INDICE ANALYTIQUE ET GROUPOÏDES DE LIE

BERTRAND MONTHUBERT ET FRANÇOIS PIERROT

19 décembre 1996

Résumé. Soit G un groupoïde de Lie. Le calcul pseudodifférentiel sur G définit l'indice analytique. Le groupoïde tangent associé à G induit un morphisme de K-théorie dont nous prouvons qu'il coïncide avec l'indice analytique. Ce dernier peut donc se définir sans recours au calcul pseudodifférentiel.

Abstract. Let G be a Lie groupoid. The pseudodifferential calculus over G defines the analytic index. The tangent groupoid induces a morphism in K-theory ; we prove that it coincides with the analytic index. Thus the latter may be defined without considering the pseudodifferential calculus.

AMS Classification: 46L80; 19K56; 58G15

Adresse Institut de Mathématiques
Université Pierre et Marie Curie
Tour 46-0 3e étage
4, place Jussieu
F-75252 PARIS CEDEX 05

1. English Abridged Version

Notations

Let G be a Lie groupoid, possibly with boundary provided $\partial G^{(0)}$ is saturated and $G_{\partial G^{(0)}} = \partial G$. Let TF be the normal fibre bundle of $G^{(0)}$ into G, and S^*F is the associated sphere bundle.

Let $C_c^\infty(G)$ be the involutive algebra of functions with compact support over G, the product being given by convolution (which depends on a Haar system). This algebra can be canonically defined with the help of half-densities. (*cf.* [3]). We have the canonical morphism $U_\gamma : C_c^\infty(G_{s(\gamma)}) \to C_c^\infty(G_{r(\gamma)})$.

1.1. Pseudodifferential calculus over Lie groupoids.

We generalize the construction of A. Connes, built in the case of the holonomy groupoid of a foliation([2]).

Definition 1.1. We call G-operator an operator T over $C_c^\infty(G)$ such that there is a family $T_u : C_c^\infty(G_u) \to C_c^\infty(G_u)$ satisfying $T(f)(\gamma) = T_{s(\gamma)}(f_{|G_{s(\gamma)}})(\gamma)$, and such that $U_\gamma^{-1} T_{r(\gamma)} U_\gamma = T_{s(\gamma)}$.

Let T be a G-operator. We say that T is supported in K if $\forall f \in C_c^\infty(G)$, $Supp(Tf) \subset K.Supp(f)$.

For $\varphi \in C_c^\infty(G)$, let $M_\varphi \in End(C_c^\infty(G))$ be the multiplication operator. Suppose $Supp(\varphi) \subset V$ with an open subset of G trivializing by Φ the submersion s. Then $\Phi : V \to X \times \Omega$ induces $\widetilde{\Phi} : C_c^\infty(V) \xrightarrow{\sim} C_c^\infty(X \times \Omega)$.

Definition 1.2. Let $OPD(G)$ (resp. $OPD_m(G)$, $m \in \mathbb{Z}$) be the space of G-operators T with compact support such that for every pair (φ, Φ), $\widetilde{\Phi} \circ M_\varphi \circ T \circ M_\varphi \circ \widetilde{\Phi}^{-1}$ is a family of polyhomogeneous pseudodifferential operators (resp. of order not greater than m).

Ex: For $G = M \times M$, with M a compact manifold, $OPD(G)$ is the algebra of pseudodifferential operators over M.

Theorem 1.1. 1. *$OPD_0(G)$ is an involutive subalgebra of the multipliers of $C_c^\infty(G)$.*
2. *The elements of $OPD_0(G)$ extend by continuity to multipliers of $C^*(G)$.*
3. *Let $\Psi_0^*(G)$ be the norm-closure of $OPD_0(G)$ in $M(C^*(G))$. The symbol map σ extend to a morphism of C^*-algebras still noted σ, $\sigma : \Psi_0^*(G) \to C_0(S^*F)$. We obtain the following exact sequence:*

$$0 \to C^*(G) \to \Psi_0^*(G) \xrightarrow{\sigma} C_0(S^*F) \to 0$$

Remark 1. From this we deduce a similar exact sequence involving $C^*_{réd}(G)$.

