a $N_pF=\prod_{1\leq i\leq k}N_pH_i$. Or $N_pH_i\simeq\mathbb{R}_+$, donc $N_pF\simeq\mathbb{R}_+^k$.

1.2. Les variétés à coins plongés

Les différents exemples précédents présentent différents degrés de complexité. On peut prendre une définition plus restrictive des variétés à coins, comme le fait Richard Melrose dans [**16**].

Définition 1.2.

Une variété à coins plongés X est un espace topologique séparé muni d'une sous-algèbre $C^\infty(X)$ de $C^0(X)$ vérifiant les conditions suivantes :

- *il existe une variété $\tilde{X}$ et une application $\iota : X \to \tilde{X}$ pour laquelle $C^\infty(X) = \iota^* C^\infty(\tilde{X})$,*
- *il existe une famille finie de fonctions $\rho_i \in C^\infty(\tilde{X})$, telles que $\iota(X) = \left\{ y \in \tilde{X}, \forall i \in I, \rho_i(y) \geq 0 \right\}$,*
- *pour tout $J \subset I$, et en tout point de $\tilde{X}$ où les $(\rho_j)_{j \in J}$ s'annullent simultanément, les différentielles $\mathrm{d}\rho_j$ sont indépendantes.*

Les fonctions ρ_i sont appelées fonctions de définition des hyperfaces.

Il est clair qu'une variété à coins plongés est une variété à coins : en un point x, le nombre de fonctions ρ_j qui s'annullent détermine la codimension de x, puisque les ρ_j, qui sont indépendants, peuvent servir de coordonnées locales et fournissent ainsi un difféomorphisme d'un voisinage de x sur un $\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k}$.

La réciproque n'est bien entendu pas vraie : ainsi les exemples 9 et 11 ne sont pas des variétés à coins plongés, la goutte à un coin (5) non plus, et dans l'exemple 8, le tore obtenu par rotation de $\pi/4$ n'est pas une variété à coins plongés. Ceci est dû à l'existence de faces qui se coupent elles-mêmes, empêchant ainsi l'existence de fonctions globales de définition des hyperfaces.

Toutefois, localement toute variété à coins est une variété à coins plongés. Plus précisément, si X est une variété à coins et $x \in X$ est de codimension k, il admet une carte $\psi : V \to \mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, donc V est une variété à coins plongés. De plus, $\psi^{-1}(x_1, \ldots, 0, \ldots, x_k, x_{k+1}, x_n)$ définit une hyperface de V. Nous appellerons *hyperface locale* une telle partie de X. Tout point de codimension k admet donc k hyperfaces locales. Plusieurs hyperfaces locales peuvent appartenir à une même hyperface (globale), comme le montre l'exemple 5.

Il peut être utile de montrer comment obtenir une extension à partir d'une variété à coins plongés. En effet, une variété à coins plongés peut-être définie sans recours à son extension, en supposant qu'on a une variété à coins munie d'un ensemble de fonctions de définition des hyperfaces. A partir de cette donnée, on peut définir une extension $\tilde{X}$ en remarquant que l'intérieur de X est une variété lisse qui contient une variété à coins plongés difféomorphe à X. En effet, X étant compact, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $J \subset I$ et pour tout point de X vérifiant $\rho_j(x) \leq \varepsilon$ pour tout $j \in J$, les $\mathrm{d}\rho_j$ sont indépendantes. Dès lors l'espace

$$\{x \in X, \forall i \in I, \rho_i(x) \geq \varepsilon\}$$

est une variété à coins plongés difféomorphe à X, dont $\overset{\bullet}{X}$ est une extension.

Remarquons enfin que la donnée d'une fonction de définition ρ d'une hyperface F induit une trivialisation du fibré normal à $\overset{\bullet}{F}$. En effet, la restriction à $\overset{\bullet}{F}$ de sa différentielle, $\mathrm{d}\rho\ : T_{\overset{\bullet}{F}}X \to \overset{\bullet}{F} \times \mathbb{R}_+$ étant nulle sur TF, mais pas sur $T_{\overset{\bullet}{F}}X$, elle induit un isomorphisme de $N\overset{\bullet}{F}$ sur $\overset{\bullet}{F} \times \mathbb{R}_+$.

1.3. Equarrissages

La définition d'une variété à coins plongés que nous utiliserons par la suite est quelque peu différente (mais naturellement équivalente). Auparavant nous devons effectuer quelques rappels sur la transversalité et les produits fibrés.

1.3.1. Rappels sur la transversalité

Définition 1.3.
Soit $X_1, \ldots, X_n, Y$ une famille de variétés de classe C^∞. Donnons-nous pour tout i une application de classe C^∞, $\varphi_i\ : X_i \to Y$, et soit $(x_i)_{1\leq i\leq n} \in \prod_{1\leq i\leq n} X_i$ une famille telle que $\varphi_1(x_1) = \ldots = \varphi_n(x_n)$.

On dit que $(\varphi_i)_{1\leq i\leq n}$ est transverse en $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ si les orthogonaux (dans T^*_yY) des espaces $\mathrm{d}\varphi_i(T_{x_i}X_i)$ sont en somme directe.

On dit que les morphismes φ_i sont transverses s'ils le sont pour tout $(x_i)_{1\leq i\leq n} \in \prod_{1\leq i\leq n} X_i$ tel que $\exists y \in Y, \forall i, \varphi_i(x_i) = y$.

Sous cette condition, le produit fibré des X_i au-dessus de Y est une sous-variété lisse de $\prod_{1\leq i\leq n} X_i$.

Par ailleurs, une famille de sous-variétés sera dite transverse si les inclusions de ces sous-variétés sont transverses ; une application de classe C^∞ est dite transverse à une sous-variété si elle est transverse à l'inclusion de cette sous-variété.

Le lemme élémentaire suivant nous sera utile dans la suite :

Lemme 1.4.
Soient $\varphi_i : X_i \to Y$ *et* $\psi_i : Z_i \to X_i$ *des morphismes lisses, indexés par un ensemble fini* I. *Soit* $y \in Y$, *et une famille d'éléments* $z_i \in Z_i$ *tels que* $\forall i \in I, \varphi_i \circ \psi_i(z_i) = y$. *Alors :*

1)si les $\varphi_i \circ \psi_i$ *sont transverses en* $(z_i)_{i\in I}$, *alors les* φ_i *sont transverses en* $(\psi_i(z_i))_{i\in I}$ *;*

2)la réciproque est vraie si les différentielles $(\mathrm{d}\psi_i)_{z_i} : T_{z_i}Z_i \to T_{\psi(z_i)}X_i$ *sont surjectives.*

1.3.2. Extension d'une variété à coins plongés

Soit X une variété à coins plongés. D'après la définition 1.2, X admet une extension en une variété lisse $\tilde{X}$. La donnée des fonctions ρ_i revient à se donner une famille de sous-variétés de codimension un qui séparent $\tilde{X}$ en une partie positive et une partie négative ; notons $V_i = \rho_i^{-1}(0)$ ces sous-variétés. Par ailleurs la dernière condition de la définition 1.2 signifie que pour tout $J \subset I$, et en tout point d'intersection des faces $V_j, j \in J$, les fibrés normaux de chaque fibré tangent T_xV_j sont en somme directe.

Donc la famille de sous-variétés $(V_i)_{i\in I}$ est transverse. Cela conduit à la définition suivante :

Définition 1.5.
On appelle équarrissage la donnée d'une variété M *et d'une famille finie* $(V_i)_{i\in I}$ *de sous-variétés de codimension 1 telles que* $\forall J \subset I$, *la famille d'inclusions des* $V_j, j \in J$ *soit transverse.*

Dorénavant on notera $V_J = \cap_{i\in J}V_i$, pour $J \subset I$. Si chaque sous-variété V_i est transversalement orientée, on dit que l'équarrissage est orienté. Si de plus chaque V_i sépare M en deux parties M_i^+ et M_i^-, on appelle partie positive de M l'intersection des M_i^+.

Il est alors évident que la définition 1.2 est équivalente à la suivante :

Définition 1.6.
Une variété à coins plongés X *est la partie positive d'un équarrissage orienté* $(M, (V_i)_{i\in I})$ *où chaque sous-variété* V_i *sépare* M *en deux. Les faces sont les restrictions des intersections des sous-variétés. On dit que* X *est la partie positive de cet équarrissage orienté, et que* $(M, (V_i)_{i\in I})$ *est une extension de* X.

1.3.3. Morphismes d'équarrissages

Soit $(M', (V'_i)_{i\in I})$ un équarrissage, M une variété lisse, et $f\ : M \to M'$ une application de classe C^∞. On dit que f est transverse à l'équarrissage si f est transverse à tous les V_J.

Proposition 1.7.
Avec les notations précédentes, $(M, (f^{-1}(V'_i))_{i\in I})$ *est un équarrissage.*

DÉMONSTRATION. Notons $V_i = f^{-1}(V'_i)$. Ce sont bien des sous-variétés de M car f est transverse aux sous-variétés V'_i. Ainsi $V_J = f^{-1}(V'_J)$. La différentielle de f induit un morphisme $\overline{\mathrm{d}f}\ : N_xV_J \to N_{f(x)}V'_J$ car $\mathrm{d}f(T_xV_J) \subset T_{f(x)}V'_J$. Si $J = \{i\}$, la transversalité de f par rapport à V'_i implique que ce morphisme est non-nul ; les espaces étant unidimensionnels, il s'agit donc d'un isomorphisme. Or pour J quelconque, on a $N_{f(x)}V'_J = \oplus_{i\in J} N_{f(x)}V'_i$ (car $(M', (V'_i)_{i\in I})$ est un équarrissage), et $N_xV_J = \sum_{i\in J} N_xV_i$. Comme $\overline{\mathrm{d}f}(N_xV_i) = N_{f(x)}V'_i$, le fait que les $N_{f(x)}V'_i$ sont en somme directe implique que les N_xV_i le sont aussi. Donc $(M, (f^{-1}(V'_i))_{i\in I})$ est un équarrissage.

□

Définition 1.8.
Soient $(M, (V_i)_{i\in I})$ *et* $(M', (V'_i)_{i\in I'})$ *deux équarrissages, et* $f\ : M \to M'$ *une application de classe* C^∞. *On dit que* f *est un morphisme d'équarrissages si* f *est transverse à* $(M', (V'_i)_{i\in I'})$, *et si* $\forall i' \in I', \exists i \in I, f^{-1}(V'_i) = V_i$.

1.4. Applications entre variétés à coins

Si l'on souhaite former une catégorie dont les objets sont les variétés à coins, il peut être utile de ne considérer qu'une partie des applications de classe C^∞, afin d'obtenir ultérieurement des propriétés de fonctorialité.

A partir de la notion de morphisme d'équarrissages, celle de morphisme de variétés à coins plongés est naturelle :

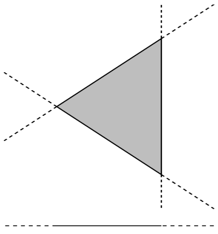
Définition 1.9.
Soient X *et* X' *deux variétés à coins plongés. Une application continue* $f\ : X \to X'$ *est un morphisme de variétés à coins plongés s'il existe*

des extensions $(M, \mathcal{E})$ *et* $(M', \mathcal{E}')$ *de* X *et* X'*, et un morphisme d'équarrissages* $\widetilde{f} : (M, \mathcal{E}) \to (M', \mathcal{E}')$ *tel que* $\widetilde{f}_{|X} = f$.

Exemples.

- La projection du carré sur un de ses bords, $f : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, est un morphisme de variétés à coins plongés.
- L'inclusion $f : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ donnée par $f(x) = (x, 1/2)$ est un morphisme de variétés à coins plongés.
- Soient $X = \{(x,y) \in [0,1] \times [-1,1], -x \leq y \leq x\}$, et $X' = [0,1]$.

  La projection de X sur la première composante n'est pas un morphisme de variétés à coins plongés. En effet, si on prend des extensions M et M' de X et X', et $\widetilde{f}$ tel que $\widetilde{f}_{|X} = f$ alors $\widetilde{f}^{-1}(0)$ n'est pas inclus dans une des sous-variétés de M qui étendent les faces de X.

  
- L'inclusion diagonale de $X = [0,1]$ dans $X' = [0,1] \times [0,1]$ n'est pas un morphisme de variétés à coins plongés. En effet, l'espace tangent du coin $F = (0,0)$ est nul, alors que $\mathrm{d}f_0(T_0X)$ est de dimension 1, donc $T_{(0,0)}X' \neq T_{(0,0)}F + \mathrm{d}f_0(T_0X)$, ce qui implique que f n'est pas transverse au coin $(0,0)$.
- L'inclusion de $X = [0,1]$ dans $X' = [0,1] \times [0,1]$ par $t \mapsto (t, 0)$ n'est pas un morphisme de variétés à coins plongés. En effet, si $t = 1/2$ par exemple, $\mathrm{d}f(T_tX) = T_{f(t)}F'$, donc f n'est pas transverse à la face $[0,1] \times \{0\}$.

Définition 1.10.

Soient X *et* X' *deux variétés à coins. Une application continue* $f : X \to X'$ *est un morphisme de variétés à coins si en tout point* $x \in X$*, il existe un voisinage* V *de* x *dans* X *et un voisinage* V' *de* $f(x)$ *dans* X'*, tels que*

- $f(V) \subset V'$,
- V *et* V' *sont des variétés à coins plongés,*
- $f_{|V}$ *est un morphisme de variétés à coins plongés.*

Remarquons dès à présent les propositions suivantes :

Proposition 1.11.

Soit $f : X \to X'$ *un morphisme de variétés à coins. Alors l'image de toute face ouverte de* X *est incluse dans une face ouverte de* X'.

DÉMONSTRATION. Soit F une face de X et $x \in \overset{\bullet}{F}$. Soit $\overset{\bullet}{F'}$ la face ouverte de $f(x)$. Considérons des voisinages V et V', et une extension $\widetilde{f}$ de f comme dans la définition précédente. Comme $\widetilde{f}$ est un morphisme d'équarrissages, l'image de toute face ouverte de V est incluse dans une face ouverte de V'. Donc $f(V \cap \overset{\bullet}{F}) \subset \overset{\bullet}{F'}$.

Cela implique que pour toute face F' de X', $\overset{\bullet}{F} \cap f^{-1}(F')$ est ouvert. Cela produit une partition ouverte (indexée par les faces de X') de $\overset{\bullet}{F}$ qui est connexe, donc cette partition a un unique élément, c'est-à-dire que $f(\overset{\bullet}{F})$ est inclus dans une face ouverte. □

Proposition 1.12.
Soit $f : X \to X'$ un morphisme de variétés à coins, et $x \in X$. Soit F la face de x, et F' celle de $f(x)$. Alors la différentielle de f induit une application surjective

$$\overline{\mathrm{d}f} : N_x F \to N_{f(x)} F'.$$

DÉMONSTRATION. Comme $\mathrm{d}f(T_x F) \subset T_{f(x)} F'$, la différentielle passe au quotient, donc $\overline{\mathrm{d}f}$ est bien défini. Par ailleurs, f est transverse à F', donc $\mathrm{d}f(T_x X) + T_{f(x)} F' = T_{f(x)} X'$, d'où $N_{f(x)} F' \subset \overline{\mathrm{d}f}(N_x F)$. □

CHAPITRE 2

Calcul pseudo-différentiel sur les groupoïdes de Lie

2.1. Noyaux de Schwartz associés aux opérateurs pseudo-différentiels sur un groupoïde différentiable

Soit G un groupoïde différentiable longitudinalement lisse, c'est-à-dire un groupoïde muni d'une structure de variété différentiable (éventuellement à coins) sur G, $G^{(0)}$ étant une sous-variété (à coins) de G. On suppose en outre que les fibres $G^x = r^{-1}(x), x \in G^{(0)}$ sont lisses, que les applications source et but, r et s sont des submersions, et que la composition $G^{(2)} \to G$ est lisse.

Nous utiliserons indifféremment les termes groupoïde différentiable et groupoïde de Lie. On suppose dans un premier temps que G est séparé.

Dans [**21**] nous avons considéré l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels sur G comme celle des familles G-équivariantes d'opérateurs sur les fibres G_u.

Nous allons formuler une définition équivalente, en termes de noyaux de Schwartz, analogue à la définition de Hörmander ([**13**]) dans le cas des opérateurs pseudo-différentiels sur une variété lisse.

On définit l'algébroïde de Lie associée à un groupoïde de Lie longitudinalement lisse, G, notée $\mathcal{A}(G)$, comme le fibré normal de $G^{(0)}$ dans G, $N_\gamma G^{(0)} = T_\gamma G/T_\gamma G^{(0)}(\gamma \in G^{(0)})$. Elle est canoniquement isomorphe à la restriction à l'ensemble des unités de G du noyau du morphisme $\mathrm{d}s$ (ou $\mathrm{d}r$) : $TG \to TG^{(0)}$; en utilisant cet isomorphisme les sections de $\mathcal{A}(G)$ s'identifient aux champs de vecteurs v sur G tels que $\mathrm{d}s(v(\gamma)) = 0, \forall \gamma \in G$, qui sont invariants à droite.

Le fibré des demi-densités $\Omega^{\frac{1}{2}}$ est le fibré en droites sur G dont la fibre en $\gamma \in G$ est l'espace vectoriel des applications

$$\rho \ : \Lambda^k T_\gamma G^{r(\gamma)} \otimes \Lambda^k T_\gamma G_{s(\gamma)} \to \mathbb{C}$$

telles que $\rho(\lambda\nu) = |\lambda|^{1/2}\rho(\nu), \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Ici k est la dimension des fibres $G^{r(\gamma)}$ et $G_{s(\gamma)}$.

Soit φ un difféomorphisme d'un voisinage (tubulaire) O de $G^{(0)}$ dans G, à valeurs dans $\mathcal{A}(G)$, tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
O \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "r"'] & \mathcal{A}(G) \arrow[d] \\
G^{(0)} \arrow[r] & G^{(0)}.
\end{tikzcd}$$

On suppose de plus que $\varphi(\gamma) = 0 \iff \gamma \in G^{(0)}$, et que sa différentielle est l'isomorphisme $T_xG^x \simeq N_xG^{(0)}$.

Définition 2.1.
L'espace des noyaux pseudo-différentiels sur un groupoïde différentiable longitudinalement lisse G est l'espace $I^m(G, G^{(0)}; \Omega^{\frac{1}{2}})$ des sections distributionnelles K sur G à valeurs dans $\Omega^{\frac{1}{2}}$ qui sont de classe C^∞ en dehors de $G^{(0)}$, et données par une intégrale oscillante dans un voisinage de $G^{(0)}$ inclus dans O,

$$K(\gamma) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathcal{A}_{r(\gamma)}(G)^*} e^{i\langle\varphi(\gamma),\xi\rangle} a(\gamma, \xi) \mathrm{d}\xi,$$

où a est un symbole polyhomogène d'ordre m à valeurs dans $\Omega^{\frac{1}{2}}$.

On note $I^\infty(G, G^{(0)}; \Omega^{\frac{1}{2}})$ l'espace des noyaux pseudo-différentiels d'ordre quelconque ($I^\infty(G, G^{(0)}; \Omega^{\frac{1}{2}}) = \cup_{m\in\mathbb{Z}} I^m(G, G^{(0)}; \Omega^{\frac{1}{2}})$).

Bien entendu, on peut aussi prendre des symboles plus généraux, comme des symboles de type (ρ, δ).

Remarquons que les sections de classe C^∞ de $\mathcal{A}(G)$ sont dans $I^1(G, G^{(0)}; \Omega^{\frac{1}{2}})$. On a ainsi une action à droite et à gauche de $C^\infty(\mathcal{A}(G))$ sur $C_c^\infty(G, \Omega^{\frac{1}{2}})$.

Il existe un accouplement (de convolution) $I^\infty \times C_c^\infty \to C^\infty$. L'espace $I^\infty(G, G^{(0)}; \Omega^{\frac{1}{2}})$ n'est pas une algèbre, mais $I_c^\infty(G, G^{(0)}; \Omega^{\frac{1}{2}})$, l'espace des noyaux pseudo-différentiels à support compact, est une algèbre involutive. De plus, la convolution d'un élément de I_c^∞ par un élément de I^∞ est dans I^∞.

Notons que les opérateurs différentiels sont donnés par des noyaux de Schwartz de $I^\infty(G, G^{(0)}; \Omega^{\frac{1}{2}})$, puisqu'ils sont obtenus par produit de sections de classe C^∞ de $\mathcal{A}(G)$.

La définition ci-dessus est équivalente à celle de [**21**], définition 2.2, où l'on considérait les opérateurs pseudo-différentiels sur G comme des familles G-équivariantes d'opérateurs sur les fibres G_u.

Nous utiliserons toutefois une notation différente pour les espaces d'opérateurs pseudo-différentiels : l'espace des opérateurs pseudo-différentiels sur un groupoïde G sera noté $\Psi^*(G)$ et non $OPD(G)$, et la clôture normique de l'algèbre involutive des opérateurs d'ordre au plus 0 dans l'algèbre des multiplicateurs de la C^*-algèbre de G sera notée $\overline{\Psi_0}(G)$ et non $\Psi_0^*(G)$.

Montrons donc que les deux définitions coïncident.

