CC 3

Jeudi 14 décembre 2023 (1h)

Cours. **1.** Énoncer le thérème de Dirichlet.
2. Soit f une fonction continue par morceaux et 2π-périodique. Donner l'une des versions (exponentielle ou trigonométrique) de l'identité de Parseval.
3. Soit f une fonction de classe C^1 et 2π-périodique. Montrer que les coefficients de Fourier exponentiels de f vérifient :

$$c_n(f) = \underset{n\to\pm\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{|n|}\right).$$

Exercice 1. On considère la fonction f paire et 2π-périodique telle que $f(x) = x(\pi - x)$ pour $x \in [0, \pi]$.
1. Dessiner l'allure du graphe de f entre -3π et 3π.
2. Montrer que f est continue et C^1 par morceaux.
3. Calculer les coefficients trigonométriques de f et en déduire que la série de Fourier de f est donnée par

$$S(f) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{\substack{n=2 \\ n \text{ pair}}}^{\infty} \frac{4\cos(nx)}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{k^2}.$$

4. Que peut-on dire de la convergence de cette série de Fourier ?
5. Calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.
6. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$.
7. Aurait-on pu deviner avant calcul que la série de Fourier de f ne contenait que des termes en $\cos(nx)$ pour n pair ?

Exercice 2. Retrouver via les séries de Fourier l'ensemble des solutions 2π-périodiques et de classe C^1 à l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = e^{ix} f(x).$$

Corrigé

Cours. 6 points

Exercice 1. 14 points

1.

2. La restriction de f à l'intervalle $[0, \pi]$ est de classe C^1. Par parité, c'est aussi le cas de la restriction de f à $[-\pi, 0]$. Puis, par 2π-périodicité, la restriction de f à $[k\pi, (k+1)\pi]$ est de classe C^1 pour tout k. Cela prouve que f est C^1 par morceaux. Il reste à montrer qu'elle est continue en $k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Par 2π-périodicité, il suffit de montrer qu'elle est continue en 0 et en π. Par parité on a $f(-h) = f(h)$ pour tout $h \in [0, \pi]$, on en déduit que f est nécessairement continue en 0. En utilisant la périodicité et la parité de f on obtient

$$\lim_{h \to 0^+} f(\pi + h) = \lim_{h \to 0^+} f(-\pi + h) = \lim_{h \to 0^+} f(\pi - h) = f(\pi).$$

Cela prouve que f est continue en π. On en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Comme la fonction f est paire, on a $b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour les $a_n(f)$ on a d'une part

$$a_0(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (x\pi - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2\pi}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{3}.$$

D'autre part, pour $n \in \mathbb{N}^*$ on obtient par une double intégration par parties

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (x\pi - x^2)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi} \left[(x\pi - x^2)\frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^\pi - \frac{2}{\pi n} \int_0^\pi (\pi - 2x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{2}{\pi n} \int_0^\pi (\pi - 2x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{2}{\pi n} \left[(\pi - 2x)\frac{-\cos(nx)}{n} \right]_0^\pi - \frac{2}{\pi n^2} \int_0^\pi (-2)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2\big((-1)^{n+1} - 1\big)}{n^2} + \frac{4}{\pi n^2} \left[\frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^\pi \\
&= \frac{2\big((-1)^{n+1} - 1\big)}{n^2} \\
&= \begin{cases} -\frac{4}{n^2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}
\end{aligned}$$

En faisant le changement d'indice $n = 2k$ pour n pair, on obtient

$$\begin{aligned}
S(f)(x) &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\cos(nx) \\
&= \frac{\pi^2}{6} - \sum_{\substack{n=2 \\ n\text{pair}}}^{\infty} \frac{4}{n^2}\cos(nx) \\
&= \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\cos(2kx)}{4k^2} \\
&= \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{k^2}.
\end{aligned}$$

Cela donne bien les égalités demandées.

4. Comme f est continue et C^1 par morceaux, $S(f)$ converge normalement vers f.

5. En évaluant l'égalité $S(f)(x) = f(x)$ en $x = 0$ on obtient

$$0 = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

d'où

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

6. Par l'égalité de Parseval on a

$$\frac{a_0(f)^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(f)}{2} = \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \,\mathrm{d}x.$$

On calcule d'une part

$$\frac{a_0(f)^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(f)}{2} = \frac{\left(\frac{\pi^2}{3}\right)^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{n=2 \\ n \text{ pair}}}^{\infty} \frac{16}{n^4} = \frac{\pi^4}{36} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}.$$

Et d'autre part

$$\begin{aligned}
\|f\|^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2(\pi - x)^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (x^2\pi^2 - 2x^3\pi + x^4) \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi^2 x^3}{3} - \frac{x^4\pi}{2} + \frac{x^5}{5}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{\pi^4}{30}.
\end{aligned}$$

Ainsi on a bien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = 2\left(\frac{\pi^4}{30} - \frac{\pi^4}{36}\right) = \frac{\pi^4}{90}.$$

7. On observe que f est en fait π-périodique. En effet, pour $x \in [0, \pi]$ on a

$$f(x - \pi) = (x - \pi)^2 x^2 = f(x),$$

et on conclut par 2π-périodicité. Or le développement en série de Fourier d'une fonction paire et T-périodique (avec $T > 0$) est de la forme

$$\frac{\tilde{a}_0(f)}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_j(f) \cos\left(\frac{2\pi j x}{T}\right).$$

D'où la conclusion avec $T = \pi$.

Exercice 2. 4 points

On suppose que f est solution. Pour $n \in \mathbb{Z}$ on a

$$inc_n(f) = c_n(f') = c_n(e^{ix} f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iy} f(y) e^{-iny} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-i(n-1)y} \, \mathrm{d}t = c_{n-1}(f).$$

Pour $n = 0$ on obtient $c_{-1}(f) = 0$. Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$, on obtient alors

$$c_{-k}(f) = 0.$$

On vient de le voir pour $k = 1$, et si on suppose le résultat acquis jusqu'au rang $k - 1$ ($k \geqslant 2$) alors on a (avec $n = -k + 1 = -(k - 1)$)

$$c_{-k}(f) = i(-k + 1) c_{-k+1} = -i(k - 1) c_{-(k-1)} = 0.$$

D'autre part, on vérifie par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$c_n(f) = \frac{(-i)^n}{n!} c_0(f).$$

C'est clair pour $n = 0$, et si on suppose le résultat acquis au rang $n - 1$ ($n \geqslant 1$) au obtient

$$c_n(f) = \frac{c_{n-1}(f)}{in} = \frac{(-i)^{n-1}}{i} \frac{1}{(n-1)! n} c_0(f) = \frac{(-i)^n}{n!} c_0(f).$$

Ainsi, si on note $\alpha = c_0(f)$, la série de Fourier de f est donnée par

$$S(f)(x) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} e^{inx} = \alpha \exp(-ie^{ix}).$$

Comme f est de classe C^1, elle est égale à sa transformée de Fourier, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \alpha e^{-ie^{ix}}.$$

Inversement, on vérifie que les fonctions de cette forme sont bien de classe C^1 et 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$, et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -ie^{ix} \times i \times f(x) = e^{ix} f(x).$$