Let's consider an element of $K_0(T^*F)$. It is given by two vector bundles over $G^{(0)}$, E and E', and σ an order 0 symbol from E to E'.

Now if P is an elliptic operator of order 0 of symbol σ, it defines a morphism between the C^*- modules $E \otimes_{C(M)} \Psi_0^*(G)$ and $E' \otimes_{C(M)} \Psi_0^*(G)$. The latter exact sequence shows that it is a quasiisomorphism of $C^*(G)$ which defines an element $[Ind(\sigma)] \in K_0(C^*(G))$.

Definition 1.3. The analytic index is the morphism:

$$\begin{array}{rccc} Ind_a : & K_0(T^*F) & \to & K_0(C^*(G)) \\ & [\sigma] & \to & [Ind(\sigma)]. \end{array}$$

1.2. **Tangent groupoid and analytic index.** Let X be a smooth manifold and X^0 a closed submanifold. Let $M_{X^0}^X$ be the normal cone deformation of X^0 in X as defined in [6], 3.1.

Proposition 1.1. *Let G be a Lie groupoid, $M_{G^{(0)}}^G$ is naturally equipped with a Lie groupoid structure of diagonal $G^{(0)} \times [0,1]$. We call G_T this Lie groupoid. The construction is functorial.*

As $C^*(TF) \sim C_0(T^*F)$, we get the exact sequence:

$$0 \to C^*(G) \otimes C_0(]0,1]) \to C^*(G_T) \xrightarrow{ev_0} C_0(T^*F) \to 0$$

where ev_t is the evaluation at t.

Let $\rho = ev_{1,*} \circ ev_{0,*}^{-1} : K^0(T^*F) \to K_0(C^*(G))$.

Theorem 1.2. *$\rho = Ind_a$ where Ind_a is the analytic index of Atiyah and Singer.*

Thus we can define and work with the analytic index without using pseudodifferential operators. For instance, if M is a manifold with boundary, we construct a groupoid adapted to this setting, giving the main results of [7].

Remark 2. While we were preparing this note, we found out that V. Nistor, A. Weinstein and P. Xu had also defined a pseudifferential calculus over groupoids, and proved that the latter groupoid induces Melrose's b-calculus.

2. Calcul pseudodifférentiel sur les groupoïdes de Lie.

Nous généralisons ici la construction d'A. Connes effectuée dans la cadre du groupoïde d'holonomie d'un feuilletage ([2]).

Notations

Soit G un groupoïde de Lie, éventuellement à bord avec structure tangente au bord, c'est-à-dire que $G^{(0)}$ et G sont munis d'une structure de variété à bord, $\partial G^{(0)}$ est saturé, et $G_{\partial G^{(0)}} = \partial G$, de sorte que si $x \in G^{(0)}, G_x = s^{-1}(x)$ est une variété sans bord.

Soit $C_c^\infty(G)$ l'algèbre involutive des fonctions à support compact sur G, le produit étant donné par la convolution (qui dépend du choix d'un système de Haar). Cette algèbre peut être définie canoniquement en utilisant des demi-densités (*cf.* [3]). On note $C^*(G)$ la C^*- algèbre enveloppante de $C_c^\infty(G)$ et $C^*_{réd}(G)$ la C^*-algèbre réduite ([9]).

Nous noterons TF le fibré normal à $G^{(0)}$ dans G, T^*F le fibré cotangent et S^*F le fibré en sphères associé.

On note $U_\gamma : C_c^\infty(G_{s(\gamma)}) \to C_c^\infty(G_{r(\gamma)})$.

Définition 2.1. On appelle G-opérateur T un opérateur de $C_c^\infty(G)$ dans lui-même tel qu'il existe une famille $T_u : C_c^\infty(G_u) \to C_c^\infty(G_u)$ vérifiant $T(f)(\gamma) = T_{s(\gamma)}(f_{|G_{s(\gamma)}})(\gamma)$, et tel que $U_\gamma^{-1} T_{r(\gamma)} U_\gamma = T_{s(\gamma)}$. Soit T un G-opérateur. On dit que T est de support K si $\forall f \in C_c^\infty(G)$, $Supp(Tf) \subset K.Supp(f)$.