Soit $T \in \Psi^*(G)$, et $f \in C_c^\infty(G)$. Il existe un opérateur régularisant k tel que $T - k$ a son support inclus dans O. On peut donc supposer que le support de T est inclus dans O. Par définition, si $\gamma \in G$, alors $T(f)(\gamma) = T_{s(\gamma)}(f_{|G_{s(\gamma)}})(\gamma)$, où $T_{s(\gamma)}$ est un opérateur pseudo-différentiel sur la variété lisse $G_{s(\gamma)}$. Il est donc donné par un noyau de Schwartz $K_{s(\gamma)}$ dans $I^m(G^2_{s(\gamma)}, \Delta_{s(\gamma)}, \Omega^{\frac{1}{2}}_{s(\gamma)})$.

En tenant compte du fait que φ induit pour chaque $u \in G^{(0)}$ un difféomorphisme φ_u donné par $\varphi_u(\gamma, \gamma') = \varphi(\gamma'\gamma^{-1})$ entre, d'une part, le voisinage tubulaire de Δ_u dans G_u^2 défini par $\{(\gamma, \gamma') \in G_u^2, \varphi(\gamma'\gamma^{-1}) \in O\}$, et d'autre part $\mathcal{A}_{s(\gamma)}(G)^*$, on a :

$$K_{s(\gamma)} = (2\pi)^{-n} \int_{\mathcal{A}_{s(\gamma)}(G)^*} e^{i\langle\varphi(\gamma'\gamma^{-1},\xi\rangle} a_{s(\gamma)}(\gamma, \gamma', \xi) \mathrm{d}\xi,$$

où $a_{s(\gamma)}$ est un symbole. D'où

$$T(f)(\gamma) = \int_{G_{s(\gamma)}} \int_{\mathcal{A}_{s(\gamma)}(G)^*} e^{i\langle\varphi(\gamma'\gamma^{-1}),\xi\rangle} a_{s(\gamma)}(\gamma, \gamma', \xi) f(\gamma') \mathrm{d}\xi.$$

De plus, γ induit un isomorphisme de classe C^∞ de $G_{r(\gamma)}$ sur $G_{s(\gamma)}$ par $\gamma' \mapsto \gamma'\gamma$; on a aussi un isomorphisme ι_γ de $\mathcal{A}_{r(\gamma)}(G)^*$ sur $\mathcal{A}_{s(\gamma)}(G)^*$.

Définissons alors $a(\gamma, \xi) = a_{s(\gamma)}(e_{s(\gamma)}, \gamma, \iota_\gamma(\xi))$: c'est un symbole car $a_{s(\gamma)}$ est donné par une famille d'opérateurs pseudo-différentiels, et le noyau de Schwartz qui lui est associé est un élément de $I^m(G, G^{(0)}; \Omega^{\frac{1}{2}})$.

Réciproquement, soit a le symbole d'un élément de $I^m(G, G^{(0)}; \Omega^{\frac{1}{2}})$. Posons $a_{s(\gamma)}(\gamma, \gamma', \xi) = a(\gamma'\gamma^{-1}, \iota_\gamma^{-1}(\xi))$. On obtient ainsi une famille d'opérateurs pseudo-différentiels, il reste à montrer qu'elle est équivariante.

La relation d'équivariance impose que pour tout $\gamma_0 \in G$, et tout $\gamma \in G_{r(\gamma_0)}$, on a

$$(U_{\gamma_0}Tf)(\gamma) = (T(U_{\gamma_0}f))(\gamma).$$

Or

(1)
$$(U_{\gamma_0}Tf)(\gamma) = \int_{G_{s(\gamma_0)}} \int_{\mathcal{A}_{s(\gamma_0)}(G)^*} e^{i\langle \varphi(\gamma'(\gamma\gamma_0)^{-1}),\xi\rangle} a_{s(\gamma_0)}(\gamma\gamma_0,\gamma',\xi) f(\gamma')\mathrm{d}\xi,$$

et

$$T(U_{\gamma_0}f)(\gamma) = \int_{G_{r(\gamma_0)}} \int_{\mathcal{A}_{r(\gamma_0)}(G)^*} e^{i\langle \varphi(\gamma'\gamma^{-1}),\xi\rangle} a_{r(\gamma_0)}(\gamma,\gamma',\xi) f(\gamma')\mathrm{d}\xi.$$

Donc en effectuant le changement de variable $\gamma'' = \gamma'\gamma_0$, on obtient

(2)
$$T(U_{\gamma_0}f)(\gamma) = \int_{G_{s(\gamma_0)}} \int_{\mathcal{A}_{s(\gamma_0)}(G)^*} e^{i\langle \varphi(\gamma''\gamma_0^{-1}\gamma_0\gamma^{-1}),\xi\rangle} a_{r(\gamma_0)}(\gamma,\gamma''\gamma_0^{-1},\xi) f(\gamma')\mathrm{d}\xi.$$

Or par définition de a_u on a

$$a_{r(\gamma_0)}(\gamma,\gamma'\gamma_0^{-1},\xi) = a_{s(\gamma_0)}(\gamma\gamma_0,\gamma',\xi) = a(\gamma'\gamma^{-1}\gamma)$$

ce qui implique l'égalité de 1 et 2, c'est-à-dire la relation d'équivariance.

2.2. Généralisation au cas non-séparé

Supposons maintenant que G est un groupoïde de Lie longitudinalement lisse, non-séparé.

2.2.1. La C^*-algèbre d'un groupoïde non séparé

Dans [**8**], Alain Connes a défini la C^*-algèbre du groupoïde d'holonomie d'un feuilletage, même dans le cas où celui-ci est non séparé. Cette construction se généralise immédiatement à n'importe quel groupoïde de Lie G non-séparé, à condition que l'espace des unités $G^{(0)}$ et chaque fibre G_x soient séparés.

Rappelons succinctement cette construction.

Comme G n'est pas séparé, on ne peut constituer directement $C_c^\infty(G, \Omega^{\frac{1}{2}})$. Toutefois on peut considérer les fonctions C_c^∞ dont le support est inclus dans une carte. Par ailleurs, G_x étant séparé, $L^2(G_x)$ est parfaitement défini.

Soit donc U une carte de G, et $f \in C_c^\infty(U, \Omega^{\frac{1}{2}})$; on étend trivialement f sur G. On définit une structure d'algèbre sur le sous-espace vectoriel $\mathcal{D}$ de l'espace des sections du fibré des demi-densités engendré par les $C_c^\infty(U, \Omega^{\frac{1}{2}})$ par le biais du produit de convolution : si U_1, U_2 et U sont des cartes de G telles que $U_1 * U_2 \hookrightarrow U$ (on note $U_1 * U_2$ l'ensemble des paires composables de $U_1 \times U_2$), on a $f * g \in C_c^\infty(U, \Omega^{\frac{1}{2}})$ où

$$f * g(\gamma) = \int_{G^{r(\gamma)}} f(\gamma_1) g(\gamma_1^{-1}\gamma)$$

qui est bien défini car les fibres sont séparées. On notera $C_c^\infty(G, \Omega^{\frac{1}{2}})$ cette algèbre.

Alors pour tout $y \in s(U)$, il existe une représentation $\pi_{U,y}$ de ce dernier espace sur $L^2(G_y)$ donnée, pour $\xi \in L^2(G_y)$ et $\gamma \in G_y$ par

$$\pi_{U,y}(f)(\xi)(\gamma) = \int_{\gamma' \in G^{r(\gamma)}} f(\gamma')\xi(\gamma'^{-1}\gamma).$$

L'espace des unités $G^{(0)}$ étant séparé, on peut alors former la sous-algèbre involutive $\mathfrak{A}$ engendrée par

$$\bigcup_{U} \bigoplus_{y \in s(U)} \pi_{U,y}(C_c^\infty(U, \Omega^{\frac{1}{2}})) \subset \bigoplus_{y \in G^{(0)}} \mathcal{L}(L^2(G_y)),$$

où U parcourt un atlas maximal.

Définition 2.2.
La C^*-algèbre réduite de G, notée $C^*_{red}(G)$, est la clôture normique de $\mathfrak{A}$ dans $\bigoplus_{y \in G^{(0)}} \mathcal{L}(L^2(G_y))$.

2.2.2. Calcul pseudo-différentiel sur un groupoïde différentiable longitudinalement lisse non-séparé

La définition des noyaux pseudo-différentiels sur G requiert que G soit séparé. Toutefois, si G ne l'est pas (l'espace des unités $G^{(0)}$ et les fibres G^x restant séparés), nous pouvons considérer les noyaux pseudo-différentiels à support compact inclus dans une carte U de G. Un tel noyau définit un opérateur pseudo-différentiel sur G. Notons $I_c^\infty(U)$ l'ensemble de ces opérateurs.

Soit I_c^∞ le sous-espace vectoriel de l'espace des sections du fibré des demi-densités engendré par les $I_c^\infty(U)$. Si U, U', U'' sont des ouverts tels que $U * U' \subset U''$, alors le produit de convolution d'un élément de $C_c^\infty(U, \Omega^{\frac{1}{2}})$ (resp. $I_c^\infty(U)$) par un élément de $I_c^\infty(U')$ (resp. $C_c^\infty(U', \Omega^{\frac{1}{2}})$) est dans $C_c^\infty(U'', \Omega^{\frac{1}{2}})$. Donc $I_c^\infty.\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$, et $\mathcal{D}.I_c^\infty \subset \mathcal{D}$. Par conséquent I_c^∞ est une sous-algèbre de l'algèbre des multiplicateurs de $\mathcal{D}$.

Définition 2.3.
L'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels à support compact sur G est l'algèbre engendrée par les espaces $I_c^\infty(U)$ où U parcourt un atlas maximal de G.

On note naturellement $\Psi^*(G)$ cette algèbre, et $\overline{\Psi_0}(G)$ la clôture normique de $\Psi^0(G)$ dans l'algèbre des multiplicateurs de $C^*(G)$.

2.3. Fonctions à décroissance rapide

Dans toute cette section nous supposerons les groupoïdes séparés.

On a vu que les noyaux de Schwartz des opérateurs sont lisses en dehors de la diagonale. En dehors d'un voisinage de la diagonale, on se ramène donc à des fonctions de classe C^∞.

Afin d'obtenir une algèbre, on considère *a priori* des fonctions à support compact. Toutefois, la donnée d'une fonction longueur à croissance polynomiale permet de définir une notion de fonctions à décroissance rapide sur G :

Définition 2.4.
Soit G un groupoïde de Lie, et μ un système de Haar sur G. Une fonction longueur à croissance polynomiale est une fonction de classe C^∞ $\varphi : G \to \mathbb{R}_+$ telle que :

- •*φ est sous-additive, i.e.* $\varphi(\gamma_1\gamma_2) \leq \varphi(\gamma_1) + \varphi(\gamma_2)$,
- •$\forall \gamma \in G, \varphi(\gamma^{-1}) = \varphi(\gamma)$,
- •*φ est propre,*
- •$\exists c, N, \forall x \in G^{(0)}, \forall r \in \mathbb{R}_+, \mu_x(\varphi^{-1}([0,r]) \leq c(r^N + 1)$.

Si on a une telle fonction φ, on peut définir l'espace

$$\mathcal{S}^0 = \{f \in C_0(G, \Omega^{\frac{1}{2}}), \forall P \in \mathbb{C}[X], \sup_{\gamma \in G} |P(\varphi(\gamma))f(\gamma)| < \infty\}.$$

Soit $(v_1, \ldots, v_l) \in C^\infty(\mathcal{A}(G))^l$, et $f \in \mathcal{S}^0$. Alors si $a \in C_c^\infty(G)$, $v_{k+1} \ldots v_l \cdot a \in C_c^\infty(G)$. Donc $(f \cdot v_{k+1} \ldots v_l) \cdot a \in \mathcal{S}^0$, et c'est une distribution tempérée. Dès lors $v_1 \ldots v_k \cdot f \cdot v_{k+1} \ldots v_l$ est une distribution sur G, et cela a un sens de dire que $(v_1 \ldots v_k \cdot f \cdot v_{k+1} \ldots v_l) \in \mathcal{S}^0$: cela signifie qu'il existe $g \in \mathcal{S}^0, g \cdot a = (v_1 \ldots v_k \cdot f \cdot v_{k+1} \ldots v_l) \cdot a$.

L'espace de Schwartz sur G est constitué des fonctions dont toutes les dérivées (au sens que nous venons de voir) obtenues par l'action des sections de l'algébroïde de Lie, sont dans $\mathcal{S}^0$:

Définition 2.5.
L'espace $\mathcal{S}(G)$ des fonctions à décroissance rapide sur G, ou espace de Schwartz sur G, est le sous-espace de $\mathcal{S}^0$ constitué des fonctions f telles que

$$\forall l \in \mathbb{N}, \forall (v_1, \ldots, v_l) \in C^\infty(\mathcal{A}(G))^l, \forall k \leq l, (v_1 \ldots v_k \cdot f \cdot v_{k+1} \ldots v_l) \in \mathcal{S}^0.$$

Notons qu'on peut fixer une famille $(v_1, \ldots, v_N)$ telle qu'en tout $\gamma \in G$ elle engendre $T_\gamma G$. Dès lors, toute famille d'éléments de $\mathcal{A}(G)$ se décompose sur la famille génératrice et il suffit de prouver la propriété sur des polynômes appliqués à $(v_1, \ldots, v_N)$.

Cet espace dépend de φ. Néanmoins pour alléger les notations nous noterons $\mathcal{S}(G)$ pour $\mathcal{S}(G, \varphi)$.

Cet espace est en réalité une algèbre :

Proposition 2.6.
L'espace de Schwartz sur G est une sous-algèbre de $C^*(G)$.

Démonstration. Montrons tout d'abord que $\mathcal{S}^0$, puis $\mathcal{S}(G)$ sont stables par convolution. Soit $f, g \in \mathcal{S}^0$. Alors

$$f * g(\gamma) = \int_{G^{r(\gamma)}} f(\gamma')g(\gamma'^{-1}\gamma).$$

En utilisant l'inégalité $\varphi(\gamma) \leq \varphi(\gamma') + \varphi(\gamma'^{-1}\gamma)$, on peut majorer $|\varphi(\gamma)^k f * g(\gamma)|$ par une combinaison linéaire d'intégrales de la forme

$$\int |\varphi(\gamma\gamma'^{-1})^i f(\gamma\gamma'^{-1})\varphi(\gamma')g(\gamma')^{k-i}|.$$

Mais $|\varphi(\gamma\gamma'^{-1})^i f(\gamma\gamma'^{-1})|$ est borné indépendamment de γ, et

$$|\varphi(\gamma')^{k-i} g(\gamma')| \leq \frac{C}{1+\varphi(\gamma')^l},$$

l étant choisi aussi grand que l'on veut. Cette dernière expression est intégrable pour l suffisamment grand car φ est à croissance polynomiale.

L'intégrale est donc bornée, pour l suffisamment grand, indépendamment de γ, et $f * g \in \mathcal{S}^0$.

Si $f, g \in \mathcal{S}(G)$, et $(v_1, \dots, v_k) \in C^\infty(\mathcal{A}(G))^k$, alors $v_1 \dots v_i(f * g)v_{i+1} \dots v_k = (v_1 \dots v_i f) * (g v_{i+1} \dots v_k)$. C'est donc un produit de convolution d'éléments de $\mathcal{S}^0$, donc $f * g \in \mathcal{S}(G)$.

Par ailleurs, $\mathcal{S}^0 \subset L^1(G)$ (voir [**26**]) car $1/(1+\varphi(\gamma)^l)$ est intégrable pour l suffisamment grand. Or $L^1(G) \subset C^*(G)$, donc $\mathcal{S}^0 \subset C^*(G)$.

□

Proposition 2.7.
L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(G)$ est le sous-espace de $\mathcal{S}^0$ constitué des fonctions f telles que

$$\forall \kappa_1, \kappa_2 \in I_c^\infty(G, G^{(0)}; \Omega^{\frac{1}{2}}), \kappa_1 * f * \kappa_2 \in \mathcal{S}^0.$$

DÉMONSTRATION. Notons $\mathcal{S}'$ le sous-espace de $\mathcal{S}^0$ constitué des fonctions f telles que

$$\forall \kappa_1, \kappa_2 \in I_c^\infty(G, G^{(0)}; \Omega^{\frac{1}{2}}), \kappa_1 * f * \kappa_2 \in \mathcal{S}^0.$$

Naturellement $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}(G)$.

Soit alors $f \in \mathcal{S}(G)$, et $\kappa_1, \kappa_2 \in I_c^m(G, G^{(0)}; \Omega^{\frac{1}{2}})$. Soit $\Delta = \sum_{i=1}^N v_i^2$ le laplacien, qui est un opérateur différentiel elliptique d'ordre 2. Grâce à sa parametrix, on obtient pour tout $l \in \mathbb{N}$ l'existence de deux noyaux κ_1' et κ_2' d'ordre $m - 2l$, et de deux noyaux régularisants $r_1, r_2 \in C_c^\infty(G, \Omega^{\frac{1}{2}})$, tels que $\kappa_1 = \kappa_1' * (\kappa_\Delta)^{*l} + r_1, \kappa_2 = \kappa_2' * (\kappa_\Delta)^{*l} + r_2$.

Or si $\kappa \in I_c^{-N-1}(G)$, alors $\kappa \in C_c(G)$ car il est donné par une intégrale oscillante absolument convergente, donc $\kappa \in \mathcal{S}^0$.

Dès lors, par définition de $\mathcal{S}(G)$, on a $(\kappa_\Delta)^{*l} * f * (\kappa_\Delta)^{*l} \in \mathcal{S}^0$. De plus, le lemme précédent assure que si l est suffisamment grand, $\kappa_1' * (\kappa_\Delta)^{*l} * f * (\kappa_\Delta)^{*l} * \kappa_2' \in \mathcal{S}^0$, et également $\kappa_1' * (\kappa_\Delta)^{*l} * f * r_2, r_1 * (\kappa_\Delta)^{*l} * \kappa_2', r_1 * f * r_2 \in \mathcal{S}^0$, car $r_i \in C_c^\infty(G, \Omega^{\frac{1}{2}}) \subset \mathcal{S}(G)$.

Donc $\kappa_1 * f * \kappa_2 \in \mathcal{S}^0$.

□

Remarque. Cette définition de l'espace de Schwartz coïncide bien avec la définition usuelle dans le cas où G est $\mathbb{R}^n$ vu en tant que groupe de Lie (avec $G^{(0)}$ réduit à un point), avec $\varphi(x) = \|x\|$.

La proposition 2.7 montre que $I_s^\infty(G, G^{(0)}; \Omega^{\frac{1}{2}}) = I_c^\infty(G, G^{(0)}; \Omega^{\frac{1}{2}}) + \mathcal{S}(G)$ est une algèbre dont $\mathcal{S}(G)$ est l'idéal des opérateurs régularisants.

Nous appellerons calcul pseudo-différentiel étendu le calcul pseudo-différentiel où les noyaux sont dans $I_s^\infty(G, G^{(0)}; \Omega^{\frac{1}{2}})$.

Remarque.
1. $\mathcal{S}(G)$ est une sous-algèbre de $C^*(G)$ stable par calcul fonctionnel holomorphe, donc elles ont même K-théorie. Ainsi du point de vue de la K-théorie on peut considérer le calcul étendu tout aussi bien que la clôture normique de l'algèbre des noyaux pseudo-différentiels à support compact. Notons que l'algèbre des opérateurs régularisants du b-calcul n'est pas stable.
2. Comme G est à croissance polynomiale, il est moyennable et $C^*(G) = C^*_{red}(G)$.

2.4. La composante s-connexe d'un groupoïde de Lie

Rappelons (voir [**25, 24**]) que la composante s-connexe d'un groupoïde différentiable G est la réunion des composantes connexes de l'unité de chaque fibre G_y. On la note G^c. C'est un sous-groupoïde ouvert de G, et il est engendré par n'importe quel voisinage de $G^{(0)}$ qu'il contient. Il est donc inclus dans tout sous-groupoïde ouvert de G contenant $G^{(0)}$. Pour décrire un groupoïde s-connexe, il suffit donc de le plonger comme sous-groupoïde ouvert d'un groupoïde de Lie ; c'est l'unique sous-groupoïde ouvert s-connexe de G.

Dès lors, il apparaît que le calcul pseudo-différentiel sur G est le même que celui sur G^c, modulo les opérateurs régularisants. Pour définir un calcul pseudo-différentiel il n'est donc pas nécessaire de construire un groupoïde "minimal". Il suffit de construire un groupoïde puis d'en prendre la composante s-connexe.

Comme G^c est un sous-groupoïde ouvert de G, l'indice analytique sur G se factorise à travers l'indice analytique sur G^c, il prend donc toujours ses valeurs dans la K-théorie de la C^*-algèbre de la composante s-connexe.

CHAPITRE 3

Le groupoïde associé à une famille transverse de sous-variétés de codimension 1

3.1. Eclatement d'une sous-variété de codimension 1

Soit M une variété, et $V \subset M$ une sous-variété de M de codimension 1. On peut définir le fibré normal à V dans M, qu'on note NV, comme le quotient TM/TV (pour $x \in V, N_xV = T_xM/T_xV$).

