Fonctions d'une variable réelle

$\bowtie$

[Chapitre en cours de construction]

1 Préliminaires

1.1 Le corps des réels

Il existe au moins deux façons de construire $\mathbb{R}$ (muni de son addition et de sa multiplication) à partir de $\mathbb{Q}$: par les *coupures de Dedekind* ou par les *suites de Cauchy*. Ce n'est pas l'objet de ce cours, mais n'hésitez pas à aller voir de quoi il s'agit...

Dans tous les cas on obtient l'ensemble des réels, muni de ses opérations usuelles, et les règles de calculs que vous utilisez depuis toujours sont effectivement valables (ouf !).

1.2 Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

Le corps des réels est muni d'une *relation d'ordre totale*. Une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est une partie de $E \times E$. Étant donnés x et y dans E, on dit que x est en relation avec y et on note $x\mathcal{R}y$ si le couple (x, y) appartient à cette partie de $E \times E$.

Le corps $\mathbb{Q}$ est muni d'une relation « est inférieur ou égal à », notée $\leqslant$. C'est une relation d'ordre totale, ce qui signifie que

(i) Pour tout $x \in \mathbb{Q}$ on a $x \leqslant x$.

(ii) Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3$, si $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$ alors $x \leqslant z$.

(iii) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ on a $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$.

Quelle que soit la méthode choisie pour construire $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$, on peut étendre cette relation en une relation d'ordre totale sur $\mathbb{R}$, que l'on notera toujours $\leqslant$. Enfin, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on notera $a < b$ si $a \leqslant b$ et $a \neq b$, $a \geqslant b$ si $b \leqslant a$ et $a > b$ si $b < a$.

1.3 Intervalles de $\mathbb{R}$

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leqslant b$. On note

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqslant x \text{ et } x \leqslant b\}.$$

***Exercice* 1.** Définir de façon analogue $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$, $[a, +\infty[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, b]$ et $]-\infty, b[$.

Julien Royer
Université Paul Sabatier - Toulouse 3
Version du 8 février 2023

Définition 1.1. Soit I une partie de $\mathbb{R}$. On dit que I est un **intervalle** si pour tout $(a, b) \in I^2$ avec $a \leqslant b$ on a $[a, b] \subset I$.

***Exercice* 2.** Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leqslant b$. Montrer que les ensembles $\varnothing$, $[a, b]$, $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$, $[a, +\infty[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, b]$ et $]-\infty, b[$ et $\mathbb{R}$ sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

1.4 Propriété de la borne supérieure

Définition 1.2. Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $a \in R$.

(i) On dit que a est un **majorant** de A si pour tout $x \in A$ on a $x \leqslant a$.

(ii) On dit que a est un **maximum** de A si c'est un élément de A et un majorant pour A.

(iii) On dit que a est un **minorant** de A si pour tout $x \in A$ on a $x \geqslant a$.

(iv) On dit que a est un **minimum** de A si c'est un élément de A et un minorant pour A.

***Exercice* 3.** Donner un exemple de partie de $\mathbb{R}$ qui admet un majorant mais pas de maximum.

***Exercice* 4.** On considère l'intervalle $I =]-1, 1]$
1. L'ensemble I admet-il un maximum ? Un minimum ?
2. Donner l'ensemble des majorants et l'ensemble des minorants de I.
3. L'ensemble des majorants de I admet-il un minimum ? L'ensemble des minorants de I admet-il un maximum ?

Définition 1.3. Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

(i) On dit que A est **majorée** si elle admet un majorant.

(ii) On dit que A est **minorée** si elle admet un minorant.

(iii) On dit que A est **bornée** si elle est minorée et majorée.

***Exercice* 5.** Parmi les intervalles de l'exercice 2, lesquels sont majorés, minorés, bornés ?

Proposition-Définition 1.4. Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

(i) Si A est majorée, alors l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément, appelé **borne supérieure** de A et noté $\sup(A)$.

(ii) Si A est minorée, alors l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément, appelé **borne inférieure** de A et noté $\inf(A)$.

Puisqu'on n'a pas explicité la construction de $\mathbb{R}$, on ne démontrera pas ces propriétés ici.

***Exercice* 6.** Déterminer les éventuelles bornes supérieures et inférieures des parties de $\mathbb{R}$ suivantes :

$$[-1, 1[, \quad \mathbb{Z}, \quad]0, +\infty[, \quad \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}, \quad \left\{q \in \mathbb{Q} \,|\, q \leqslant 0 \text{ ou } q^2 \leqslant 2\right\}.$$

***Exercice* 7.** Montrer que si A est une partie de $\mathbb{R}$ qui admet un maximum, alors on a $\sup(A) = \max(A)$. De même, si A admet un minimum, alors $\inf(A) = \min(A)$.

⚠ On a vu qu'une partie majorée de $\mathbb{R}$ admet toujours une borne supérieure, alors qu'elle peut avoir ou ne pas avoir un maximum.

1.5 Topologie de $\mathbb{R}$

Définition 1.5. Soient V une partie de $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. On dit que V est un voisinage de x s'il existe $\delta > 0$ tel que $]x-\delta, x+\delta[\subset V$.

Soit $P(x)$ une propriété dépendant de $x \in \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que la propriété P est vraie au voisinage de x_0 s'il existe $\delta > 0$ tel que $P(x)$ est vraie pour tout $x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$.

Définition 1.6. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A est un ouvert de $\mathbb{R}$ si c'est un voisinage de chacun de ses points. Autrement dit :

$$\forall a \in A, \exists \delta > 0, \quad]a-\delta, a+\delta[\subset A.$$

***Exercice* 8.** Montrer que $]-1,1[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Montrer que $]-1,1]$, $[-1,1[$ et $[-1,1]$ ne sont pas des ouverts de $\mathbb{R}$.