Soit $\varphi \in C_c^\infty(G)$; notons $M_\varphi \in End(C_c^\infty(G))$ l'opérateur de multiplication. Supposons $Supp(\varphi)$ inclus dans un ouvert V de G trivialisant par Φ la submersion s. $\Phi : V \to X \times \Omega$ ($X \subset G^{(0)}$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$) induit naturellement un isomorphisme $\widetilde{\Phi}$ entre $C_c^\infty(V)$ et $C_c^\infty(X \times \Omega)$.

Définition 2.2. On définit $OPD(G)$ (resp. $OPD_m(G)$, $m \in \mathbb{Z}$) comme l'espace des G-opérateurs T à support compact tels que pour tout (φ, Φ) tel que précédemment, $\widetilde{\Phi} \circ M_\varphi \circ T \circ M_\varphi \circ \widetilde{\Phi}^{-1}$ est une famille d'opérateurs pseudodifférentiels polyhomogènes (resp. d'ordre inférieur ou égal à m).

Ex: Pour $G = M \times M$, où M est une variété compacte, $OPD(G)$ est l'algèbre des opérateurs pseudodifferentiels sur M.

Si G est un groupe de Lie, $OPD(G)$ est l'algèbre des opérateurs pseudodifferentiels sur G qui sont G-équivariants.

Si $T \in OPD_0(G)$, soit $\sigma(T)$ son symbole dans $C_c^\infty(S^*F)$. Ceci définit une application surjective $\sigma : OPD_0(G) \to C_c^\infty(S^*F)$.

Théorème 2.1. *1° $OPD_0(G)$ est une sous-algèbre involutive des multiplicateurs de $C_c^\infty(G)$.*

2° Les éléments de $OPD_0(G)$ s'étendent par continuité en des multiplicateurs de $C^*(G)$.

3° Notons $\Psi_0^*(G)$ la clôture normique de $OPD_0(G)$ dans $M(C^*(G))$. σ s'étend en un morphisme de C^*-algèbres encore noté σ, $\sigma : \Psi_0^*(G) \to C_0(S^*F)$. On a la suite exacte suivante:

$$0 \to C^*(G) \to \Psi_0^*(G) \xrightarrow{\sigma} C_0(S^*F) \to 0$$

Preuve. Soit $a \in OPD_0(G)$. Il existe $b \in OPD_0(G)$ et $f \in C_c^\infty(G^{(0)})$ tels que $\|f\| \leq \|\sigma(a)\|^2 + \varepsilon$ et $r = a^*a + b^*b - f$ soit d'ordre strictement inférieur à l'opposé de la dimension de la fibre. Par intégration on montre que r est dans $C^*(G)$ et par là $f \in M(C^*(G))$ (*cf.* [9]). Donc a est un multiplicateur de $C^*(G)$.

Soit $\pi : \Psi_0^*(G) \to \Psi_0^*(G)/C^*(G)$. Alors $\|\pi(a)\|^2 = \|\pi(a^*a)\| \leq \|\pi(f)\| \leq \|\sigma(a)\|^2 + \varepsilon$. Donc ker $\sigma \subset C^*(G)$. Par ailleurs un argument classique prouve que $C^*(G) \subset$ ker σ.

□

Remarque . – Ces résultats ont été présentés dans [8].

- On peut bien sûr prendre des matrices, ce qui permet d'étendre ces résultats au cas d'opérateurs agissant sur les sections de fibrés sur $G^{(0)}$.
- La surjection canonique $C^*(G) \to C^*_{réd}(G)$ montre que les éléments de $OPD_0(G)$ définissent également des multiplicateurs de $C^*_{réd}(G)$ et l'on a encore une suite exacte :

$$0 \to C^*_{réd}(G) \to \Psi^*_{0,réd}(G) \xrightarrow{\sigma} C_0(S^*F) \to 0$$

Considérons un élément de $K_0(T^*F)$. Il est représenté par deux fibrés E et E' sur $G^{(0)}$, et σ un symbole d'ordre 0 de E dans E' ([1]). Dans le cas non-compact, on a des fibrés triviaux à l'infini, et σ est trivial à l'infini. Par ailleurs, si P est un opérateur elliptique d'ordre 0 de symbole σ, il définit un morphisme entre les C^*- modules $E \otimes_{C(M)} \Psi_0^*(G)$ et $E' \otimes_{C(M)} \Psi_0^*(G)$. La suite exacte précédente montre que c'est un quasiisomorphisme de $C^*(G)$ qui définit un élément $[Ind(\sigma)] \in K_0(C^*(G))$.