On appelle éclatement de V le groupoïde $\mathbf{G}(V)$ constitué de la réunion disjointe de $M \backslash V \times M \backslash V$ et du fibré $\widetilde{V \times V}$ sur $V \times V$ des isomorphismes de N_yV sur N_xV, en recollant de la manière suivante :

$$\begin{aligned} & M\backslash V \times M\backslash V \ni (x_n, y_n) \to (x, y, \alpha) \in \widetilde{V \times V} \\ & \qquad \iff \left\{ \begin{array}{l} x_n \to x, y_n \to y, \\ p_x(x_n - x) = \alpha(p_y(y_n - y)) \\ +o(p_y(y_n - y)) \end{array} \right. , \end{aligned}$$

où p_x est la projection de T_xM sur le facteur N_xV.

La structure de groupoïde sur $M \backslash V \times M \backslash V$ est celle du groupoïde de la relation d'équivalence grossière, et sur $\widetilde{V \times V}$ les applications source et but, et la composition sont définies ainsi :

$$\begin{cases} r(x,y,\alpha) = x \\ s(x,y,\alpha) = y \\ (x,y,\alpha) \circ (y,z,\alpha') = (x,z,\alpha\alpha') \end{cases}$$

La structure de variété différentiable est donnée par les cartes suivantes. Sur $M \backslash V \times M \backslash V$ la structure est donnée par celle de M.

Soient Ω_1, Ω_2 des ouverts de M rencontrant V, et $f_i : \Omega_i \to \mathbb{R}$ une fonction de définition de $V \cap \Omega_i$ (c'est-à-dire $f_i^{-1}(0) = V \cap \Omega_i$, et $\mathrm{d}f \neq 0$ sur $V \cap \Omega_i$). Comme $\mathrm{d}f_i$ définit une section non-nulle $\underline{\mathrm{d}f_i}$ de $N_{V \cap \Omega_i} V$, f_i définit une trivialisation de ce fibré.

Soit $\Psi : \Omega_1 \times \Omega_2 \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\Psi(x,y,\lambda) = f_1(x) - \lambda f_2(y)$. Cette fonction est de classe C^∞, et régulière. En effet, la dérivée de $\Psi(x,y,\lambda)$ par rapport à λ est $f_2(y)$ qui ne s'annulle que sur V, et si $y \in V$ la dérivée par rapport à y (resp. x) est non-nulle car f_2 (resp. f_1)est une fonction de définition ; donc $\mathrm{d}\Psi$ ne s'annulle jamais.

Dès lors, $W_{f_1,f_2} = \Psi^{-1}(0) = \{(x,y,\lambda) \in \Omega_1 \times \Omega_2 \times \mathbb{R}^*, f_1(x) = \lambda f_2(y)\}$ est une sous-variété de $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \mathbb{R}^*$. On définit ainsi une carte de $\mathbf{G}(V)$ par $\iota_{\Omega_1,\Omega_2} : \mathbf{G}(V)_{\Omega_1}^{\Omega_2} \to W_{\varphi_1,\varphi_2}$ en posant

$$\begin{array}{rcll} \iota_{\Omega_1,\Omega_2}(\gamma) & = & (r(\gamma), s(\gamma), \frac{f_1(r(\gamma))}{f_2(s(\gamma))}) & \text{si } \gamma \in \Omega_1 \times \Omega_2, \\ & = & (r(\gamma), s(\gamma), \lambda) & \text{si } \gamma \in \widetilde{\Omega_1 \times \Omega_2}. \end{array}$$

où $\alpha(\underline{\mathrm{d}f_2}) = \lambda \underline{\mathrm{d}f_1}$.

Il est clair que $\iota_{\Omega_1,\Omega_2}$ est un homéomorphisme.

Enfin, $\iota_{\Omega_1,\Omega_2} \circ \iota_{\Omega_1',\Omega_2'^{-1}}$ est l'identité sur $(\Omega_1 \cap \Omega_1) \times (\Omega_2 \cap \Omega_2)$.

Muni de cette structure différentiable, $\mathbf{G}(V)$ est un groupoïde de Lie.

Par ailleurs la structure de groupoïde étant donnée par $r \oplus s(x,y,t,\alpha) = (x,y,t,\alpha t)$, on a

$$d(r \oplus s)(x,y,t,\alpha)(\xi,\eta,\tau,\iota) = (\xi,\eta,\tau,\alpha\tau + t\iota)$$

et en $t = 0$ (c'est-à-dire sur V^2),

$$d(r \oplus s)(x,y,0,\alpha)(\xi,\eta,\tau,\iota) = (\xi,\eta,\tau,\alpha\tau).$$

Donc $\forall \gamma \in \widetilde{V \times V}$, $d(r \oplus s)(T_\gamma \mathbf{G}(V)$ est l'hyperplan de $T_{r \oplus s(\gamma)} {G^{(0)}}^2$ défini par l'équation $\pi_1(\xi) = \alpha(\pi_2(\xi))$, où π_2 est la projection de la deuxième coordonnée de ξ sur $N_{s(\gamma)}(V)$, et π_1 est la projection de la première coordonnée de ξ sur $N_{r(\gamma)}(V)$.

Le groupoïde $\mathbf{G}(V)$ n'est pas nécessairement s-connexe. Par exemple, si V n'est pas connexe, la composante s-connexe de $\mathbf{G}(V)$ est incluse dans la réunion de $(M\backslash V)^2$ et des fibrés $\widetilde{V_i \times V_i}$, où les V_i sont les composantes connexes de V. On suppose dans la suite de ce paragraphe que V est connexe.

Deux situations particulières sont à noter dès à présent :

a) **si V est transversalement orientée** Remarquons que dans ce cas le fibré normal peut être trivialisé, le fibré $\widetilde{V \times V}$ se trivialisant alors lui-même en $V \times V \times \mathbb{R}^*$.

   De plus, le fibré normal peut être décomposé en une partie positive et une partie négative. La composante s-connexe de $\mathbf{G}(V)$, $\mathbf{G}^c(V)$, restreint donc le fibré $\widetilde{V \times V}$ aux isomorphismes qui préservent chaque sous-fibré. On la notera $\mathbf{G}(V)^+$.

b) **si de plus V sépare M en deux parties**

   Dans ce contexte, la composante s-connexe de $\mathbf{G}(V)$ est formée de $M^+ \times M^+ \cup M^- \times M^-$, recollé avec le fibré des isomorphismes de $\widetilde{V \times V}$ qui préservent chaque sous-fibré. On notera $\mathbf{G}(V_+)$ le groupoïde obtenu.

   En utilisant une trivialisation de $N(V)$, $\mathbf{G}(V_+)$ est la réunion de $M_+ \backslash V \times M_+ \backslash V \cup M_- \backslash V \times M_- \backslash V$ et de $V \times V \times \mathbb{R}^*_+$.

   Notons que dans ce cas il existe une fonction globale de définition de V, qu'on note ρ. Dès lors

$$\mathbf{G}(V) \simeq \{(x, y, \lambda) \in M \times M \times \mathbb{R}^*, \rho(x) = \lambda\rho(y)\}$$
$$\mathbf{G}(V_+) \simeq \{(x, y, \lambda) \in M \times M \times \mathbb{R}^*_+, \rho(x) = \lambda\rho(y)\}.$$

3.2. Eclatement par rapport à un équarrissage

Si l'on considère une famille transverse de sous-variétés de codimension 1 de M, on peut effectuer une construction similaire. En effet, une conséquence de la définition 1.5 est la proposition suivante :

Proposition 3.1.
Soit $(M, (V_i)_{i \in I})$ un équarrissage. Alors les morphismes différentiables $r \oplus s : \mathbf{G}(V_i) \to M^2$ sont transverses.

Démonstration. Notons $\varphi_i' = r \oplus s : \mathbf{G}(V_i) \to M^2$.

Soit $\gamma = (\gamma_i)_{i\in I}$ un élément du produit fibré des $\mathbf{G}(V_i)$. Alors il existe une partie J de I telle que

$$(\gamma_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in J} \widetilde{V_i{\times}V_i} \times \prod_{i\notin J} (M\backslash V_i)^2.$$

Comme $\widetilde{V_i{\times}V_i} \subset \mathbf{G}(V_i)$, et $(M\backslash V_i)^2 \subset \mathbf{G}(V_i)$, il suffit de montrer la transversalité des morphismes $\varphi_i : \widetilde{V_i{\times}V_i} \to M^2, i \in J$, qui sont les projections canoniques, et $\varphi_i : (M\backslash V_i)^2 \to M^2, i \notin J$, qui sont les inclusions (lemme 1.4, 1)). Les normaux de ces derniers morphismes étant nuls, il suffit de se limiter à $i \in J$.

Or les projections canoniques se factorisent à travers les submersions $\psi_i : \widetilde{V_i{\times}V_i} \to V_i{\times}V_i$: si ι_i désigne l'inclusion de V_i^2 dans M^2, alors $\varphi_i = \iota_i \circ \psi_i$.

La transversalité des sous-variétés V_i implique celle des morphismes ι_i, le lemme 1.4, 2) nous indique qu'elle entraîne celle des morphismes $\varphi_i, i \in J$, et par suite celle des φ_i'. □

La proposition ci-dessus a pour corollaire immédiat que le produit fibré des $G(V_i)$ au-dessus de M^2 est une variété de classe C^∞.

Définition 3.2.
Soit $(M, (V_i)_{i\in I})$ un équarrissage. L'éclaté de l'équarrissage $\mathcal{E} = (V_i)_{i\in I}$ dans M^2, noté $\mathbf{G}(\mathcal{E})$ est le produit fibré des morphismes $r\oplus s : \mathbf{G}(V_i) \to M^2$.

C'est un sous-groupoïde et une sous-variété de $\prod_{i\in I} \mathbf{G}(V_i)$, donc c'est un groupoïde de Lie.

Dans le cas où chaque sous-variété V_i sépare M en deux (donc dans le cas de l'extension d'une variété à coins plongés), si on se donne des fonctions de définitions ρ_i pour les V_i, on a $\mathbf{G}(V_i) = \{(x, y, \lambda_i) \in M \times M \times \mathbb{R}^*, \rho_i(x) = \lambda_i \rho_i(y)\}$. Par conséquent on a une description alternative de $\mathbf{G}(\mathcal{E})$:

$$\mathbf{G}(\mathcal{E}) = \{(x, y, (\lambda_i)_{i\in I}) \in M \times M \times (\mathbb{R}^*)^I, \forall i \in I, \rho_i(x) = \lambda_i \rho_i(y)\}.$$

Notons

$$\overset{\bullet}{F}_J = \left(\bigcap_{i\in J} V_i\right) \cap \left(\bigcap_{i\notin J} M\backslash V_i\right).$$

En tant qu'ensemble, $\mathbf{G}(\mathcal{E})$ est la réunion des $\widetilde{\overset{\bullet}{F}_J \times \overset{\bullet}{F}_J}$, qui sont les fibrés des isomorphismes (affines) de $N_y\overset{\bullet}{F}_J$ dans $N_x\overset{\bullet}{F}_J$ dont les matrices à travers une trivialisation de $N\overset{\bullet}{F}_J$ sont diagonales.

Il est alors clair que chaque sous-variété V_J est saturée dans $\mathbf{G}(\mathcal{E})$, c'est-à-dire que tout élément de $\mathbf{G}(\mathcal{E})$ dont la source est dans V_J a son but dans V_J.

3.3. Eclatement dans un groupoïde transverse

Nous allons généraliser le processus en définissant l'éclaté d'un équarrissage dans un groupoïde qui lui est transverse.

Définition 3.3.
Soit $(M, (V_i)_{i\in I})$ *un équarrissage, et* G *un groupoïde de Lie tel que* $G^{(0)} = M$*. On dit que* G *est transverse à cet équarrissage si pour tout* $J \subset I$*, le morphisme différentiable* $r \oplus s : G \to M^2$ *et l'inclusion* V_J^2 *dans* M^2*, sont transverses.*

La proposition facile suivante présente des conditions équivalentes à cette définition :

Proposition 3.4.
Soit $(M, (V_i)_{i\in I})$ *un équarrissage, et* G *un groupoïde tel que* $G^{(0)} = M$*. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est transverse à* $\mathcal{E} = (V_i)_{i\in I}$ *;*
(ii) pour tout $x \in M$*, et pour tout* $J \subset I$*, le morphisme différentiable* $s : G^x \to M$ *et l'inclusion de* V_J *dans* M *sont transverses ;*
(iii) les morphismes $r \oplus s : G \to M^2$ *et* $r \oplus s : \mathbf{G}(\mathcal{E}) \to M^2$ *sont transverses.*

On peut donc "éclater" un équarrissage dans G :

Définition 3.5.
On définit l'éclaté de l'équarrissage dans G*, noté* $\langle G : \mathcal{E}\rangle$*, comme le*

produit fibré :

$$\begin{tikzcd}
\langle G:\mathcal{E}\rangle \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & G \arrow[d, "r\oplus s"] \\
\mathbf{G}(\mathcal{E}) \arrow[r, "r\oplus s"] & M\times M
\end{tikzcd}$$

On a alors la propriété immédiate, due à l'associativité du produit fibré :

Proposition 3.6.
Soit G un groupoïde transverse à un équarrissage $(\widetilde{M},(V_1,\dots,V_n))$; notons $\mathcal{E}=(V_1,\dots,V_n)$. Alors

$$\langle G:\mathcal{E}\rangle = \langle\dots\langle\langle G:V_1\rangle:V_2\rangle\dots\rangle.$$

En particulier,

$$\mathbf{G}(\mathcal{E}) = \langle\dots\langle\langle M{\times}M:V_1\rangle:V_2\rangle\dots\rangle.$$

On peut donc obtenir $\mathbf{G}(\mathcal{E})$ en éclatant successivement les sous-variétés V_i à partir de $M\times M$.

Corollaire 3.7.
Pour toute permutation σ,

$$\langle\dots\langle\langle G:V_1\rangle:V_2\rangle\dots\rangle = \langle\dots\langle\langle G:V_{\sigma_1}\rangle:V_{\sigma_2}\rangle\dots\rangle.$$

On peut donc éclater suivant un ordre quelconque.

Remarque. Si chaque sous-variété V_i admet un fonction de définition, on a une définition équivalente de $\langle G:\mathcal{E}\rangle$:

$$\langle G:\mathcal{E}\rangle = \{(\gamma,(\lambda_i)_{i\in I})\in G\times(\mathbb{R}^*)^I, \forall i\in I, \rho_i(r(\gamma))=\lambda_i\rho_i(s(\gamma))\}.$$

Examinons ce qui se passe pour une seule sous-variété de codimension 1.

Soit V une sous-variété d'une variété M de codimension 1, et G un groupoïde transverse à V. Alors le produit fibré G' de G et $\mathbf{G}(V)$ au-dessus de M^2 est égal à la réunion de $G_{M\backslash V}^{M\backslash V}$ et du fibré $\widetilde{G_V^V}$ des isomorphismes de s^*NV sur r^*NV au-dessus de G_V^V, les deux groupoïdes se recollant de la même manière que pour $\mathbf{G}(V)$.

En effet, si $\gamma'\in G'$, alors $\gamma'=(\gamma,\gamma_V)$, avec $\gamma\in G,\gamma_V\in\mathbf{G}(V)$ tels que $r\oplus s(\gamma)=r\oplus s(\gamma_V)$. Alors nécessairement, $r\oplus s(\gamma)\in V^2$, c'est-à-dire $\gamma\in G_V^V$, ou $r\oplus s(\gamma)\in(M\backslash V)^2$, c'est-à-dire $\gamma\in G_{M\backslash V}^{M\backslash V}$.

Dans le premier cas, γ' est donc donné par un élément de G_V^V et un isomorphisme de N_yV sur N_xV, c'est-à-dire $\gamma' \in \widetilde{G_V^V}$. Dans le second cas, γ' est entièrement déterminé par $\gamma \in G_{M\setminus V}^{M\setminus V}$, donc $\gamma' \in G_{M\setminus V}^{M\setminus V}$.

Pour conclure cette section, notons que l'éclatement permet de passer d'un groupoïde transverse à une famille de sous-variétés, à un groupoïde longitudinal sur ces variétés. Cela a un intérêt particulier dans le contexte des variétés à coins, qui provient du cas où chaque V_i sépare M en deux.

3.4. Fonctorialité de l'éclatement

Proposition 3.8.
Soient G et G' deux groupoïdes de Lie tels que $G^{(0)}$ et ${G'}^{(0)}$ sont munis de structures d'équarrissages $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ telles que G (resp. G') est transverse à $(G^{(0)}, \mathcal{E})$ (resp. $({G'}^{(0)}, \mathcal{E}')$), et soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupoïdes de Lie, tel que l'application induite sur l'espace des unités, $f^{(0)} : G^{(0)} \to {G'}^{(0)}$, est un morphisme d'équarrissages relativement à $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$.

Alors il existe un morphisme de groupoïdes de Lie $\widetilde{f} : \langle G : \mathcal{E} \rangle \to \langle G' : \mathcal{E}' \rangle$ dont l'application induite sur les unités coïncide avec f.

Démonstration. Notons $M = G^{(0)}$, $M' = {G'}^{(0)}$, et $\mathcal{E}_0 = f^{-1}(\mathcal{E}')$.

Si $V' \in \mathcal{E}'$ et $V = f^{-1}(V')$, alors $\mathbf{G}(V)$ est le produit fibré de $\mathbf{G}(V')$ et de M^2 au-dessus de ${M'}^2$: en effet, f étant transverse à V', $\overline{\mathrm{d}f}$ réalise un isomorphisme entre NV et NV' donc tout isomorphisme de N_yV' dans N_xV' induit un isomorphisme de $N_{f^{-1}(y)}V$ dans $N_{f^{-1}(x)}V$. Par conséquent, $\mathbf{G}(\mathcal{E}_0)$ est le produit fibré de $\mathbf{G}(\mathcal{E}')$ et de M^2 au-dessus de ${M'}^2$.

Comme par définition $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}$, le groupoïde $\mathbf{G}(\mathcal{E})$ est le produit fibré de $\mathbf{G}(\mathcal{E}_0)$ et de $\mathbf{G}(\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}_0)$, donc il existe un morphisme de groupoïdes de Lie de $\mathbf{G}(\mathcal{E})$ dans $\mathbf{G}(\mathcal{E}_0)$. En composant ce morphisme avec celui de $\mathbf{G}(\mathcal{E}_0)$ dans $\mathbf{G}(\mathcal{E}')$, on obtient donc un morphisme de $\mathbf{G}(\mathcal{E})$ dans $\mathbf{G}(\mathcal{E}')$. Par ailleurs le diagramme commutatif suivant implique qu'on a un morphisme $\langle G : \mathcal{E}\rangle \to \langle G' : \mathcal{E}'\rangle$:

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{G}(\mathcal{E}) \arrow[r] & \mathbf{G}(\mathcal{E}') \arrow[dr] & \\
\langle G : \mathcal{E}\rangle \arrow[ur] \arrow[dr] & & & M'^2 \\
& G \arrow[r] & G' \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Cela achève de prouver la propriété de fonctorialité de l'éclatement.

□

Remarque. Ce morphisme de groupoïdes en induit évidemment un autre au niveau des composantes s-connexes.

3.5. Moyennabilité de $\mathbf{G}(\mathcal{E})$

Proposition 3.9.
Soit $(M, \mathcal{E})$ un équarrissage, et G un groupoïde de Lie moyennable, transverse à $\mathcal{E}$. Alors le groupoïde $\langle G : \mathcal{E}\rangle$ est moyennable.

Démonstration. Rappelons (voir [**26, 1**]) que si $\mathcal{G}$ est un groupoïde, et U est un ouvert de $\mathcal{G}$, alors $\mathcal{G}$ est moyennable si et seulement si $\mathcal{G}_U$ et $\mathcal{G}_{X\backslash U}$ sont moyennables.

D'autre part, un groupoïde tel que $r \oplus s : \mathcal{G} \to \mathcal{G}^{(0)}$ est surjective et ouverte est moyennable si et seulement si ses groupes d'isotropie le sont.

Dès lors si V est une sous-variété de codimension 1 de M, $\mathbf{G}(V)$ est moyennable. En effet, $\mathbf{G}(V)_{M\backslash V} = (M\backslash V)$ est moyennable, et $\mathbf{G}(V)_V$ est moyennable car c'est un groupoïde de Lie transitif (donc $r \oplus s$ est surjective et ouverte) dont les fibres sont isomorphes à $\mathbb{R}^*$, et sont donc moyennables.

Nous en déduisons que $\langle G : \mathcal{E}\rangle$ est moyennable car c'est un produit fibré de groupoïdes moyennables. □

CHAPITRE 4

Calcul pseudo-différentiel sur les variétés à coins plongés

Dans [**16**], Richard Melrose construit un calcul pseudo-différentiel sur une variété à bord, qu'il a ensuite étendu au cas des variétés à coins plongés ([**19**]). Nous associons ici à une telle variété un groupoïde différentiable longitudinalement lisse et montrons que le calcul pseudo-différentiel de Melrose n'est autre que le calcul pseudo-différentiel sur ce groupoïde.

4.1. Le groupoïde associé à une variété à coins plongés

Soit X une variété à coins plongés compacte. En généralisant une construction d'Alain Connes effectuée dans le cadre des feuilletages, nous avons montré dans [**21**] comment construire un calcul pseudo-différentielpour tout groupoïde longitudinalement lisse.

Dans le cas d'une variété à coins plongés, on ne peut pas définir directement un calcul pseudo-différentiel sur le groupoïde $X \times X$, car pour tout $x \in X, (X{\times}X)_x = X$ n'est pas lisse. En revanche, ce groupoïde peut être désingularisé, en considérant la partie positive de l'éclaté de l'équarissage $(M, (V_i)_{i\in I})$ dont X est la partie positive, suivant une approche liée à celle de Melrose.

Définition 4.1.
Soit X une variété à coins plongés, et $(M, (V_i)_{i\in I})$ une extension de X où chaque V_i sépare M en deux. Le groupoïde de X est la restriction à X de la composante connexe de l'éclatement de l'équarrissage $\mathcal{E} = (V_i)_{i\in I}$, $\Gamma(X) = (\mathbf{G}^c(\mathcal{E}))_X^X$.

Notons que la partie positive de l'équarissage est saturée dans $\mathbf{G}^c(\mathcal{E})$, et que ce groupoïde est indépendant de l'équarissage considéré : en fait $\Gamma(X) = \cup_{F\in\mathcal{F}} \widetilde{F \times F}$ où $\widetilde{F \times F}$ est le fibré sur $F \times F$ des isomorphismes de $N_y F$ sur $N_x F$. Il ne dépend donc que de la partie positive. La considération de l'équarrissage permet juste de plonger $\Gamma(X)$ dans le groupoïde lisse $\mathbf{G}^c(\mathcal{E})$.

La structure C^∞ de $\Gamma(X)$ est décrite dans la proposition suivante :

Proposition 4.2.
Soit X une variété à coins plongés, munie d'une famille de fonctions de définition des hyperfaces $(\rho_i)_{i\in I}$. Alors $\Gamma(X)$ est la composante s-connexe de

$$\{(x, y, (\lambda_i)_{i\in I}) \in X \times X \times (\mathbb{R}_+^*)^I, \forall i \in I, \rho_i(x) = \lambda_i \rho_i(y)\}.$$

De plus, au-dessus de chaque face ouverte $\overset{\bullet}{F}$, on a une trivialisation

$$\Gamma(X)_{\overset{\bullet}{F}} = \overset{\bullet}{F} \times \overset{\bullet}{F} \times (\mathbb{R}_+^*)^{codim(F)}.$$

Chaque fibre $\Gamma(X)^x$, avec $x \in \overset{\bullet}{F}$, se trivialise en $\overset{\bullet}{F} \times (\mathbb{R}_+^*)^{codim(F)}$, donc $\Gamma(X)$ est longitudinalement lisse.

Démonstration. On considère la restriction de $\mathbf{G}^c(\mathcal{E}_+)$ à une partie saturée. Le résultat découle donc immédiatement des résultats analogues obtenus pour $\mathbf{G}(\mathcal{E})$ dans la section 3.3. ☐

Corollaire 4.3.
Soit F une face de X de codimension k. Alors $\Gamma(X)_F = \Gamma(F) \times (\mathbb{R}_+^*)^k$ relativement à une famille de fonctions de définition des hyperfaces.

Démonstration. Si l'on se donne une famille de fonctions de définition des hyperfaces, alors $\Gamma(X)_F$ est la composante s-connexe de

$$\{(x, y, (\lambda_i)_{i\in I}) \in F \times F \times (\mathbb{R}_+^*)^I, \forall i \in I, \rho_i(x) = \lambda_i \rho_i(y)\}$$

où I indexe les hyperfaces de X. Si $I' \subset I$ est l'ensemble des indices des hyperfaces de F, $\Gamma(X)_F$ est la composante s-connexe de

$$\{(x, y, (\lambda_i)_{i\in I'}) \in F \times F \times (\mathbb{R}_+^*)^{I'}, \forall i \in I', \rho_i(x) = \lambda_i \rho_i(y)\} \times (\mathbb{R}_+^*)^{I\setminus I'}$$

d'où le résultat. □

Proposition 4.4.
Le groupoïde d'une variété à coins plongés est moyennable.

DÉMONSTRATION. La proposition 3.9 assure la moyennabilité de $\mathbf{G}(\mathcal{E})$, donc celle de sa composante connexe, et donc celle de $\Gamma(X)$ qui en est la restriction à un fermé saturé.

□

4.2. Fonctorialité de $\Gamma(X)$

4.2.1. Le foncteur Γ

Proposition 4.5.
Soit $f : X \to X'$ un morphisme de variétés à coins plongés. Alors il existe un morphisme de groupoïdes de Lie $\Gamma(f) : \Gamma(X) \to \Gamma(X')$ dont l'application induite sur les unités est f.

DÉMONSTRATION. Par définition du morphisme de variétés à coins plongés, il existe des extensions $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ de X et X', et un morphisme d'équarrissages $\widetilde{f} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ dont la restriction à X est f. Par conséquent il existe un morphisme de groupoïdes $\mathbf{G}^c(\widetilde{f}) : \mathbf{G}^c(\mathcal{E}) \to \mathbf{G}^c(\mathcal{E}')$ dont la restriction aux unités est $\widetilde{f}$. Comme $\widetilde{f}(X) \subset X'$, la restriction de $\mathbf{G}^c(\widetilde{f})$ à $\Gamma(X)$ est un morphisme de groupoïdes $\Gamma(f) : \Gamma(X) \to \Gamma(X')$ dont l'application induite sur les unités est f. □

4.2.2. Produit de variétés à coins plongés

Proposition 4.6.
Si X et X' sont des variétés à coins plongés, alors

$$\Gamma(X \times X') = \Gamma(X) \times \Gamma(X').$$

Démonstration. Soient $(M, (V_i)_{i\in I})$ et $(M', (V'_j)_{j\in J})$ des extensions de X et X'. Notons $\overline{V_i} = V_i \times M', \overline{V'_j} = M \times V'_j$. Alors naturellement $(M \times M', (\overline{V_i})_{i\in I} \cup (\overline{V'_j})_{j\in J})$ est une extension de $X \times X'$. De plus $\mathbf{G}(\overline{V_i}) = \mathbf{G}(V_i) \times M'^2$, et $\mathbf{G}(\overline{V'_i}) = M^2 \times \mathbf{G}(V'_i)$.

Le produit fibré des $\mathbf{G}(\overline{V_i})$ est alors le produit cartésien du produit fibré des $\mathbf{G}(V_i)$ par M'^2 (c'est donc $\mathbf{G}((V_i)_{i\in I}) \times M'^2$), et le produit fibré des $\mathbf{G}(\overline{V'_j})$ est le produit cartésien de M^2 par le produit fibré des $\mathbf{G}(V'_j)$ (c'est donc $M^2 \times \mathbf{G}((V'_j)_{j\in J})$). Donc leur produit fibré au-dessus de $(M \times M')^2$ est le produit cartésien $\mathbf{G}((V_i)_{i\in I}) \times \mathbf{G}((V'_j)_{j\in J})$. Par conséquent $\Gamma(X \times X') = \Gamma(X) \times \Gamma(X')$, car la composante s-connexe du produit de deux groupoïdes est le produit de leurs composantes s-connexes (c'est un sous-groupoïde ouvert contenant les unités), et la restriction du produit à $X \times X'$ est le produit des restrictions à X et à X'.

□

4.3. Calcul pseudo-différentiel sur les variétés à coins plongés

4.3.1. Le calcul à support compact sur les variétés à coins plongés

Le groupoïde $\Gamma(X)$ d'une variété à coins plongés est longitudinalement lisse, comme le montre la proposition 4.2. Ceci nous permet de définir le calcul à support compact :

Définition 4.7.
Soit X une variété à coins plongés. On appelle calcul pseudo-différentiel (à support compact) sur X le calcul pseudo-différentiel (à support compact) sur le groupoïde de Lie longitudinalement lisse $\Gamma(X)$.

Remarque (Calcul pseudo-différentiel sur les groupoïdes à coins). On peut facilement généraliser cette méthode aux groupoïdes tels que :

1. G et $G^{(0)}$ sont des variétés à coins plongés
2. il existe un groupoïde de Lie (sans coins) G' contenant G tel que $G'^{(0)}$ admet une structure d'équarissage, G' est transverse à cet équarissage, et $G'^{G^{(0)}}_{G^{(0)}} = G$.

Nous appellerons groupoïde de Lie à coins un tel groupoïde.

On peut dans ce contexte définir aisément un calcul pseudo-différentiel en considérant l'éclaté dans G' de l'équarissage défini sur $G'^{(0)}$, puis en prenant la restriction à $G^{(0)}$, ce groupoïde étant longitudinalement lisse.

4.3.2. Calcul étendu sur les variétés à coins plongés

Afin de pouvoir considérer, en plus des opérateurs pseudo-différentiels à support compact, des opérateurs régularisants "à décroissance rapide", nous devons définir une fonction longueur $\psi : \Gamma(X) \to \mathbb{R}_+$.

Considérons une extension de X en un équarrissage $(M, \mathcal{E})$, et munissons-le d'une fonction de définition pour chaque $V \in \mathcal{E}$. Alors chaque $\mathbf{G}(V)$ est difféomorphe à une sous-variété fermée de $M \times M \times \mathbb{R}^*$, et par conséquent leur produit fibré au-dessus de $M \times M$ est difféomorphe à une sous-variété fermée de $M \times M \times (\mathbb{R}^*)^N$, où N est le nombre d'hyperfaces de X. La restriction à la partie positive est donc difféomorphe (à travers un difféomorphisme ι) à une sous-variété fermée de $X \times X \times (\mathbb{R}_+^*)^N$. On définit alors $\psi(\gamma) = \|\log(\pi \circ \iota(\gamma))\|$ où π est la projection $\pi : X \times X \times (\mathbb{R}_+^*)^N \to (\mathbb{R}_+^*)^N$.

Lemme 4.8.
Si on change les fonctions de définition des hyperfaces, l'application ψ' obtenue diffère de ψ par une application bornée.

De plus le système de Haar ne dépend pas de ψ à une constante multiplicative près. L'espace des fonctions à décroissance rapide ne dépend donc pas des fonctions de définition des hyperfaces.

DÉMONSTRATION. Notons ρ'_i les nouvelles fonctions de définition des hyperfaces. Alors il existe des fonctions f_i de classe C^∞ telles que $\rho'_i = f_i \rho_i$, avec $f_i > 0$. Donc si $\rho_i(x) = 0, \mathrm{d}\rho'_i(x) = f_i(x)\mathrm{d}\rho_i(x)$, et tout isomorphisme de $N_y V_i$ sur $N_x V_i$ qui associe $\mathrm{d}\rho'_i(x)$ à $\mathrm{d}\rho'_i(y)$ est égal à $f_i(x)/f_i(y)$ fois l'isomorphisme qui associe $\mathrm{d}\rho_i(x)$ à $\mathrm{d}\rho_i(y)$. Finalement,

$$\psi'_i(\gamma) = \log(f_i(r(\gamma))/f_i(s(\gamma))) + \psi_i(\gamma).$$

Or f_i est continue et jamais nulle, définie sur un compact, donc la différence $\psi'_i - \psi_i$ est bornée.

Par ailleurs, pour prouver la deuxième assertion il suffit d'observer que $\mathrm{d}\mu_x = \mathrm{d}\mu/(\prod \rho_i)$ où μ est une mesure de Lebesgue sur X. ☐

Lemme 4.9.
ψ est une fonction longueur à croissance polynomiale.

Démonstration. $\log(\pi\circ\iota)$ est un morphisme de groupoïdes, donc ψ est sous-additive.

La projection $\pi\ : X\times X\times(\mathbb{R}_+^*)^k\to(\mathbb{R}_+^*)^k$ est propre car X est compact. D'autre part $\iota(\Gamma(X))$ est fermé dans $X\times X\times(\mathbb{R}_+^*)^k$ donc $\psi=\log(\pi\circ\iota)$ est propre.

Soit $x\in X$, et V un voisinage de x qui se plonge dans $[0,1]^m\times\mathbb{T}^n$, où T^n est le tore à n dimensions. Donc $\Gamma(V)$ se plonge dans $\Gamma([0,1]^m\times\mathbb{T}^n)=[0,1]^m\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{T}^n\times\mathbb{T}^n$, et $\varphi(\gamma)$ est la norme de la composante suivant $\mathbb{R}^m$ de l'image de γ par ce plongement. Si $x'\in V$, alors $\mu_{x'}(\varphi^{-1}([0,r])$ est majoré, à une constante multiplicative près indépendante de x', par le volume d'une boule de rayon r dans $\mathbb{R}^m$, donc par r^m. Donc si $r\geq 1$, $\mu_{x'}(\varphi^{-1}([0,r])\leq c_1r^N$, et sinon $\mu_{x'}(\varphi^{-1}([0,r])\leq\sup_{x\in X}\mu_x(\varphi^{-1}([0,1])=c_2$. Donc en posant $c=\max(c_1,c_2)$ on obtient $\mu_{x'}(\varphi^{-1}([0,r])\leq c(r^N+1)$. Comme X est compact, on peut le recouvrir par un nombre fini de voisinages comme V, et obtenir ainsi une inégalité sur X. Donc φ est à croissance polynômiale. ☐

Cela nous permet donc de définir un calcul pseudo-différentiel canonique :

Définition 4.10.
Soit X une variété à coins plongés. Le calcul pseudo-différentiel sur X est le calcul pseudo-différentiel étendu sur le groupoïde $\Gamma(X)$, *relativement à ψ.*

4.4. Identification avec le b-calcul de Melrose

Dans cette section nous allons montrer que le calcul pseudo-différentiel sur $\Gamma(X)$ s'identifie au b-calcul de Melrose.

4.4.1. Rappels sur le b-calcul

Rappelons brièvement les points cruciaux du b-calcul ([**16**]) dans le cas d'une variété à bord X.

Pour simplifier les notations, supposons que le bord est connexe.

4.4.1.1. *Le b-stretched product*

Le calcul pseudo-différentiel classique peut se définir en termes de noyaux de Schwartz, en considérant les opérateurs pseudo-différentiels comme des sections distributionnelles sur X^2 à valeurs dans le fibré des demi-densités, qui sont de classe C^∞ en-dehors de la diagonale de X^2 (voir [**13**]). Dans le b-calcul, l'espace X^2 est remplacé par le b-stretched product, X_b^2 qui est défini comme la réunion de $X^2 \backslash (\partial X)^2$ et du fibré normal hémisphérique de $(\partial X)^2$, c'est-à-dire le quotient du fibré normal de $(\partial X)^2$ privé de la section nulle par l'action diagonale de $\mathbb{R}_+^*$; on le note S^+N.

Soit ρ une fonction de définition de ∂X. Le fibré S^+N s'identifie alors aux vecteurs v normaux à ∂X^2 tels que $\mathrm{d}\rho_1(v)$ et $\mathrm{d}\rho_2(v)$ sont positives et $\mathrm{d}\rho_1(v) + \mathrm{d}\rho_2(v) = 1$. On obtient alors un difféomorphisme μ entre S^+N et $\partial X^2 \times [-1, 1]$ en identifiant chacun de ces vecteurs v (normal en p à dx^2) à $(\pi_1(p), \pi_2(p), \mathrm{d}\rho_1(v) - \mathrm{d}\rho_2(v))$.

Si on plonge $X^2 \backslash (\partial X)^2$ dans $X^2 \times [-1, 1]$ par

$$(x, y) \mapsto (x, y, \frac{\rho(x) - \rho(y)}{\rho(x) + \rho(y)}),$$

on voit que X_b^2 est une sous-variété de $X^2 \times [-1, 1]$.

Lemme 4.11.
Soit $\zeta : X \times X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\zeta(x, y, t) = (1 - t)\rho(x) - (1 + t)\rho(y)$. Alors ζ est régulière, et $X_b^2 = \zeta^{-1}(0)$.

DÉMONSTRATION. Si $\partial\zeta/\partial t = -\rho(x) - \rho(y) = 0$, alors x et y sont sur le bord, or les dérivées de ζ par rapport à x et à y ne peuvent être nulles simultanément sur le bord. Donc ζ est régulière, et $\zeta^{-1}(0)$ est une sous-variété fermée de $X \times X \times [-1, 1]$ qui coïncide avec X_b^2. □

On note $\tau(x, y) = \frac{\rho(x)-\rho(y)}{\rho(x)+\rho(y)}$; cette fonction, définie sur $X^2 \backslash \partial X^2$, se prolonge de façon C^∞ sur X_b^2. On a naturellement une application $\beta_b : X_b^2 \to X^2$.

Le b-stretched product a des composantes de bord, notamment

$$\mathrm{lb} = \mathrm{cl}(\beta_b^{-1}(\partial X \times \overset{\bullet}{X})) = \tau^{-1}(-1), \mathrm{rb} = \mathrm{cl}(\beta_b^{-1}(\overset{\bullet}{X} \times \partial X)) = \tau^{-1}(1)$$

(cl désigne l'adhérence).

4.4.1.2. *Calcul pseudo-différentiel sur une variété à coins plongés*

Enfin, les b-opérateurs pseudo-différentiels sur une variété à bord X sont définis par leurs noyaux de Schwartz, en tant que sections distributionnelles conormales sur le b-stretched product, qui s'annullent, ainsi que toutes leurs dérivées, sur $\mathrm{lb} \cup \mathrm{rb}$.

4.4.1.3. *Comparaison avec* $\Gamma(X)$

Remarquons alors :

Lemme 4.12.
Soit X une variété à bord, et $\Gamma(X)$ le groupoïde associé à X. Alors $\Gamma(X)$ est une sous-variété ouverte de X_b^2, et

$$X_b^2 \backslash \Gamma(X) = lb \cup rb.$$

DÉMONSTRATION. L'application

$$X \times X \times \mathbb{R}_*^+ \supset \Gamma(X) \ni (x, y, \lambda) \mapsto (x, y, \frac{1-\lambda}{1+\lambda}) \in X_b^2 \subset X \times X \times [-1, 1]$$

est un plongement de $\Gamma(X)$ dans X_b^2, dont l'image est $X_b^2 \cap X^2 \times]-1, 1[$. Donc son complémentaire est $lb \cup rb$. On peut aussi identifier $\Gamma(X)$ à $\tau^{-1}(]-1, 1[)$. ☐

REMARQUE. Le b-stretched product est en fait le *blow-up*, l'explosion de ∂X^2 dans X^2. $\Gamma(X)$ étant une sous-variété ouverte de X_b^2 nous avons choisi le terme d'éclatement des sous-variétés afin de distinguer les deux notions.

4.4.2. Le b-stretched product d'une variété à coins plongés

Dans [**16**], Richard Melrose définit le b-stretched product uniquement pour une variété à bord. Notre présentation ci-dessus s'adapte directement au cas des variétés à coins plongés.

Supposons que X est une variété à coins plongés de codimension maximale k. Nous allons définir un b-stretched product (canonique) de X de façon analogue à la définition de l'éclatement d'un équarrissage.

Soit $(M, \mathcal{E})$ une extension de X. On définit le b-stretched product de V comme $M_V^2 = \mathbf{G}(V) \cup (M \times V) \cup (V \times M)$; la structure de variété est donnée par $\zeta : M \times M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ où $\zeta(x, y, t) = (1-t)\rho(x) - (1+t)\rho(y)$

(ρ étant une fonction de définition de V). On a une application β_V de classe C^∞ de M_V^2 dans M^2.

Ainsi $\mathbf{G}(V)$ est une sous-variété de X_V^2, et la restriction de β_V à $\mathbf{G}(V)$ n'est autre que $r \oplus s$. Donc le lemme 1.4 indique que la famille d'applications $(\beta_V)_{V\in\mathcal{E}}$ est transverse. On peut donc former le produit fibré P des M_V^2 ; on obtient ainsi une application $\beta : P \to M^2$.

Définition 4.13.
Suivant les notations précédentes, le b-stretched product de X est le produit fibré des M_V^2 au-dessus de X^2. On le note X_b^2.

On peut aussi former le produit fibré des β_V, qu'on note $\beta : X_b^2 \to X^2$.

La définition qui précède est canonique. Toutefois si nous choisissons une famille de fonctions de définition des hyperfaces, notées ρ_V, il y a une définition (non-canonique) plus simple. Nous pouvons en effet définir une application $\zeta : X \times X \times [-1,1]^k \to (\mathbb{R}_+^*)^k$ par

$$\begin{aligned}\zeta(x,y,t_1,\dots,t_k) = ((1-t_1)\rho_1(x) - (1+t_1)\rho_1(y), \dots,\\ (1-t_k)\rho_k(x) - (1+t_k)\rho_k(y)).\end{aligned}$$

Comme précédemment, cette application est régulière, donc $\zeta^{-1}(0)$ est une sous-variété de $X \times X \times [-1,1]^k$.

Proposition 4.14.
Le b-stretched product de X est difféomorphe à la variété $\zeta^{-1}(0)$.