Définition 2.3. L'indice analytique est le morphisme :

$$\begin{array}{rccc} Ind_a : & K_0(T^*F) & \to & K_0(C^*(G)) \\ & [\sigma] & \to & [Ind(\sigma)]. \end{array}$$

Remarque . De même on a $Ind_a : K_1(T^*F) \to K_1(C^*(G))$.

3. Groupoïde tangent et indice analytique.

Soit X une variété C^∞ et X^0 une sous-variété fermée. On peut considérer $N_{X^0}^X$ le fibré normal à X^0 dans X, et $M_{X^0}^X = X \times]0,1] \cup N_{X^0}^X \times \{0\}$ la déformation au cône normal de X^0 dans X telle qu'elle est définie dans [6], 3.1.

Proposition 3.1. *Soit G un groupoïde de Lie, $M_{G^{(0)}}^G$ est naturellement muni d'une structure de groupoïde de Lie de diagonale $G^{(0)} \times [0,1]$.*

Preuve. La structure de groupoïde est évidente. Quitte à considérer le cas du double de G, on peut supposer que G est sans bord. Vérifions qu'elle est C^∞; pour cela nous utilisons le lemme élémentaire suivant :

Lemme 3.1. *Soit X (resp. Y) une variété C^∞ et X^0 (resp. Y^0) une sous-variété fermée de X (resp. Y). Soit $f : X \to Y$ une application C^∞ telle que $f(X^0) \subset Y^0$. L'application induite $\widetilde{f} : M^X_{X^0} \to M^Y_{Y^0}$ est C^∞.*

Si f désigne l'application inverse de G dans G, $f(G^{(0)}) \subset G^{(0)}$; donc f induit $\widetilde{f} : M^G_{G^{(0)}} \to M^G_{G^{(0)}}$ de classe C^∞ qui est l'inversion du groupoïde. De même, soit $m : G^2 \to G$ le produit. Alors $m(G^{(0)}) \subset G^{(0)}$; donc m induit $\widetilde{m} : (M^G_{G^{(0)}})^2 \sim M^{G^2}_{G^{(0)}} \to M^G_{G^{(0)}}$ de classe C^∞ qui est le produit du groupoïde. □

Nous applerons groupoïde tangent de G et noterons G_T la variété $M^G_{G^{(0)}}$ munie de sa structure de groupoïde de Lie.

Remarque . La construction est fonctorielle: tout morphisme de groupoïdes induit un morphisme naturel au niveau des groupoïdes tangents.

Puisque TF est un groupoïde moyennable et puisque par transformation de Fourier $C^*(TF) \sim C_0(T^*F)$, on a la suite exacte suivante (où ev_t est l'évaluation en t relativement au paramètre de l'intervalle [0,1]) :

$$0 \to C^*(G) \otimes C_0(]0,1]) \to C^*(G_T) \overset{ev_0}{\to} C_0(T^*F) \to 0.$$

Soit $\rho = ev_{1,*} \circ ev_{0,*}^{-1} : K^0(T^*F) \to K_0(C^*(G))$.

En d'autres termes, ρ est le morphisme de K-théorie associé au morphisme asymptotique de $C^*(TF) \to C^*(G)$ défini par $C^*(G_T)$ (*cf.* [4]).