DÉMONSTRATION. Pour chaque sous-variété $V \in \mathcal{E}$, définissons $\zeta_V : M_V^+ \times M_V^+ \times [-1,1] \to \mathbb{R}_+^*$ par

$$\zeta_V(x,y,t_V) = (1-t_V)\rho_V(x) - (1+t_V)\rho_V(y).$$

Dès lors, ζ est l'application induite par les ζ_V au niveau du produit fibré au-dessus de M^2 des $M_V^+ \times M_V^+ \times [-1,1]$. Donc $\zeta^{-1}(0)$ est le produit fibré au-dessus de M^2 des $\zeta_V^{-1}(0) \simeq X_V^2$: il est donc difféomorphe à X_b^2.

□

4.4.3. b-calcul et calcul pseudo-différentiel sur $\Gamma(X)$

Nous avons maintenant le matériel nécessaire pour achever la comparaison entre le b-calcul et le calcul pseudo-différentiel sur le groupoïde d'une variété à coins plongés. On peut déduire du lemme 4.12

que comme $lb \cup rb$ est disjoint d'un voisinage de Δ_b, le calcul pseudo-différentiel à support compact sur $\Gamma(X)$ coïncide avec les sections distributionnelles pseudo-différentielles sur X_b^2, qui s'annullent sur un voisinage de $lb \cup rb$. On retrouve ainsi la définition du b-calcul :

Théorème 4.15.
Le calcul pseudo-différentiel sur G coïncide avec le (petit) b-calcul de Melrose.

Afin de comprendre complètement le (petit) b-calcul de Melrose, il reste à comprendre la nature des opérateurs régularisants, *i.e.* les fonctions de classe C^∞ sur X_b^2 qui s'annullent en séries de Taylor sur $lb \cup rb$.

Soit f une fonction de classe C^∞ sur un voisinage compact d'un point de $lb \cup rb$ adapté à ρ, et g sa restriction à $\Gamma(X)$. Si f s'annulle avec toutes ses dérivées sur $lb \cup rb$, la formule de Taylor implique que g est à décroissance rapide par rapport au puissances de $\tau(x, y) \pm 1$, qui est équivalent à $\pi \circ \iota(\gamma)^{\pm 1}$. Ce sont donc *a fortiori* des fonctions à décroissance rapide relativement à ψ.

Cela signifie que $f \in \mathcal{S}^0$. Mais comme le petit b-calcul est une algèbre, si P est un opérateur pseudo-différentiel (à support compact) sur $\Gamma(X)$ (donc un b-opérateur pseudo-différentiel), alors Pf est un opérateur régularisant du b-calcul, et $Pf \in \mathcal{S}^0$. D'où $f \in \mathcal{S}$. Donc les opérateurs régularisants du b-calcul sont dans $\mathcal{S}(G)$. Plus précisément, ce sont les fonctions de classe C^∞ qui sont à décroissance rapide relativement à $\pi \circ \iota(\gamma)$, ainsi que leurs dérivées.

Remarque. Dans [**23**], Nistor, Weinstein et Xu ont défini un calcul pseudo-différentielsur les groupoïdes de Lie. Il semble que leur définition soit équivalente à celle de [**21**]. Ils ont aussi défini un groupoïde associé à une variété à bord qui coïncide avec le nôtre. Ce travail a été effectué indépendamment.

CHAPITRE 5

Structure de la C^*-algèbre des opérateurs pseudo-différentiels sur une variété à coins plongés

En introduisant $\Gamma(X)$, nous pouvons obtenir des résultats de calcul pseudo-différentiel en travaillant uniquement avec des C^*-algèbres et des groupoïdes. Les résultats de [**18**] s'obtiennent alors plus aisément. On peut ainsi établir un "dictionnaire" entre les notations de [**18**] et les nôtres. Nous prouverons dans la suite de ce chapitre la validité de ces correspondances.

$\Psi_b^*(X)$	$\Psi^*(\Gamma(X))$
$\Psi_{b,I}^*(\overline{N_+F})$	$\Psi^*(\Gamma(X)_F^F)$
$In_{F,X}$	morphisme de restriction $\Psi^*(\Gamma(X)) \to \Psi^*(\Gamma(X)_F^F)$
$\mathcal{A}_X$	$\overline{\Psi_0}(\Gamma(X))$
$\mathcal{A}_{F,X}$	$\overline{\Psi_0}(\Gamma(X)_F^F)$
$\mathcal{A}_{F,X}^{(-1)}$	$C^*(\Gamma(X)_F^F)$
k_F	$C^*(\Gamma(X)_{\overset{\bullet}{F}}^{\overset{\bullet}{F}})$

5.1. L'algèbre indicielle

Soit X une variété à coins plongés. Contrairement à ce qui se passe dans le cas d'une variété lisse (sans coins), les opérateurs régularisants ne sont pas nécessairement compacts. Les obstructions à la compacité sont décrites à travers l'introduction, pour chaque face de X, d'une algèbre indicielle $\Psi^*_{b,I}(\overline{N_+F})$, et d'un opérateur indiciel $\mathrm{In}_{F,M} \ : \Psi^0_b(M) \to \Psi^0_{b,I}(\overline{N_+F})$ (voir [**16**], [**18**]).

Si F est une face de X, une trivialisation $NF \simeq F \times \mathbb{R}^k_+$ induit une compactification $\overline{N_+F} \simeq F \times [-1,1]^k$ à travers l'application

$$\mathbb{R}_+ \ni s \to \frac{s-1}{s+1} \in [-1,1].$$

On obtient ainsi une action de $(\mathbb{R}^*_+)^k$ sur $\overline{N_+F}$.

Définition 5.1.
Soit X une variété à coins plongés, et F une face de X. L'algèbre indicielle de F est l'algèbre des opérateurs b-pseudo-différentiels d'ordre 0 sur $\overline{N_+F}$ qui sont invariants sous l'action de $(\mathbb{R}^*_+)^k$.

Proposition 5.2.
L'algèbre indicielle associée à F s'identifie avec l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels sur $\Gamma(X)^F_F$. L'opérateur indiciel est l'opérateur de restriction à $\Gamma(X)^F_F$.

DÉMONSTRATION. Les opérateurs b-pseudo-différentiels sur $\overline{N_+F}$ s'identifient aux sections distributionnelles pseudo-différentiels à support compact sur le groupoïde $\Gamma(F) \times ([-\infty,\infty] \times \mathbb{R})^k$. L'invariance par $\mathbb{R}^k$ signifie (voir [**18**]) que les symboles $a(\gamma, x, t)$ où $\gamma \in \Gamma(F), x \in \overline{\mathbb{R}}^k, t \in \mathbb{R}^k$ ne dépendent pas de x.

Par ailleurs, l'opérateur indiciel est défini par Melrose comme la restriction des noyaux à $\beta^{-1}(F^2)$. Il s'agit donc de la restriction induite par l'inclusion $\Gamma(X)^F_F \subset \Gamma(X)$.

□

5.2. La C^*-algèbre $\mathcal{A}_X$

Afin d'étudier la structure de $\mathcal{A}_X$, établissons d'abord deux résultats généraux sur les groupoïdes.

5.2.1. Suites de composition des C^*-algèbres de groupoïdes

Pour tout groupoïde G localement compact, une suite croissante de fermés saturés de $G^{(0)}$ induit une suite de composition de $C^*(G)$. En effet, si

$$F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_n \subset G^{(0)},$$

chaque F_i étant fermé et saturé, on peut définir

$$I_k = C^*(G_{G^{(0)}\backslash F_k}).$$

Comme $G^{(0)}\backslash F_{k+1}$ est ouvert dans $G^{(0)}$, I_k est un idéal de $C^*(G)$. On a donc une suite de composition

$$C^*(G) \supset I_1 \supset \ldots \supset I_n.$$

Supposons maintenant que G est moyennable. La décomposition

$$G^{(0)}\backslash F_k = G^{(0)}\backslash F_{k+1} \cup F_{k+1}\backslash F_k$$

en un ouvert et un fermé induit une suite exacte

$$0 \to C^*(G_{G^{(0)}\backslash F_{k+1}}) \to C^*(G_{G^{(0)}\backslash F_k}) \to C^*(G_{F_{k+1}\backslash F_k}) \to 0,$$

donc

$$I_k/I_{k+1} \simeq C^*(G_{F_{k+1}\backslash F_k}).$$

5.2.2. Décomposition de $\overline{\Psi_0}(G)$

Soit G un groupoïde de Lie moyennable, et $F \subset G^{(0)}$ un fermé saturé. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & & \\
 & C^*(G_{G^{(0)}\setminus F}) \arrow[d] & & & \\
0 \arrow[r] & C^*(G) \arrow[r] \arrow[d] & \overline{\Psi_0}(G) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "In_F"] & C_0(S^*G^{(0)}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^*(G_F) \arrow[r] \arrow[d] & \overline{\Psi_0}(G_F) \arrow[r] & C_0(S^*G^{(0)}_{|F}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

par conséquent les deux morphismes $C^*(G) \to C^*(G_F)$ et $C^*(S^*G^{(0)}) \to C^*(S^*G^{(0)}_{|F})$ étant surjectifs, $\overline{\Psi_0}(G) \to \overline{\Psi_0}(G_F)$ l'est également.

Proposition 5.3.
$C^*(G_{G^{(0)}\setminus F}) = ker\ \sigma \cap ker\ In_F = ker(\sigma \oplus In_F)$.

De plus l'image de $\sigma \oplus In_F$ est le produit fibré P de $\overline{\Psi_0}(G_F)$ et de $C^*(S^*G^{(0)})$ au-dessus de $C^*(S^*G^{(0)}_{|F})$.

DÉMONSTRATION. $\sigma \oplus In_F$ se factorise à travers une application $\overline{\Psi_0}(G) \to P$ issue de la propriété universelle du produit fibré. Cette application est surjective car σ et In_F le sont. Les éléments du noyau sont les éléments de $C^*(G)$ dont l'image dans $\overline{\Psi_0}(G_F)$ est nulle, c'est-à-dire dont l'image dans $C^*(G_F)$ est nulle. Ce sont donc les éléments de $C^*(G_{G^{(0)}\setminus F})$. □

5.2.3. Application à $\mathcal{A}_X$

La clôture en norme de $\Psi^0(\Gamma(X))$ dans l'algèbre des multiplicateurs de $C^*(\Gamma(X))$ est notée $\overline{\Psi_0}(\Gamma(X))$, ou encore $\mathcal{A}_X$ en suivant les notations de [**18**]. Rappelons qu'on a la suite exacte suivante :

$$0 \to C^*(\Gamma(X)) \to \mathcal{A}_X \overset{\sigma}{\to} C_0(S^*X) \to 0, \tag{3}$$

où σ est l'application symbole.

Naturellement, pour chaque face fermée F de X, la C^*-algèbre (indicielle) $\mathcal{A}_{F,X}$ est d'après la proposition 5.2 la clôture de $\Psi_0(\Gamma(X)^F_F)$.

Il y a également une application symbole, $\sigma_F : \mathcal{A}_F \to C_0(S^*X_{|F})$, et des opérateurs indiciels $In_{F',F} : \mathcal{A}_F \to \mathcal{A}_{F'}$ pour chaque hyperface F' de F. En suivant [**18**], on peut donc définir une application symbole total

$$\sigma_F^{tot} : \bigoplus_{F' \in \mathcal{HF}(F)} In_{F',F} \oplus \sigma_F \to \bigoplus_{F' \in \mathcal{HF}(F)} \mathcal{A}_{F'} \oplus C_0(S^*X_{|F}).$$

Notons $\mathbf{k}_F$ le noyau de ce morphisme. Melrose et Nistor ont montré que $\mathcal{A}_X$ admet une suite de composition, et que $\mathbf{k}_F$ est isomorphe à $C_0(\mathbb{R}^k, \mathcal{K}_F)$, où $\mathcal{K}_F$ est l'algèbre des opérateurs compacts sur $L^2(F)$. Nous en redonnons une démonstration.

Théorème 5.4.

Soit X une variété à coins plongés de dimension n, et F une face fermée de X. Alors l'algèbre $\mathcal{A}_F$ se décompose suivant une suite inclusive d'idéaux :

$$\mathcal{A}_F \supset \mathcal{I}_0 \supset \mathcal{I}_1 \supset \ldots \supset \mathcal{I}_j$$

où j est la dimension de F, $\mathcal{I}_0 = ker\,\sigma_F = \mathcal{A}_F^{(-1)}$, et $\mathcal{I}_l$ est la clôture de l'idéal des opérateurs b-pseudo-différentiels d'ordre strictement négatif dont les parties indicielles sont nulles sur chaque face $F' \subset F$ de dimension strictement inférieure à l.

Les sous-quotients sont déterminés par les isomorphismes naturels $\sigma_F : \mathcal{A}_F/\mathcal{I}_0 \xrightarrow{\sim} C(S^*M_{|F})$, et

$$\mathcal{I}_l/\mathcal{I}_{l+1} \simeq \bigoplus_{\substack{F' \subset F \\ \dim F' = l}} C_0(\mathbb{R}^{n-l}, \mathcal{K}_{F'}), 0 \leq l \leq j.$$

Nous allons ici en donner une nouvelle preuve plus simple, en utilisant les groupoïdes.

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, le noyau de σ_F est $C^*(\Gamma(X)_F^F)$, d'après la suite exacte 3.

Soit $F_k = F \cap \bigcup_{\substack{F' \subset F \\ dim F' < k}} F'$. On obtient ainsi une suite croissante de fermés saturés. Notons, comme dans la section 5.2.1, I_k l'idéal $C^*(\Gamma(X)_{X \setminus F_k}) \subset C^*(\Gamma(X))$ associé à F_k. Notons qu'une réunion de faces ne constitue pas nécessairement une variété à coins. Toutefois, la restriction de $\Gamma(X)$ à une telle réunion reste un groupoïde différentiable longitudinalement lisse, sur lequel on peut construire une C^*-algèbre.

Or par définition, $\mathcal{I}_l$ est l'intersection des noyaux de σ_F et de $In_{F_l,F}$. Or la proposition 5.2.2 appliquée à $G = \Gamma(X)_F$ et au fermé saturé F_l montre que $\mathcal{I}_l$ n'est autre que $C^*(\Gamma(X)_{F \setminus F_l}) = I_l$.

Par conséquent nous avons une suite inclusive d'idéaux dont les quotients sont

$$I_l/I_{l+1} = C^*\left(\bigsqcup_{\substack{F'\subset F \\ \dim F'=l}} \Gamma(X)_{\overset{\bullet}{F'}} \right) \simeq \bigoplus_{\substack{F'\subset F \\ \dim F'=l}} C^*(\overset{\bullet}{F'}{}^2 \times \mathbb{R}^{n-l})$$

$$\simeq \bigoplus_{\substack{F'\subset F \\ \dim F'=l}} C_0(\mathbb{R}^{n-l}, \mathcal{K}_{\overset{\bullet}{F'}}).$$

☐

Corollaire 5.5.
Le noyau du morphisme σ_F^{tot} est $\mathbf{k}_F = \mathcal{I}_j \simeq C_0(\mathbb{R}^{n-j}, \mathcal{K}_{\overset{\bullet}{F}})$.

De plus, son image $\mathcal{B}$ est le produit fibré suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B} \arrow[r] \arrow[d] & \overline{\Psi}_0(\cup_{F'\in\mathcal{H}\mathcal{F}(F)}\Gamma(X)_{F'}) \arrow[d] \\
C_0(S^*M_{|F}) \arrow[r] & \bigoplus_{F'\in\mathcal{H}\mathcal{F}(F)} C_0(S^*M_{|F'})
\end{tikzcd}$$

Démonstration. La première assertion a en réalité été prouvée dans la démonstration précédente : $\mathbf{k}_F = I_j \simeq C_0(\mathbb{R}^{n-j}, \mathcal{K}_{\overset{\bullet}{F}})$.

Pour prouver la seconde assertion, considérons le groupoïde $G = \Gamma(X)_F$ et soit H la réunion des hyperfaces de F. Alors d'après le résultat de la section 5.2.2, $\mathcal{B}$ est le produit fibré de $\overline{\Psi}_0(\Gamma(X)_H)$ et de $C_0(S^*M_{|F})$.

☐

Remarque. Dans le cas d'une variété à bord X, le corollaire précédent appliqué à X indique que $\mathcal{A}_X/\mathcal{K}$ est isomorphe au produit fibré de $C_0(S^*M)$ et de $\mathcal{A}_{\partial X}$.

5.3. K-théorie de $C^*(\Gamma(X))$

Choisissons une orientation normale des faces. Si F' est une hyperface de F, l'orientation de N_pF' pour $p \in F'$ induit une orientation de N_pF, car $N_pF' = N_pF \times \mathbb{R}_+$. Le nombre d'incidence $[F : F']$est $+1$

si la nouvelle orientation coïncide avec celle de F', et -1 dans le cas contraire. Si F' n'est pas une hyperface de F, on pose $[F:F']=0$.

Choisisons également un générateur e_k de $K_k(C_0(\mathbb{R}^k))\simeq\mathbb{Z}$, tel que si l'on note $\partial_k\ :\ K_{k-1}(C_0(\mathbb{R}^{k-1}))\to K_k(C_0(\mathbb{R}^k))$ l'isomorphisme de bord induit par l'action de $\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ donnée par $(x,t)\cdot y=e^ty$, on a $\partial_k(e_{k-1})=e_k$.

Lemme 5.6.
Soit X une variété à coins plongés, F une face de X de codimension k, et F' une face de codimension $k-1$. Alors en notant

$$\partial_{F,F'}:K_{k-1}(C^*(\Gamma(X)_{\overset{\bullet}{F'}}))\simeq\mathbb{Z}\to K_k(C^*(\Gamma(X)_{\overset{\bullet}{F}}))\simeq\mathbb{Z},$$

on a $\partial_{F,F'}=[F:F']\partial_k$.

DÉMONSTRATION. D'après le lemme 4.3, on a $\Gamma(X)_{\overset{\bullet}{F}\cup\overset{\bullet}{F'}}=\Gamma(\overset{\bullet}{F}\cup\overset{\bullet}{F'})\times(\mathbb{R}_+^*)^k$. Soit A une partie de X obtenue par plongement du normal à F' dans F en un point de $\overset{\bullet}{F}$, alors A rencontre toutes les fibres de $\Gamma(\overset{\bullet}{F}\cup\overset{\bullet}{F'})$, donc d'après [**22**], $C^*(\Gamma(\overset{\bullet}{F}\cup\overset{\bullet}{F'}))$ est Morita-équivalente à $C^*(\Gamma(\overset{\bullet}{F}\cup\overset{\bullet}{F'}))_A^A\simeq C^*(\Gamma(A))$.

Si F' est une hyperface de F, alors A est difféomorphe à $\mathbb{R}_+$, et $\Gamma(A)=\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+^*$, donc sa C^*-algèbre est contractile, ce qui implique que $K_*(C^*(\Gamma(X)_{\overset{\bullet}{F}\cup\overset{\bullet}{F'}}))=0$.

La suite exacte à six termes suivante assure alors le résultat :

$$\begin{tikzcd}
K_0(C^*(\Gamma(X)_{\overset{\bullet}{F}})) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & K_0(C^*(\Gamma(X)_{\overset{\bullet}{F'}})) \arrow[d] \\
K_1(C^*(\Gamma(X)_{\overset{\bullet}{F'}})) \arrow[u] & 0 \arrow[l] & K_1(C^*(\Gamma(X)_{\overset{\bullet}{F}})) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

car un changement d'orientation de $N\overset{\bullet}{F'}$ change l'isomorphisme

$$K_{i-1}(C^*(\Gamma(X)_{\overset{\bullet}{F'}}))=K_{i-1}(C_0(\mathbb{R}^k,\mathcal{K}))\simeq\mathbb{Z}$$

en son opposé.

Si F' n'est pas une hyperface de F, alors $A=\{*\}\sqcup\mathbb{R}_+^*$, et la flèche de bord associée à cette décomposition est nulle.

□

La proposition suivante (voir [**18**]) détermine alors les flèches de bord issues de la série de composition de $\mathcal{A}_X$:

Proposition 5.7.
Soit $i = n - l[2]$. Alors la matrice de la flèche de bord

$$\partial : K_{i-1}(\mathfrak{I}_{l-1}/\mathfrak{I}_l) \simeq \bigoplus_{F' \in \mathcal{F}_{l-1}(M)} \mathbb{Z} \to \bigoplus_{F \in \mathcal{F}_l(M)} \mathbb{Z} \simeq K_i(\mathfrak{I}_l/\mathfrak{I}_{l+1})$$

est donnée par la matrice des nombres d'incidence.

Démonstration. Soient F une face de dimension l, et F' une face de dimension $l-1$. Alors la restriction de $\Gamma(X)_{F_{l+1}\setminus F_{l-1}}$ à $\Gamma(X)_{\dot{F}\cup\dot{F}'}$ induit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
I_{l-1}/I_l = K_*(C^*(\Gamma(X)_{F_l\setminus F_{l-1}})) \arrow[r] \arrow[d, "\partial"'] & K_*(C^*(\Gamma(X)_{\dot{F}'})) \arrow[d, "\partial_{F,F'}"] \\
I_l/I_{l+1} = K_*(C^*(\Gamma(X)_{F_{l+1}\setminus F_l})) \arrow[r] & K_*(C^*(\Gamma(X)_{\dot{F}})).
\end{tikzcd}$$

Or $K_{i-1}(C^*(\Gamma(X)_{F_l\setminus F_{l-1}})) = \bigoplus_{\dim F_0 = l-1} \mathbb{Z}$. La composante suivant e_l de $\partial(e_{l-1})$ est donnée par $\partial_{F,F'}(e_{l-1})$, c'est donc d'après le lemme précédent $[F : F']$.

□

CHAPITRE 6

Calcul pseudo-différentiel sur les variétés à coins

Jusqu'à présent nous avons construit un calcul pseudo-différentiel sur les variétés à coins plongés. Un des points cruciaux de la construction utilisée résidait dans le fait que les hyperfaces étaient toutes plongées. Dans le cas plus général d'une variété à coins X, on peut toutefois définir un groupoïde $\mathcal{G}(X)$ permettant de construire un calcul pseudo-différentiel. Remarquons dès à présent que pour une variété à coins, plusieurs groupoïdes coexistent. Nous allons définir $\mathcal{G}(X)$, puis considérer sa composante s-connexe $\Gamma(X)$. D'autres groupoïdes intermédiaires peuvent intervenir suivant les situations. Cependant $\mathcal{G}(X)$ est universel : si deux variétés à coins X et X' ont même codimension maximale, $\mathcal{G}(X)$ est équivalent à $\mathcal{G}(X')$ (théorème 6.13).

6.1. Le groupoïde d'une variété à coins

6.1.1. Définition de $\mathcal{G}(X)$

Soit X une variété à coins de dimension n. Notons qu'une hyperface peut se couper elle-même ; nous distinguerons donc les hyperfaces (globales) des hyperfaces locales qui apparaissent au voisinage d'un point.

Nous allons définir un groupoïde différentiable, noté $\mathcal{G}(X)$, généralement non-séparé, associé à X.

Soit $x \in X$. L'espace $N_xF(x)$ se décompose en produit d'espaces N_xH_i, où les H_i parcourent l'ensemble des hyperfaces contenant x. Notons $\overset{\bullet}{F}_k = \cup_{F\in\mathcal{F}_k(X)}\overset{\bullet}{F}$ l'ensemble des points de codimension k, et F_k son adhérence.

Considérons alors le fibré $\mathcal{G}_k(X)$ sur $\overset{\bullet}{F}_k{}^2$ dont la fibre au-dessus de (x, y) est formée des isomorphismes affines de $N_yF(y)$ sur $N_xF(x)$ (ils envoient chaque composante $N_yH'_j$ sur une composante N_xH_i). Les matrices de ces isomorphismes (relativement à des trivialisations locales) sont monomiales (elles ont un et un seul élément non-nul sur chaque ligne et chaque colonne). On note $\mathcal{G}(X)$ la réunion de ces fibrés.

Munissons maintenant $\mathcal{G}(X)$ d'une structure de groupoïde différentiable. Les applications source et but sont données par les projections des fibrés $\mathcal{G}_k(X)$ sur chaque facteur $\overset{\bullet}{F}_k$. La composition est donnée par la composition des isomorphismes.

Pour définir la structure C^∞, considérons deux cartes Ω et Ω' de X. On note A (resp. A') l'ensemble des hyperfaces locales contenues dans Ω (resp. Ω') ; les cardinaux de A et A' sont égaux. Les ouverts Ω et Ω' sont donc difféomorphes à $U \times \mathbb{R}_+^A$ et $U' \times \mathbb{R}_+^{A'}$ à travers les morphismes π et π'.

Enfin, soit $\sigma : A' \to A$ une bijection.

Notons $W_{\pi,\pi',\sigma}$ l'ouvert $U \times U' \times \mathbb{R}_+^{A'} \times (\mathbb{R}_+^*)^{A'}$, et $s : W_{\pi,\pi',\sigma} \to \Omega', r : W_{\pi,\pi',\sigma} \to \Omega$ les applications données par

$$s(u, u', t, \lambda) = {\pi'}^{-1}(u', t), \quad r(u, u', t, \lambda) = \pi^{-1}(u, \sigma(\lambda t)).$$

Alors $W_{\pi,\pi',\sigma}$ définit une carte de $\mathcal{G}(X)$: on a une injection $\psi_\sigma : W_{\pi,\pi',\sigma} \to \mathcal{G}(X)$ donnée par

$$\begin{array}{rcll} \psi_\sigma(u, u', t, \lambda) & = & r \times s(u, u', t, \lambda) & \text{si } t \in (\mathbb{R}_+^*)^{A'}, \\ \psi_\sigma(u, u', t, \lambda) & = & (r(u, u', t, \lambda), s(u, u', t, \lambda), \alpha_{\sigma,t,\lambda}) & \text{si } t \notin (\mathbb{R}_+^*)^{A'}, \end{array}$$

où $\alpha_{\sigma,t,\lambda}$ est l'isomorphisme du fibré normal qui dans les trivialisations données par π et π' est le produit de la matrice de permutation associée à σ et de la matrice diagonale composée des λ_i correspondant aux indices d'annulation des t_i. On obtient donc une structure différentiable sur $\mathcal{G}(X)$.

Remarque. Les variétés à coins sont des exemples de feuilletages de Štephan, et le groupoïde que nous obtenons est un exemple concret de la construction de Jean Pradines (voir [**25**]).

6.1.2. Problèmes de séparation

Rappelons que si $f : X \to Y$ est une fonction continue, ouverte, surjective entre deux espaces topologiques, alors Y est séparé si et seulement si $\{(x, x') \in X^2, f(x) = f(x')\}$ est fermé dans X^2.

La structure topologique que nous avons définie sur $\mathcal{G}(X)$ ne le rend pas nécessairement séparé : ainsi $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2_+)$ n'est pas séparé. Avec les notations de la section 6.1.1, considérons en effet les deux ouverts $O_1 = \psi_{Id}(\mathbb{R}^2_+ \times (\mathbb{R}^*_+)^2)$ et $O_2 = \psi_\tau(\mathbb{R}^2_+ \times (\mathbb{R}^*_+)^2)$ où τ est la transposition de $\mathfrak{S}_2$. Si $\psi_{Id}(t_1, t_2, \lambda_1, \lambda_2) = \psi_\tau(t_1, t_2, \lambda_1, \lambda_2)$ alors $\lambda_1 t_1 = \lambda_2 t_2$, donc $t_1 = 0 \iff t_2 = 0$, et si de plus $t_1 = t_2 = 0$, alors $\alpha_{Id,0,\lambda_1} = \alpha_{\tau,0,\lambda_2}$ ce qui est impossible. Donc $O_1 \cap O_2 = \psi_{Id}((\mathbb{R}^*_+)^2 \times (\mathbb{R}^*_+)^2)$. Or la suite $\psi_{Id}(1/n, 1/n, 1, 1) = \psi_\tau(1/n, 1/n, 1, 1)$ converge dans O_1 et O_2 mais pas dans $O_1 \cap O_2$, donc l'application $O_1 \cap O_2 \to O_1 \times O_2$ n'est pas fermée et $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2_+)$ n'est pas séparé.

Le fait que $\mathcal{G}(X)$ n'est pas séparé ne nous empêche pas nécessairement de définir une C^*-algèbre et un calcul pseudo-différentiel dessus : la C^*-algèbre d'un groupoïde non-séparé mais dont les fibres sont séparées a été définie par Alain Connes (voir [**8**] ; nous en rappelons la construction dans la section 2.2.1), et on peut définir complètement le calcul pseudo-différentiel sur $\mathcal{G}(X)$ (section 2.2.2).

Lemme 6.1.
Chaque fibre $\mathcal{G}(X)_y$ est séparée.

Démonstration. Soit $\overset{\bullet}{F}$ la face ouverte contenant y. La fibre de y est le fibré sur $\overset{\bullet}{F}$ des isomorphismes affines de $N_y\overset{\bullet}{F}$ sur $N_x\overset{\bullet}{F}$. Donc le choix d'un élément de l'intérieur de $N_y\overset{\bullet}{F}$ induit un isomorphisme de $\mathcal{G}(X)_y$ avec $N_x\overset{\bullet}{F} \rtimes \mathfrak{S}_k$, qui est un espace séparé.

□

6.1.3. Moyennabilité de $\mathcal{G}(X)$

Proposition 6.2.
Le groupoïde $\mathcal{G}(X)$ est moyennable.

Démonstration. Pour toute face ouverte $\overset{\bullet}{F}$ de X, $\mathcal{G}(X)_{\overset{\bullet}{F}}$ est moyennable car il est transitif et le groupe d'isotropie est le groupe des matrices monomiales, c'est-à-dire le produit semi-direct de $\Delta(k)$

(le groupe des matrices diagonales de $M_k(\mathbb{R})$) et du groupe symétrique $\mathfrak{S}_k$.

Or $\Delta(k)$ est moyennable en tant que groupe abélien, et $\mathfrak{S}_k$ est moyennable en tant que groupe fini, donc leur produit semi-direct est moyennable.

Soit alors F la réunion des faces minimales de X : $F = \overset{\bullet}{F}$ est fermé et $\mathcal{G}(X)_F$ est moyennable. Donc par récurrence sur la dimension des faces de X, on obtient que $\mathcal{G}(X)$ est moyennable.

$\square$

6.2. Le groupoïde réduit $\Gamma(X)$ d'une variété à coins

Le groupoïde $\mathcal{G}(X)$ se définit pour toute variété à coins. Pourtant, lorsque la variété à coins présente un aspect un peu régulier, par exemple lorsque c'est une variété à coins plongés, on peut substituer à $\mathcal{G}(X)$ un groupoïde plus petit, $\Gamma(X)$. Nous allons donc définir le groupoïde réduit d'une variété à coins.

Définition 6.3.
Soit X une variété à coins. Le groupoïde réduit de X est la composante s-connexe de $\mathcal{G}(X)$.

Proposition 6.4.
Soit X une variété à coins plongés. Alors $\Gamma(X)$ est le groupoïde réduit de X.

DÉMONSTRATION. Notons provisoirement G le groupoïde réduit de X.

Le groupoïde $\Gamma(X)$ est un sous-groupoïde ouvert s-connexe de $\mathcal{G}(X)$ contenant X, donc par unicité on a $\Gamma(X) = G$.

$\square$

Désormais nous noterons donc $\Gamma(X)$ le groupoïde réduit d'une variété à coins.

On peut comprendre un peu mieux la structure de $\Gamma(X)$ de la façon suivante.

Soit $\overset{\bullet}{F}$ une face ouverte de codimension k d'une variété à coins X. Les demi-droites extrêmales (ou génératrices) du fibré (en cônes convexes) $N\overset{\bullet}{F}$ forment un revêtement fini $E_{\overset{\bullet}{F}}$ sur $\overset{\bullet}{F}$.

Notons $Gal(E_{\overset{\bullet}{F}})$ le groupoïde de Galois de ce revêtement : c'est l'ensemble des triplets (x, y, σ) où $x, y \in \overset{\bullet}{F}$, et σ est une bijection de la fibre du revêtement en y sur la fibre en x. La composante s-connexe de ce groupoïde de Lie est le groupoïde d'holonomie $Hol(E_{\overset{\bullet}{F}})$ du revêtement $E_{\overset{\bullet}{F}}$ (provenant de l'action d'holonomie du groupoïde d'homotopie sur le revêtement).

Par ailleurs, un isomorphisme affine de $N_y\overset{\bullet}{F}$ sur $N_x\overset{\bullet}{F}$ induit une bijection sur les génératrices. On a donc un morphisme de groupoïdes $h\ : \mathcal{G}(X)_{\overset{\bullet}{F}} \to Gal(E_{\overset{\bullet}{F}})$, qui induit un autre morphisme au niveau des composantes s-connexes, $\Gamma(X)_{\overset{\bullet}{F}} \to Hol(E_{\overset{\bullet}{F}})$.

Par ailleurs, si on note A la fibre en y du revêtement $E_{\overset{\bullet}{F}}$, on a $\mathcal{G}(X)_y^y \simeq (\mathbb{R}_+^*)^A \rtimes \mathfrak{S}_A$. Donc si $h(y, y, \alpha) = 1_y$, alors α est donné par un élément de $(\mathbb{R}_+^*)^A$ et l'unité de $\mathfrak{S}_A$, donc le noyau de h est la composante s-connexe du sous-groupoïde d'isotropie de $\Gamma(X)_{\overset{\bullet}{F}}$.

Enfin, h est surjective. Fixons une métrique sur X. En considérant les isomorphismes affines isométriques de $N_y\overset{\bullet}{F}$ sur $N_x\overset{\bullet}{F}$, on obtient une section non-canonique de h.

Nous avons ainsi prouvé la proposition suivante :

Proposition 6.5.

Soit X une variété à coins, $\overset{\bullet}{F}$ une face ouverte de X de codimension k, et $x \in \overset{\bullet}{F}$. Alors :

- $\Gamma(X)_{\overset{\bullet}{F}}$ *est le produit semi-direct de $Hol(E_{\overset{\bullet}{F}})$ et de la composante s-connexe $\Gamma_{iso}^c(X)$ du sous-groupoïde d'isotropie de* $\Gamma(X)$.
- $\Gamma(X)_x^x$ *est le produit semi-direct du groupe d'holonomie $Hol(E_{\overset{\bullet}{F}})_x^x$ et de $(\mathbb{R}_+^*)^A$ (A étant la fibre en x du revêtement $E_{\overset{\bullet}{F}}$).*

Dès lors nous pouvons caractériser l'obstruction à la séparation de $\Gamma(X)$:

Proposition 6.6.

Soit X une variété à coins, $\overset{\bullet}{F}$ une face ouverte de X de codimension k, et G un sous-groupoïde ouvert de $\mathcal{G}(X)$ contenant $\Gamma(X)$.

Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i)pour tout $x \in \overset{\bullet}{F}$, le groupe d'isotropie G_x^x est connexe ;

(ii)pour tout $x \in \overset{\bullet}{F}$, $G_x^x \simeq (\mathbb{R}_+^*)^k$.

Si de plus $G = \Gamma(X)$, alors elles sont également équivalentes à

(iii)le revêtement $E_{\overset{\bullet}{F}}$ est trivial.

DÉMONSTRATION. • $(i) \Rightarrow (ii)$ On a $(\mathbb{R}_+^*)^k \subset G_x^x \subset (\mathbb{R}_+^*)^k \rtimes \mathfrak{S}_k$, donc G_x^x est le produit semi-direct de $(\mathbb{R}_+^*)^k$ et d'un sous-groupe de $\mathfrak{S}_k$. Il est donc connexe si et seulement si ce sous-groupe est trivial.

- $(ii) \iff (iii)$ L'action de $Hol(\overset{\bullet}{F})_x^x$ est triviale si et seulement si celle de $Hol(\overset{\bullet}{F})$ l'est aussi, donc si et seulement si le revêtement est trivial.

□

Proposition 6.7.
Soit X une variété à coins, et G un sous-groupoïde ouvert de $\mathcal{G}(X)$ contenant $\Gamma(X)$. Alors G est séparé si et seulement si pour toute face ouverte $\overset{\bullet}{F}$, et pour tout $x \in \overset{\bullet}{F}$, le groupe d'isotropie G_x^x est connexe.

DÉMONSTRATION. Soit $x \in \overset{\bullet}{F}$; notons A la fibre en x de $E_{\overset{\bullet}{F}}$. Si G_x^x n'est pas connexe, il existe $\gamma \in G_x^x, h(\gamma) = (x, x, \sigma)$ avec $\sigma \in \mathfrak{S}_A, \sigma \neq 1$. Comme dans le cas de $\mathcal{G}(\mathbb{R}_+^2)$, il existe un voisinage ouvert de x dans X difféomorphe à $U \times \mathbb{R}_+^A$, et deux ouverts $O_1 = \psi_{Id}(U \times U \times \mathbb{R}_+^A \times (\mathbb{R}_+^*)^A)$ et $O_2 = \psi_\sigma(U \times U \times \mathbb{R}_+^A \times (\mathbb{R}_+^*)^A)$ tels que l'application $O_1 \cap O_2 \to O_1 \times O_2$ n'est pas fermée. Il suffit pour le voir de considérer la suite $\psi_{Id}(u, u, t^{(A)}, \lambda^{(A)})$ avec tous les éléments de $t^{(A)}$ égaux à $1/n$, et tous ceux de $\lambda^{(A)}$ égaux à 1.
Donc $G_{\overset{\bullet}{F}}$ n'est pas séparé.

Si pour toute face ouverte $\overset{\bullet}{F}$, et pour tout $x \in \overset{\bullet}{F}$, le groupe d'isotropie G_x^x est connexe, alors montrons que G est séparé. On se ramène à la séparation des éléments $(x, y, \alpha) \in G$ et $(x, y, \alpha') \in G$, car si les sources ou buts sont distincts les éléments sont séparés par la propriété de séparation de X.

Soient $(x, y, \alpha) \in G$ et $(x, y, \alpha') \in G$. Alors si V est un voisinage de x difféomorphe à $\mathbb{R}_+^A \times V_0$ et V' est un voisinage de y difféomorphe à $\mathbb{R}_+^B \times V_0'$, on obtient une bijection σ entre $\mathbb{R}_+^A$ et $\mathbb{R}_+^B$. Dès lors (x, y, α) et

(x, y, α') sont dans un même carte de $\mathcal{G}(X)$, $W_{\pi,\pi',\sigma}$ car G_y^x est connexe. Donc cette carte sépare (x, y, α) et (x, y, α').

$\square$

Nous aurons besoin pour les calculs de K-théorie du lemme élémentaire suivant :

Lemme 6.8.
Soit X une variété à coins, et Ω un ouvert saturé de $\Gamma(X)$. Alors $\Gamma(X)_\Omega = \Gamma(\Omega)$.

DÉMONSTRATION. Soit $\gamma = (x, y, \alpha) \in \Gamma(X)_\Omega$. Alors $x \in \Omega, y \in \Omega$, et α est un isomorphisme de $N_yF(y)$ sur $N_xF(x)$. Or Ω est ouvert, donc le normal à $F(y)$ dans X est égal au normal à $F(y)$ dans Ω. Donc $\Gamma(\Omega) = \Gamma(X)_\Omega$. $\square$

REMARQUE. Il se peut que $\Gamma(X) = \mathcal{G}(X)$. Ainsi, ces deux groupoïdes sont égaux dans le cas de la bouteille de Klein dont la section est une goutte à un coin (exemple 10 de la section 1.1). Cette variété possède une seule face de chaque codimension. Pour les faces de codimension 0 et 1, $\mathcal{G}(X)_F$ est connexe, nous nous intéressons donc uniquement à la face F de codimension 2.

Le revêtement de F n'est pas trivial, puisqu'un lacet générateur de $\pi_1(F)$ a une holonomie non-triviale (il induit une transposition sur les hyperfaces). Par conséquent, d'après la proposition précédente, les groupes d'isotropie $\Gamma(X)_y^y$ pour $y \in F$ sont non-connexes, or $\mathcal{G}(X)_y^y$ possède deux composantes connexes donc $\Gamma(X)_y^y = \mathcal{G}(X)_y^y$. Comme il n'y a qu'une face de codimension 2, on a donc $\Gamma(X) = \mathcal{G}(X)$.

De manière plus générale, soit M une variété lisse munie d'une action libre et propre de $\mathfrak{S}_n$, comme dans l'exemple 11 de la section 1.1 ; soit $\overline{X} = M \times \Sigma_{n-1}$. Alors $X = \overline{X}/\mathfrak{S}_n$ possède une unique face de chaque codimension, et pour la face de codimension k les groupes d'holonomie sont égaux à $\mathfrak{S}_k$. En effet, un des lacets générateurs de l'action de $\mathfrak{S}_k \subset \mathfrak{S}_n$ (en choisissant une partie à k éléments dans $\{1, \ldots, n\}$) dans $\overline{X}$ induit une action de permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ sur le revêtement de $\overline{X}$. En passant au quotient on obtient une action d'holonomie sur le revêtement de X donnée par σ. Donc $\Gamma(X)_y^y = \mathcal{G}(X)_y^y$, et $\Gamma(X) = \mathcal{G}(X)$.

En d'autres termes, on a un morphisme surjectif $\Gamma((\Sigma_{n-1} \times M \times M)/\mathfrak{S}_n) \to \mathcal{G}(X)$, par conséquent $\mathcal{G}(X)$ est s-connexe et $\Gamma(X) = \mathcal{G}(X)$.

6.2.1. Fonctorialité de Γ

Etudions à présent la question de la fonctorialité pour $\mathcal{G}$ et Γ.

Observons que l'application $f : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ donnée par la projection sur le premier facteur est un morphisme de variétés à coins. Mais $f(1/2,0)$ est de codimension 0 alors que $f(0,1/2)$ est de codimension 1. Donc les images de deux points de F_1 n'étant pas de même codimension, on ne peut pas construire de morphisme de groupoïdes entre $\mathcal{G}([0,1] \times [0,1])$ et $\mathcal{G}([0,1])$ dont l'application induite sur les unités soit f. On n'a donc pas de fonctorialité pour $\mathcal{G}$.

En revanche, on a la proposition suivante :

Proposition 6.9.
Soit $f : X \to X'$ un morphisme de variétés à coins. Alors il existe un morphisme de groupoïdes différentiables $\Gamma(f) \ : \Gamma(X) \to \Gamma(X')$ dont la restriction aux unités soit f.