A l'aide du calcul pseudodifférentiel sur G_T on déduit le théorème suivant :

Théorème 3.1. *$\rho = Ind_a$ où Ind_a est l'indice analytique d'Atiyah et Singer.*

Nous pouvons ainsi définir l'indice analytique sans écrire aucun opérateur pseudodifférentiel. Une autre méthode utilisée est de considérer la flèche de bord induite par la suite exacte du théorème 2.1. Notre méthode présente plusieurs avantages :

1. Il est plus aisé de travailler sur des C^*-algèbres de groupoïdes que sur des algèbres d'opérateurs pseudodifférentiels.
2. L'indice analytique s'obtient a partir de morphismes de C^*-algèbres et non à partir d'une flèche de bord, plus difficile à calculer.
3. En caractéristique d'Euler non-nulle, le morphisme de $K_1(S^*F)$ vers $K_0(T^*F)$ n'est pas toujours surjectif.

Exemple: dans le cas d'une variété à bord, on retrouve l'essentiel des résultats de [7]. Le b-calcul pseudodifférentiel est donné par le groupoïde suivant. En considérant le groupoïde tangent associé au groupoïde du bord, on obtient l'indice analytique.

Définissons un groupoïde par le recollement des groupoïdes suivants :

$$G_1 = \mathring{M} \times \mathring{M},\ G_1^{(0)} = \mathring{M};$$

$$G_2 = \partial M \times \partial M \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_*^+,\ G_2^{(0)} = \partial M \times \mathbb{R}_+.$$

Les applications source et but, et la composition sont définies de façon usuelle sur G_1, et ainsi sur G_2 :

$$\begin{cases} r(x,y,t,u) = (x,tu) \\ s(x,y,t,u) = (y,t) \\ (x,y,t,u)\circ(y,z,t',u') = (x,z,t',uu') \end{cases}$$

Ces groupoïdes sont différentiables, et se recollent. A l'aide d'un voisinage collier du bord, on peut identifier $\partial M \times \mathbb{R}_+$ à un ouvert Ω de M contenant ∂M. On recolle alors les groupoïdes au niveau de $\partial M \times \mathbb{R}_+^* \overset{\varphi}{\simeq} \Omega \cap \overset{\circ}{M}$ par :

$$\begin{array}{ccc} \partial M \times \partial M \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & \to & \Omega \cap \overset{\circ}{M} \times \Omega \cap \overset{\circ}{M} \\ (x,y,\xi,\eta) & \to & (\varphi(x,\xi), \varphi(y,\xi\eta)). \end{array}$$

Le groupoïde G constitué de la réunion des groupoïdes de Lie G_1 et G_2 est lui-même un groupoïde de Lie.

L'indice analytique $\mathbb{R}$-équivariant s'obtient en considérant G_2.

Remarque . Lors de la préparation de cette note, nous avons appris que V. Nistor, A. Weinstein et P. Xu ont indépendamment construit un calcul pseudodifférentiel sur les groupoïdes, et montré que le groupoïde précédent induit le b-calculus de R. Melrose.

Remerciements Nous remercions vivement A. Connes, M. Pimsner et G. Skandalis pour les discussions fructueuses échangées avec eux.

Références

[1] M. F. Atiyah et I. M. Singer, The index of elliptic operators, I, *Annals of Math.* **87** (1968), pages 484–530.
[2] A. Connes, Sur la theorie non commutative de l'integration.
[3] ——, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, Inc., 1994.
[4] A. Connes et N. Higson, Deformations, morphismes asymptotiques et K-theorie bivariante. (Deformations, asymptotic morphisms and bivariant K-theory).
[5] A. Connes et G. Skandalis, The Longitudinal Index Theorem for Foliations, *Pub. of Research Institute for Math. Sc.* **20, N. 6** (1984), pages 1139–1183.
[6] M. Hilsum et G. Skandalis, Morphismes K-orientés d'espaces de feuilles et fonctorialité en théorie de Kasparov, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* **4è série, t.20** (1987), pages 325–390.
[7] R. B. Melrose et V. Nistor, K-theory of b-pseudodifferential operators and an $\mathbb{R}^k$-equivariant index theorem, *Preprint.*
[8] F. Pierrot, Mémoire de magistère, *École Normale Supérieure*, Novembre 96.
[9] J. Renault, *A Groupoid Approach to C^*-Algebras*, *Lecture Notes in Mathematics* volume 793, Springer-Verlag, 1980.