Démonstration. Soit F une face de X, et soit F' la face de X' qui contient $f(F)$. Comme f est un morphisme de variétés à coins, sa différentielle induit une application surjective $\overline{\mathrm{d}f} \ : N_x\overset{\bullet}{F} \to N_{f(x)}\overset{\bullet}{F'}$. Soit K_x son noyau.

L'ensemble des $\gamma = (x,y,\alpha) \in \mathcal{G}(X)$ tels que $\alpha(K_y) = K_x$ est clairement un sous-groupoïde G de $\mathcal{G}(X)$. Montrons qu'il contient un voisinage de $\mathcal{G}(X)^{(0)}$.

Comme f est un morphisme de variétés à coins, il existe un ouvert V de X et un ouvert V' de X' qui sont des variétés à coins plongés telles que $f(V) \subset V'$. D'après la proposition 4.5, il existe un morphisme $\Gamma(f_{|V}) \ : \Gamma(V) \to \Gamma(V')$. Plus précisément, si $(x,y,\alpha) \in \Gamma(V)$, le diagramme suivant est commutatif (on note $(x',y',\alpha') = \Gamma(f_{|V})(x,y,\alpha), F = F(x), F' = F(x')$) :

$$\begin{tikzcd}
N_yF \arrow[r, "\overline{\mathrm{d}f}"] \arrow[d, "\alpha"'] & N_{f(y)}F' \arrow[d, "\alpha'"] \\
N_xF \arrow[r, "\overline{\mathrm{d}f}"] & N_{f(x)}F'.
\end{tikzcd}$$

Par conséquent $\alpha(K_y) = K_x$, donc $\Gamma(V) \subset G$. Or $\Gamma(V)$ est ouvert, donc la réunion des $\Gamma(V)$ est un voisinage de $\mathcal{G}(X)^{(0)}$.

Le groupoïde G est donc un sous-groupoïde de $\mathcal{G}(X)$ qui contient un voisinage de $\mathcal{G}(X)^{(0)}$, donc $\Gamma(X) \subset G$. Dès lors, si $\gamma = (x,y,\alpha) \in \Gamma(X)$, alors α passe au quotient en induisant $\overline{\alpha} : N_yF/K_y \simeq N_{f(y)}F' \to N_xF/K_x \simeq N_{f(x)}F'$ car $\gamma \in G$. Ceci définit $\Gamma(f)(\gamma) = (f(x), f(y), \overline{\alpha})$.

□

6.2.2. Fonctorialité relativement au produit

Soient X et X' deux variétés à coins. Le groupoïde $\mathcal{G}(X \times X')$ n'est pas nécessairement égal au produit des groupoïdes $\mathcal{G}(X)$ et $\mathcal{G}(X')$. Par exemple, si $X = X' = [0,1)$, on a $\mathcal{G}(X) = \Gamma(X)$ et donc $\mathcal{G}(X) \times \mathcal{G}(X') = \Gamma(X) \times \Gamma(X') = \Gamma(X \times X')$. Mais $\mathcal{G}(X \times X')$ n'est pas s-connexe, donc $\mathcal{G}(X \times X') \neq \mathcal{G}(X) \times \mathcal{G}(X')$.

Toutefois, la propriété est vraie au niveau du groupoïde réduit.

En effet, $\Gamma(X) \times \Gamma(X')$ est un sous-groupoïde ouvert de $\mathcal{G}(X \times X')$, qui contient $\mathcal{G}(X \times X')^{(0)}$, donc $\Gamma(X \times X') \subset \Gamma(X) \times \Gamma(X')$. Par ailleurs $\Gamma(X) \times \Gamma(X')$ est s-connexe donc

$$\Gamma(X \times X') = \Gamma(X) \times \Gamma(X').$$

6.3. La C^*-algèbre de $\mathcal{G}(X)$

6.3.1. Calcul pseudo-différentiel sur X

Nous avons montré précédemment que les fibres $\mathcal{G}(X)_y$ sont séparées, donc la C^*-algèbre de $\mathcal{G}(X)$ est bien définie, ainsi que $\overline{\Psi_0}(G)$.

Définition 6.10.
L'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels sur X, notée $\overline{\Psi_0}(X)$, ou $\mathcal{A}_X$, est l'algèbre $\overline{\Psi_0}(\mathcal{G}(X))$ des opérateurs pseudo-différentiels à support compact sur $\mathcal{G}(X)$.

Remarque. Dans le cas où $\mathcal{G}(X)$ n'est pas séparé, on peut construire néanmoins un espace de fonctions à décroissance rapide relatif à une fonction longueur à croissance polynomiale. En effet, $\mathcal{G}(X)$ est recouvert par un nombre fini de sous-variétés séparées, donc on peut définir les fonctions à décroissance rapide comme sommes de fonctions à décroissance rapide sur chaque sous-variété.

6.3.2. Equivalence de groupoïdes et équivalence de Morita

Avant d'étudier la C^*-algèbre de $\mathcal{G}(X)$ nous avons besoin de deux résultats.

Proposition 6.11.

Soit G un groupoïde de Lie, et V un ouvert de $G^{(0)}$ qui rencontre chaque orbite de G. Alors $C^*(G_V^V)$ est isomorphe à une sous-algèbre héréditaire pleine de $C^*(G)$; $C^*(G_V^V)$ est donc équivalente à $C^*(G)$ au sens de Morita.

La preuve de cette proposition, qui ne suppose pas que G est séparé, est inspirée par un théorème de M. Hilsum et G. Skandalis ([**11**]).

Démonstration. Notons $\mathcal{D}$ l'espace vectoriel engendré par les $C_c^\infty(U,\Omega^{\frac{1}{2}})$ où U parcourt un atlas maximal de G. Or $\pi_{U_1}(f_1)\pi_{U_2}(f_2) = \pi_U(f_1 * f_2)$.

Donc $\mathcal{D}$ est une sous-algèbre de $C^*(G)$.

Si Ω est un ouvert de G on note $C^*(\Omega)$ la clôture de $\mathcal{D}_{|\Omega}$ dans $C^*(G)$. Remarquons que $C^*(G_V)$ est un idéal à droite de $C^*(G)$. En effet, soient U une carte de G, U' une carte de G_V, $f \in C_c^\infty(U,\Omega^{\frac{1}{2}}), g \in C_c^\infty(U',\Omega^{\frac{1}{2}})$, alors $f * g \in C_c^\infty(U'',\Omega^{\frac{1}{2}})$ avec $U'' \subset G_V$.

De plus, $(C^*(G_V))^* = C^*(G^V)$, et $C^*(G_V^V) = C^*(G_V) \cap C^*(G^V)$ donc $C^*(G_V^V)$ est une sous-algèbre héréditaire de $C^*(G)$. Nous allons montrer qu'elle est pleine.

Soit U une carte de G, et $\gamma \in U$. Comme G est un groupoïde de Lie, les applications r et s sont ouvertes. De plus, chaque orbite de G rencontre V donc $G_V^{r(U)}$ est un ouvert non-vide. Soit alors U_1 une carte de $G_V^{r(U)}$ telle que $r(\gamma) \in r(U_1)$. Soit $\gamma_1 \in U_1$.

De même, soit U_3 une carte de $G_{s(U)}^V$ telle que $s(\gamma) \in s(U_3)$. Soit $\gamma_3 \in U_3$. Enfin, soit U_2 une carte de G_V^V qui contient $\gamma_2 = \gamma_1^{-1}\gamma\gamma_3^{-1}$. On définit $U' = U \cap U_1 * U_2 * U_3$. Si $f \in C_c^\infty(U,\Omega^{\frac{1}{2}})$, alors au moyen d'une partition de l'unité on obtient que f est la somme d'applications $f' \in C_c^\infty(U',\Omega^{\frac{1}{2}})$. Or chaque f' est la limite par rapport à un estimé (voir [**26**])

$$\|f\|_1 = \max\left(\sup_{x\in G^{(0)}} \int |f| \mathrm{d}\lambda^x, \sup_{y\in G^{(0)}} \int |f| \mathrm{d}\lambda_y\right)$$

d'une suite de produits de convolution de la forme $f_1 * f_2 * f_3$, où $f_i \in C_c^\infty(U_i,\Omega^{\frac{1}{2}})$. Donc l'idéal bilatère engendré par $C^*(G_V^V)$ est dense dans $C^*(G)$.

□

Cette proposition nous permet de donner une preuve d'un théorème de P. Muhly, J. Renault et D. Williams ([**22**]) établie dans le cadre des groupoïdes de Lie séparés.

Corollaire 6.12.
Soient G et G' deux groupoïdes de Lie (éventuellement non-séparés) équivalents. Alors leurs C^*-algèbres sont équivalentes au sens de Morita.

Rappelons qu'un sous-groupoïde G d'un groupoïde H est plein si $G = H_A^A$ où $A \subset H^{(0)}$ rencontre toutes les orbites de H, et que deux groupoïdes sont équivalents s'il existe un groupoïde qui les contient en tant que sous-groupoïdes ouverts pleins.

DÉMONSTRATION. Soit H un groupoïde qui contient G et G' en tant que sous-groupoïdes pleins. Alors la proposition précédente implique que $C^*(G)$ et $C^*(H)$ sont Morita-équivalentes, ainsi que $C^*(G')$ et $C^*(H)$, d'où s'ensuit le résultat par transitivité. ☐

6.3.3. Universalité de $K_*(C^*(\mathcal{G}(X)))$

Le degré de généralité utilisé dans la définition du groupoïde d'une variété à coins rend la K-théorie de sa C^*-algèbre uniquement dépendante de la codimension maximale de la variété à coins à partir de laquelle il est construit. En effet, nous allons prouver le théorème suivant :

Théorème 6.13.
Soient X et X' deux variétés à coins de même codimension maximale. Alors les C^*-algèbres $C^*(\mathcal{G}(X))$ et $C^*(\mathcal{G}(X'))$ sont équivalentes au sens de Morita.

DÉMONSTRATION. Soit $x \in X$. Alors X et X' étant de même codimension maximale, il existe $x' \in X'$ de même codimension que x. Donc X' rencontre toutes les orbites de $\mathcal{G}(X \cup X')$, et ainsi $\mathcal{G}(X \cup X')_X^X = \mathcal{G}(X)$ est un sous-groupoïde plein de $\mathcal{G}(X \cup X')$. Il en est de même pour X, donc $\mathcal{G}(X)$ et $\mathcal{G}(X')$ sont équivalents. Le corollaire 6.12 assure alors le résultat.

☐

REMARQUE. En fait comme pour la C^*-algèbre dun feuilletage (voir [**11**]), $C^*(\mathcal{G}(X))$ est stable, donc si X et X' sont de même codimension maximale, leurs C^*-algèbres sont isomorphes (en préparation).

REMARQUE. Pour toute variété à coins, l'indice analytique $\sigma : K_*(T^*X) \to K_*(C^*(\mathcal{G}(X)))$ prend ses valeurs dans un groupe qui ne dépend que de la codimension maximale de X.

6.3.4. Décomposition de $C^*(\mathcal{G}(X))$

6.3.4.1. *Structure de* $C^*(\mathcal{G}(X))$

Nous avons dans ce contexte, très général, un théorème analogue au théorème 5.4.

Théorème 6.14.

Soit X une variété à coins de dimension n, et l la codimension maximale des points de X. Notons F_j la réunion des faces de dimension strictement inférieure à j. Alors l'algèbre $C^*(\mathcal{G}(X))$ se décompose suivant une suite inclusive d'idéaux :

$$\mathcal{I}_0 \supset \mathcal{I}_1 \supset \ldots \supset \mathcal{I}_{n-l}$$

où $\mathcal{I}_0 = C^*(\mathcal{G}(X))$, et $\mathcal{I}_j = C^*(\mathcal{G}(X)_{X \backslash F_j})$.

Les sous-quotients sont déterminés à équivalence de Morita près par

$$\mathcal{I}_j/\mathcal{I}_{j+1} \overset{\text{Morita}}{\simeq} C^*((\mathbb{R}_+^*)^{n-j} \rtimes \mathfrak{S}_{n-j})$$

où $\Delta(k)$ est le groupe des matrices diagonales de $M_k(\mathbb{R})$, et $\mathfrak{S}_k$ est l'ensemble des permutations à k éléments.

Démonstration. Nous appliquons directement le lemme 5.2.1.

Par conséquent $\mathcal{I}_j/\mathcal{I}_{j+1} \simeq C^*(\mathcal{G}(X)_{F_{j+1} \backslash F_j})$, qui est Morita-équivalente à $C^*(\mathcal{G}(\mathbb{R}^p)_{F'_{j+1} \backslash F'_j})$ (on note F'_j l'analogue de F_j dans $\mathbb{R}^p$). Or $F' = F'_{j+1} \backslash F'_j$ est la réunion des faces ouvertes de dimension j. Le fibré normal à F' se trivialise immédiatement en $F' \times \mathbb{R}_+^{n-j}$, donc $\mathcal{G}(\mathbb{R}^p_{F'}) = F' \times F' \times (\mathbb{R}_+^*)^{n-j} \rtimes \mathfrak{S}_{n-j}$. Par conséquent $\mathcal{I}_j/\mathcal{I}_{j+1}$ est Morita-équivalent à $C^*((\mathbb{R}_+^*)^{n-j} \rtimes \mathfrak{S}_{n-j}) \otimes \mathcal{K}$, donc à $C^*((\mathbb{R}_+^*)^{n-j} \rtimes \mathfrak{S}_{n-j})$.

□

Remarque. En ce qui concerne $\Gamma(X)$, on a également une suite de composition, mais on ne peut rien dire de façon générale sur les sous-quotients.

CHAPITRE 7

Exemples

Dans ce chapitre nous calculons les groupes de K-théorie des C^*-algèbres de groupoïdes des exemples de variétés à coins donnés dans la section 1.1.

Type de variété à coins	$K_*(C^*(\Gamma(X)))$
Variété à bord (p composantes de bord)	$K_0 = 0, K_1 = \mathbb{Z}^{p-1}$
Cube $[0,1]^n$	$K_n = \mathbb{Z}, K_{n+1} = 0$
Simplexe Δ_n	$K_n = \mathbb{Z}, K_{n+1} = 0$
Goutte à un ou deux coins	$K_0 = \mathbb{Z}, K_1 = 0$
Tores à section carrée	$K_0 = \mathbb{Z}, K_1 = 0$
Bouteille de Klein à section carrée	$K_0 = 0, K_1 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

Nous utiliserons plusieurs fois le lemme élémentaire suivant :

Lemme 7.1.
Soit X une variété à coins plongés, et M une variété lisse. Alors $K_*(C^*(\Gamma(X \times M))) = K_*(C^*(\Gamma(X)))$.

Démonstration. La preuve est évidente : d'après la proposition 4.6, on a $\Gamma(X \times M) = \Gamma(X) \times \Gamma(M) = \Gamma(X) \times M^2$, donc $C^*(\Gamma(X \times M)) \simeq C^*(\Gamma(X)) \otimes \mathcal{K}$, d'où le résultat. □

7.1. Variétés à bord

Soit X une variété à bord, et soit p le nombre de composantes de bord. . D'après le théorème 5.4 et la proposition 5.7, on a une suite exacte

$$0 \to \mathcal{K} \to \mathcal{A}_X \to \bigoplus_{F \in \mathcal{HF}(X)} C_0(\mathbb{R}, \mathcal{K}) \to 0.$$

Par conséquent on a la suite exacte à six termes :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r] & K_0(\mathcal{A}_X) \arrow[r] & 0 \arrow[d] \\
\bigoplus_{F \in \mathcal{HF}(X)} \mathbb{Z} \arrow[u, "\partial"] & K_1(\mathcal{A}_X) \arrow[l] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

où la flèche ∂ est donnée par la matrice d'incidence. Elle est donc surjective, donc $K_0(\mathcal{A}_X) = 0$, et $K_1(\mathcal{A}_X) \simeq \mathbb{Z}^{p-1}$. Notons que si le bord est connexe, alors $K_*(\mathcal{A}_X) = 0$.

7.2. Le cube $[0,1]^n$

D'après la proposition 4.6, on a

$$\Gamma([0,1]^n) = \Gamma([0,1])^n$$

donc $C^*(\Gamma([0,1]^n)) = C^*(\Gamma([0,1]))^{\otimes n}$. Or $C^*(\Gamma(X))$ est de type 1. Par conséquent on peut lui appliquer la formule des coefficients universels ([**27, 6**]), qui indique que la K-théorie du produit tensoriel de plusieurs C^*-algèbres de type 1 est le produit tensoriel des groupes de K-théorie.

Or d'après le résultat de la section précédente, $K_0(C^*(\Gamma([0,1]))) = 0$ et $K_1(C^*(\Gamma([0,1]))) = \mathbb{Z}$, donc $K_0(C^*(\Gamma([0,1]^2))) = \mathbb{Z}$ et $K_1(C^*(\Gamma([0,1]^2))) = 0$, et par récurrence on obtient

$$\begin{aligned}
K_n(C^*(\Gamma([0,1]^n))) &= \mathbb{Z} \\
K_{n+1}(C^*(\Gamma([0,1]^n))) &= 0.
\end{aligned}$$

7.3. Le simplexe Δ_n

On définit le simplexe Δ_n par

$$\Delta_n = \left\{ (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n, \sum_{i=0}^{n} x_i = 1 \right\}.$$

Remarquons alors que $\Delta_n \times \mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+^{n+1} \backslash \{(0, \ldots, 0)\}$ donc par le lemme 7.1, la K-théorie de $C^*(\Gamma(\Delta_n))$ est donnée par celle de $C^*(\Gamma(\mathbb{R}_+^{n+1} \backslash \{(0, \ldots, 0)\}))$.

Or on a une suite exacte

$$0 \to C^*(\Gamma(\mathbb{R}_+^{n+1} \backslash 0)) \to C^*(\Gamma(\mathbb{R}_+))^{\otimes(n+1)} \to C^*(\mathbb{R}^{n+1}) \to 0.$$

Or $K_*(C^*(\Gamma(\mathbb{R}_+))) = 0$, donc la suite exacte de K-théorie associée est :

$$\begin{tikzcd}
K_0(C^*(\Gamma(\mathbb{R}_+^{n+1} \backslash 0))) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & u_{n+1}\mathbb{Z} \arrow[d] \\
u_n\mathbb{Z} \arrow[u] & 0 \arrow[l] & K_1(C^*(\Gamma(\mathbb{R}_+^{n+1} \backslash 0))) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

où $u_n = 1$ si n est pair, et 0 si n est impair.

Donc

$$\begin{aligned} K_n(C^*(\Delta_n))) &= \mathbb{Z} \\ K_{n+1}(C^*(\Delta_n))) &= 0. \end{aligned}$$

7.4. Les gouttes à un et deux coins

7.4.1. La goutte à un coin

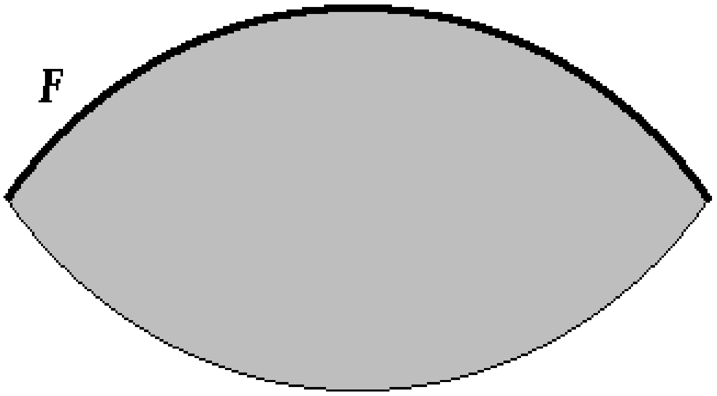
Notons F le coin de codimension 2 de la goutte à un coin A_1. Alors on a une suite exacte

$$0 \to C^*(\Gamma(A_1)_{A_1 \backslash F}) \to C^*(\Gamma(A_1)) \to C^*(\Gamma(A_1)_F) \to 0,$$

où $\Gamma(A_1)_{A_1 \backslash F} = \Gamma(A_1 \backslash F)$ par le lemme 6.8. Or $A_1 \backslash F$ est une variété à bord dont le bord est connexe, donc $K_*(C^*(\Gamma(A_1)_{A_1 \backslash F})) = 0$. Par conséquent $K_*(C^*(\Gamma(A_1))) \simeq K_*(C^*(\Gamma(A_1)_F))$. Or $\Gamma(A_1)_F = F \times F \times (\mathbb{R}_+^*)^2$, donc d'après l'isomorphisme de Thom (voir [**7**]) on a

$$\begin{aligned} K_0(C^*(\Gamma(A_1))) &= \mathbb{Z} \\ K_1(C^*(\Gamma(A_1))) &= 0. \end{aligned}$$

7.4.2. La goutte à deux coins



Soit F une hyperface de la goutte à deux coins A_2. Alors $A_2 \backslash F$ est une variété à bord dont le bord est connexe, donc $K_*(C^*(\Gamma(A_2))) \simeq K_*(C^*(\Gamma(A_2)_F))$. Or d'après le corollaire 4.3, $\Gamma(A_2)_F = \Gamma(F) \times \mathbb{R}_+^*$. Or F est une variété à bord dont le bord a deux composantes, donc

$$\begin{aligned} K_0(C^*(\Gamma(A_2))) &\simeq K_1(C^*(\Gamma(F))) \simeq \mathbb{Z}, \\ K_1(C^*(\Gamma(A_2))) &\simeq K_0(C^*(\Gamma(F))) \simeq 0. \end{aligned}$$

7.4.3. Isomorphisme de Baum-Connes

On peut obtenir le résultat à travers l'utilisation de la conjecture de Baum-Connes ([**4, 5**]). En effet, si G est un groupoïde localement compact séparé dont les fibres sont contractiles, l'espace classifiant de G est $G^{(0)}$. Ici $\Gamma(X)$ est une réunion de groupoïdes de la forme $\overset{\bullet}{F}{}^{2} \times (R_+^*)^k$. Pour chacun de ces groupoïdes la conjecture est vérifiée (c'est l'isomorphisme de Thom), et la conjecture est stable par extension donc on a

$$K_*(G^{(0)}) \simeq K_*(C^*(G)).$$

Pour la goutte à 1 ou 2 coins, les fibres de $\Gamma(A_i)$ sont effectivement contractiles, et $\Gamma(A_i)$ est moyennable, donc on peut appliquer l'isomorphisme de Baum-Connes. Mais A_i est contractile, donc $K_0(A_i) = \mathbb{Z}, K_1(A_i) = 0$, d'où $K_0(C^*(\Gamma(A_i))) = 0, K_1(C^*(\Gamma(A_i))) = \mathbb{Z}$.

7.5. Les tores à section carrée

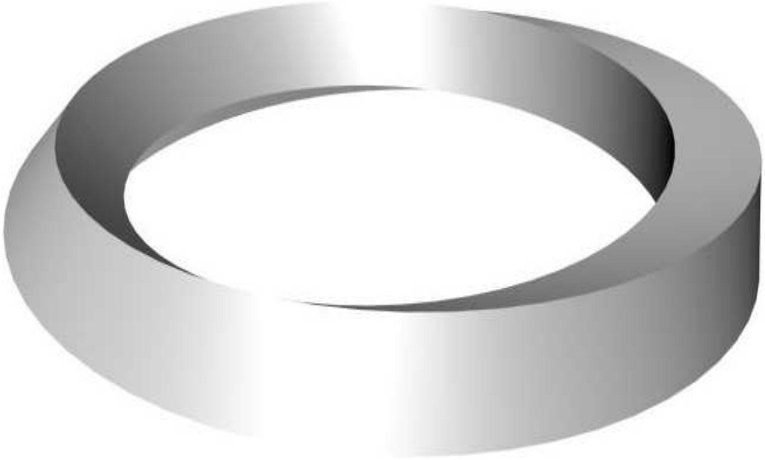
Considérons le cas du tore $T_i = ([0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R})/\mathbb{Z}$ où $\mathbb{Z}$ agit sur $\mathbb{R}$, par translations, et pas sur $[0,1] \times [0,1]$ (premier cas), ou bien par rotation de $\pi/2$ (second cas) ou π (troisième cas).

7.5.1. Premier cas : pas de rotation

Dans ce cas, $\mathbb{Z}$ n'agissant que sur $\mathbb{R}$, le tore n'est autre que $T_0 = [0,1] \times [0,1] \times S^1$, donc la K-théorie de sa C^*-algèbre est celle de $[0,1] \times [0,1]$. Donc

$$K_0(C^*(\Gamma(T_0))) = \mathbb{Z}$$
$$K_1(C^*(\Gamma(T_0))) = 0.$$

7.5.2. Second cas : rotation de $\pi/2$



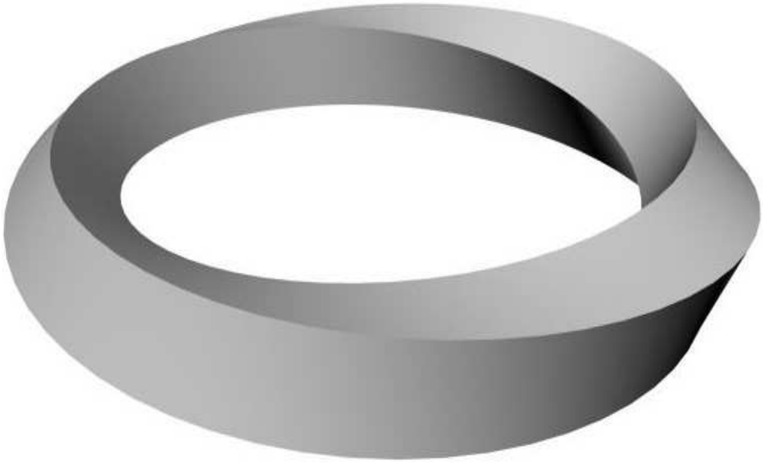
Considérons F l'unique face de codimension 2. Nous obtenons ainsi une suite exacte

$$0 \to C^*(\Gamma(T_1)_{T_1\backslash F}) \to C^*(\Gamma(T_1)) \to C^*(\Gamma(T_1)_F) \to 0,$$

où $\Gamma(T_1)_{T_1\backslash F} = \Gamma(T_1\backslash F)$ par le lemme 6.8. Or $T_1\backslash F$ est une variété à bord dont le bord est connexe, donc $K_*(C^*(\Gamma(T_1)_{T_1\backslash F})) = 0$. Par conséquent $K_*(C^*(\Gamma(T_1))) \simeq K_*(C^*(\Gamma(T_1)_F))$. Comme le normal à F est trivialisable, le fibré des isomorphismes de NF sur NF a deux composantes connexes, d'où $\Gamma(T_1)_F \simeq F \times F \times (\mathbb{R}_+^*)^2$ et

$$\begin{aligned} K_0(C^*(\Gamma(T_1))) &= \mathbb{Z} \\ K_1(C^*(\Gamma(T_1))) &= 0. \end{aligned}$$

7.5.3. Troisième cas : rotation de π



Soit F le fermé constitué d'une des deux hyperfaces. Alors $T_2 \backslash F$ est une variété à bord dont le bord est connexe, donc $K_*(C^*(\Gamma(T_2))) \simeq K_*(C^*(\Gamma(T_2)_F))$. Or $\Gamma(T_2)_F \simeq \Gamma(F) \times \mathbb{R}_+^*$, et F est une variété dont le bord a deux composantes, donc

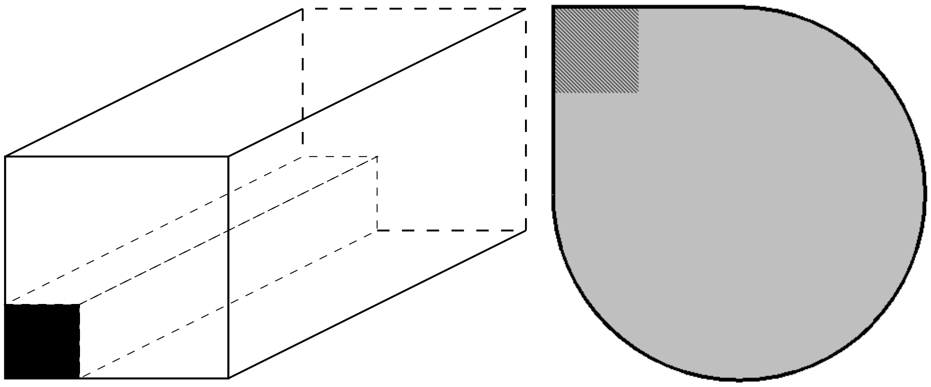
$$\begin{aligned} K_0(C^*(\Gamma(T_2))) &= \mathbb{Z} \\ K_1(C^*(\Gamma(T_2))) &= 0. \end{aligned}$$

7.5.4. Equivalences de groupoïdes

Les calculs qui précèdent sont analogues à ceux qui ont conduit à déterminer la K-théorie des C^*-algèbres des groupoïdes des gouttes à un et deux coins. En utilisant la proposition 6.11, on peut en fait donner une preuve plus directe.

7.5.4.1. *Rotation de $\pi/2$*

Dans le tore T_1, on peut définir un ouvert V difféomorphe à $[0,\epsilon[\times[0,\epsilon[\times]0,\epsilon[$, qui rencontre toutes les fibres. De même, dans la goutte à un coin A_1, on définit un ouvert difféomorphe à $[0,1[\times[0,1[$, V' qui rencontre toutes les fibres :



La proposition 6.11 implique alors que

$$K_*(C^*(\Gamma(T_1))) = K_*(C^*(\Gamma(T_1)_V^V)),$$

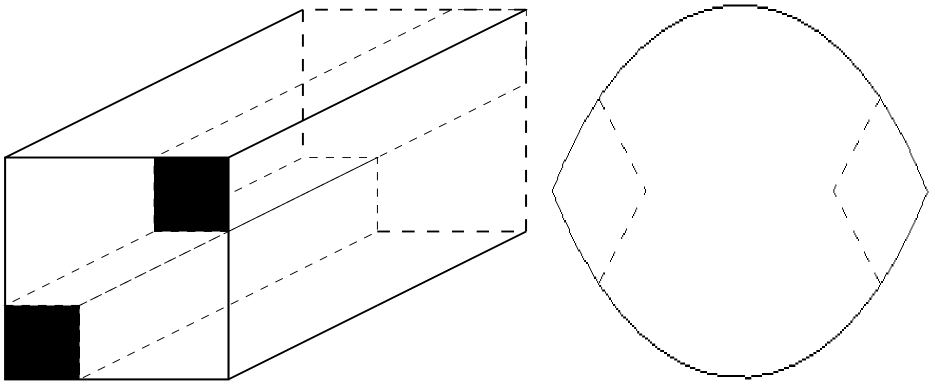
et

$$K_*(C^*(\Gamma(A_1))) = K_*(C^*(\Gamma(A_1)_{V'}^{V'})).$$

Or $\Gamma(T_1)_V^V \simeq \Gamma(A_1)_{V'}^{V'} \times \Gamma(]0,1[)$ d'où $K_*(C^*(\Gamma(T_1))) = K_*(C^*(\Gamma(A_1)))$.

7.5.4.2. *Rotation de π*

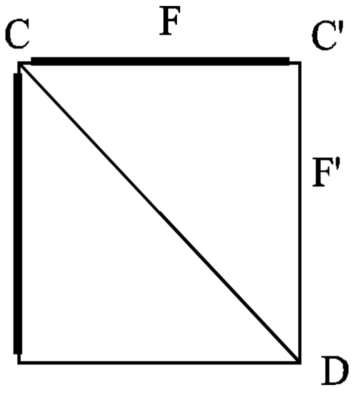
Dans le tore T_2 et la goutte à 2 coins A_2, on prend de même deux ouverts rencontrant toutes les fibres :



On a ainsi $K_*(C^*(\Gamma(T_2))) = K_*(C^*(\Gamma(A_2)))$.

7.6. La bouteille de Klein à section carrée

Considérons l'exemple 9 de la section 1.1. Il y a deux hyperfaces F et F', et trois faces de codimension 2, C, C' et D.



En considérant la décomposition de $\Gamma(X)$ en deux parties, l'une étant formée de la restriction à la variété à bord connexe $\overset{\bullet}{F} \cup \overset{\bullet}{X}$, on obtient un isomorphisme entre la K-théorie de la C^*-algèbre de $\Gamma(X)$ et celle de $\Gamma(X)_C \cup \Gamma(X)'_F$. De plus, la décomposition $F' = D \cup (\overset{\bullet}{F'} \cup C')$ induit un isomorphisme de $K_*(C^*(\Gamma(X)_{F'}))$ avec $K_*(C^*(\Gamma(X)_D))$ car $\Gamma(X)_{\overset{\bullet}{F'} \cup C'} = \Gamma(\overset{\bullet}{F'} \cup C') \times \mathbb{R}_+^*$ (en effet $\Gamma(X)_{C'}^{C'} \simeq (\mathbb{R}_+^*)^2$ car il n'y a pas d'holonomie sur C'), et $\overset{\bullet}{F'} \cup C'$ est une variété à bord connexe.

Finalement $K_*(C^*(\Gamma(X))) \simeq K_*(C^*(\Gamma(X)_C)) \times K_*(C^*(\Gamma(X)_D))$. Or pour $x \in C$ ou $x \in D$, $\Gamma(X)_x^x \simeq (\mathbb{R}_+^*)^2 \rtimes \mathfrak{S}_2$. Par conséquent $K_*(C^*(\Gamma(X))) \simeq K_*(C_0((\mathbb{R}_+^*)^2) \rtimes \mathfrak{S}_2) \oplus K_*(C_0((\mathbb{R}_+^*)^2) \rtimes \mathfrak{S}_2)$.

Lemme 7.2.

$$K_*(C^*(\mathcal{G}(\mathbb{R}_+^2))) \simeq K_*(C_0((\mathbb{R}_+^*)^2) \rtimes \mathfrak{S}_2),$$

et

$$K_0(C_0(\mathbb{R}^2) \rtimes \mathfrak{S}_2) = 0, K_1(C_0(\mathbb{R}^2) \rtimes \mathfrak{S}_2) = \mathbb{Z}.$$

Démonstration. Comme $\mathbb{R}_+^2 \backslash (0,0)$ est une variété à bord, $K_*(C^*(\mathcal{G}(\mathbb{R}_+^2 \backslash (0,0)))) = 0$ donc le premier isomorphisme provient de la décomposition $\mathbb{R}_+^2 = (0,0) \cup \mathbb{R}_+^2 \backslash (0,0)$.

Par ailleurs, si on fait le changement de variables $(x,y) \mapsto (x+y, x-y)$ on obtient $C_0(\mathbb{R}^2) \rtimes \mathfrak{S}_2 \simeq C_0(\mathbb{R}) \otimes (C_0(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}/2)$. L'action de $\mathbb{Z}/2$ sur $C_0(\mathbb{R})$ est donnée par $((-1) \cdot f)(x) = f(-x)$.

Or

$$C_0(\mathbb{R}) = \{(f,g) \in C_0(\mathbb{R}_+ \sqcup \mathbb{R}_+), f(0) = g(0)\} \subset C_0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z}/2)$$

donc $C_0(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}/2 \subset (C_0(\mathbb{R}_+) \otimes C(\mathbb{Z}/2)) \rtimes \mathbb{Z}/2$. Mais l'action de $\mathbb{Z}/2$ est triviale sur $\mathbb{C}_0(\mathbb{R}_+)$, donc $(C_0(\mathbb{R}_+) \otimes C^*(\mathbb{Z}/2)) \rtimes \mathbb{Z}/2 = C_0(\mathbb{R}_+) \otimes$

$(C^*(\mathbb{Z}/2) \rtimes \mathbb{Z}/2) = C_0(\mathbb{R}_+) \otimes M_2(\mathbb{C})$. Ainsi,

$$C_0(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}/2 = \{f \in C_0(\mathbb{R}_+ \,; C^*(\mathbb{Z}/2) \rtimes \mathbb{Z}/2), f(0) \in C^*(\mathbb{Z}/2)\}.$$

Par conséquent on a les suites exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_0(\mathbb{R}^*_+) \otimes M_2(\mathbb{C}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & C_0(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}/2 \arrow[r] \arrow[d] & C^*(\mathbb{Z}/2) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_0(\mathbb{R}^*_+) \otimes M_2(\mathbb{C}) \arrow[r] & C_0(\mathbb{R}_+) \otimes M_2(\mathbb{C}) \arrow[r] & M_2(\mathbb{C}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où $C^*(\mathbb{Z}/2) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, d'où l'on déduit la suite exacte à six termes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_0(C_0(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}/2) \arrow[r] & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \arrow[d, "\partial"'] \\
0 \arrow[u] & K_1(C_0(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}/2) \arrow[l] & \mathbb{Z} \arrow[l]
\end{tikzcd} .$$

Pour la seconde suite exacte, $C_0(\mathbb{R}_+) \otimes M_2(\mathbb{C})$ est contractile donc $K_*(C_0(\mathbb{R}^*_+) \otimes M_2(\mathbb{C})) \simeq K_*(M_2(\mathbb{C}))$. Donc la flèche de bord $\partial : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ est la flèche $K_0(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) \to K_0(M_2(\mathbb{C}))$, qui est précisément $(x, y) \mapsto x + y$. Ainsi on obtient

$$K_0(C_0(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}, K_1(C_0(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}/2) = 0.$$

Mais $C_0(\mathbb{R}^2) \rtimes \mathfrak{S}_2 \simeq C_0(\mathbb{R}) \otimes (C_0(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}/2)$, donc le théorème d'isomorphisme de Thom implique que

$$K_0(C_0(\mathbb{R}^2) \rtimes \mathfrak{S}_2) = 0, K_1(C_0(\mathbb{R}^2) \rtimes \mathfrak{S}_2) = \mathbb{Z}.$$

□

Ceci permet alors de prouver :

Corollaire 7.3.
Si X est la bouteille de Klein à section carrée, alors

$$K_0(C^*(\Gamma(X))) = 0, K_1(C^*(\Gamma(X))) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

APPENDICE A

Indice analytique et groupoïdes de Lie

Nous reproduisons ici la note aux *Comptes-rendus à l'Académie des Sciences* [**21**], écrite en collaboration avec François Pierrot.

note

note

note

Bibliographie

[1] C. Anantharaman-Delaroche et J. Renault, Amenability for groupoids, *Preprint.*

[2] M. F. Atiyah, V. K. Patodi et I. M. Singer, Spectral asymmetry and Riemannian geometry. I, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **77** (1975), pages 43–69.

[3] M. F. Atiyah et I. M. Singer, The index of elliptic operators, I, *Annals of Math.* **87** (1968), pages 484–530.

[4] P. Baum et A. Connes, Geometric K-theory for Lie groups and foliations, *Preprint I.H.E.S.*, 1982.

[5] P. Baum, A. Connes et N. Higson, Classifying space for proper actions and K-theory of group C^*-algebras, *Contemporary Mathematics* **167** (1994), pages 241–291.

[6] B. Blackadar, *K-theory for operator algebras*, *Mathematical Sciences Research Institute Publications* volume 5, Springer-Verlag, New York, 1986.

[7] A. Connes, An analogue of the Thom isomorphism for crossed products of a C* algebra by an action of R., *Adv. in Math.* **39** (1981), pages 31–55.

[8] ——, A survey of foliations and operator algebras., pages 521–628, 1982.

[9] ——, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, Inc., 1994.

[10] A. Connes et G. Skandalis, The Longitudinal Index Theorem for Foliations, *Pub. of Research Institute for Math. Sc.* **20, N. 6** (1984), pages 1139–1183.

[11] M. Hilsum et G. Skandalis, Stabilité des C^*-algèbres de feuilletages, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **33**,3 (1983), pages 201–208.

[12] ——, Morphismes K-orientés d'espaces de feuilles et fonctorialité en théorie de Kasparov, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* **4è série, t.20** (1987), pages 325–390.

[13] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators III: Pseudo-differential operators.*, *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]* volume 274, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[14] R. B. Melrose, Transformation of boundary problems, *Acta Math.* **147**,3-4 (1981), pages 149–236.

[15] ——, Pseudodifferential operators, corners and singular limits, in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I, II (Kyoto, 1990)*, Tokyo, 1991, pages 217–234, Math. Soc. Japan.

[16] ——, *The Atiyah-Patodi-Singer Index Theorem*, A. K. Peters, 1993.

[17] R. B. MELROSE ET V. NISTOR, Homology of pseudodifferential operators I. Manifolds with boundary, *Preprint.*

[18] ——, K-theory of b-pseudodifferential operators and an $\mathbb{R}^k$-equivariant index theorem, *Preprint.*

[19] R. B. MELROSE ET P. PIAZZA, Analytic K-theory on manifolds with corners, *Adv. Math.* **92**,1 (1992), pages 1–26.

[20] B. MONTHUBERT, Pseudodifferential calculus on manifolds with corners and groupoids, *A paraître aux Proc. of the A.M.S.*

[21] B. MONTHUBERT ET F. PIERROT, Indice analytique et groupoïdes de Lie, *C.R. Acad. Sci. Paris* **Ser. I, 325, No. 2, 193-198 (1997)**.

[22] P. MUHLY, J. RENAULT ET D. WILLIAMS, Equivalence and isomorphism for groupoid C *-algebras., *J. Operator Theory* **17**,1 (1987), pages 3–22.

[23] V. NISTOR, A. WEINSTEIN ET P. XU, Pseudodifferential operators on differential groupoids, *Preprint.*

[24] J. PRADINES, Théorie de Lie pour les groupoïdes différentiables. Relations entre propriétés locales et globales, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **263** (1966), pages A907–A910.

[25] ——, How to define the differentiable graph of a singular foliation., *Cahiers Topologie Géom. Différentielle Catégoriques* **26**,4 (1985), pages 339–380.

[26] J. RENAULT, *A Groupoid Approach to C^*-Algebras*, *Lecture Notes in Mathematics* volume 793, Springer-Verlag, 1980.

[27] J. ROSENBERG ET C. SCHOCHET, The Künneth theorem and the universal coefficient theorem for equivariant K-theory and KK-theory, *Mem. Amer. Math. Soc.* **62**,348 (1986), pages vi+95.

[28] A. WEINSTEIN, Groupoids: unifying internal and external symmetry, *Notices A.M.S.* **43** (1996), pages 744–752.