Définition 1.7. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A est un fermé de $\mathbb{R}$ si $\mathbb{R}\backslash A$ est ouvert.

***Exercice* 9.** Parmi les ensembles $]-1,1[$, $]-1,1]$, $[-1,1[$ et $[-1,1]$, lesquels sont des fermés de $\mathbb{R}$?

⚠ « fermé » n'est pas la négation de « ouvert ». En effet, les ensembles $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont *à la fois ouverts et fermés*, tandis que l'intervalle $[-1,1[$ n'est *ni ouvert ni fermé*

Proposition-Définition 1.8. Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

(i) On appelle **adhérence** de A et on note $\overline{A}$ le plus petit (pour l'inclusion) fermé de $\mathbb{R}$ contenant A.

(ii) On appelle **intérieur** de A et on note $\mathring{A}$ le plus grand (pour l'inclusion) ouvert de $\mathbb{R}$ contenant A.

Exemples 1.9. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.

A	$\emptyset$	$[a,b]$	$[a,b[$	$]a,b]$	$]a,b[$	$[a,+\infty[$	$]a,+\infty[$	$]-\infty,b]$	$]-\infty,b[$	$\mathbb{R}$
$\mathring{A}$	$\emptyset$	$]a,b[$	$]a,b[$	$]a,b[$	$]a,b[$	$]a,+\infty[$	$]a,+\infty[$	$]-\infty,b[$	$]-\infty,b[$	$\mathbb{R}$
$\overline{A}$	$\emptyset$	$[a,b]$	$[a,b]$	$[a,b]$	$[a,b]$	$[a,+\infty[$	$[a,+\infty[$	$]-\infty,b]$	$]-\infty,b]$	$\mathbb{R}$

Proposition 1.10. *Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $a \in \overline{A}$. On a*

$$\forall \delta > 0, \quad A \cap]a-\delta, a+\delta[\neq \emptyset.$$

1.6 Fonctions d'une variable réelle

Définition 1.11. Une **fonction d'une variable réelle** est une fonction dont l'ensemble de départ, appelé **domaine de définition** de la fonction, est une partie de $\mathbb{R}$. Sauf mention contraire, les fonctions d'une variable réelle considérées ici seront également à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Le graphe d'une fonction d'une variable réelle est donc une partie de $\mathbb{R}^2$.

***Exercice* 10.** Vérifier que les fonctions suivantes sont bien définies, et dessiner leurs graphes.

$$f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right., \quad f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right., \quad f_3 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Définition 1.12. Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction de D dans $\mathbb{R}$. On dit que f est majorée/minorée/bornée si son image $f(D)$ est une partie majorée/minorée/bornée de $\mathbb{R}$. Autrement dit :

— f est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \leqslant M$ pour tout $x \in D$,

— f est **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \geqslant m$ pour tout $x \in D$,

— f est **bornée** si elle est minorée et majorée, c'est-à-dire s'il existe $M \geqslant 0$ tel que $|f(x)| \leqslant M$ pour tout $x \in \Delta$,

***Exercice* 11.** Les fonctions suivantes sont-elles minorées ? majorées ? bornées ?

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right. \qquad g : \left\{ \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$$

Définition 1.13. (i) On dit que f est croissante si pour tout $(x_1, x_2) \in I^2$,

$$x_1 \leqslant x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \leqslant f(x_2).$$

(ii) On dit que f est strictement croissante si pour tout $(x_1, x_2) \in I^2$,

$$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$

(iii) On dit que f est croissante si pour tout $(x_1, x_2) \in I^2$,

$$x_1 \geqslant x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \geqslant f(x_2).$$

(iv) On dit que f est strictement croissante si pour tout $(x_1, x_2) \in I^2$,

$$x_1 > x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) > f(x_2).$$

(v) On dit que f est (strictement) monotone si elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante.

2 Limites

Soit D une union d'intervalles non triviaux (non vides, non réduits à un point) de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction de D dans $\mathbb{R}$.

2.1 Définitions

Définition 2.1. Soient $a \in \overline{D}$ et $l \in \mathbb{R}$. On dit que f tend vers l en a et on note

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$$

si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, \quad |x - a| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon.$$

Exemple 2.2. Soit $x_0 > 0$. On montre que

$$\sqrt{x} \xrightarrow[x \to 4]{} 2.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On note $\delta = \varepsilon\sqrt{x_0}$. Alors pour tout $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap \mathbb{R}_+^*$ on a

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{2}\right| = \frac{|x - 4|}{\sqrt{x} + 2} \leqslant \frac{\delta}{2} = \varepsilon.$$

D'où le résultat.

Exemple 2.3. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$. On montre que

$$\frac{1}{x} \xrightarrow[x \to x_0]{} \frac{1}{x_0}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On note $\delta = \min(|x_0|/2, \varepsilon x_0^2/2)$. Alors pour $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ on a $|x| \geqslant |x_0|/2$ et

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \frac{|x_0 - x|}{|x|\,|x_0|} \leqslant \frac{2\delta}{x_0^2} \leqslant \varepsilon.$$

D'où le résultat.

Exemple 2.4. On considère sur $\mathbb{R}$ la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Montrons que f n'admet pas de limite en 0. On suppose par l'absurde que f admet une limite en 0. On la note ℓ. Alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [-\delta, \delta]$ on a

$$|f(x) - \ell| \leqslant \frac{1}{4}.$$

C'est en particulier valable en $-\delta$ et en δ, donc par l'inégalité triangulaire :

$$1 = |f(\delta) - f(-\delta)| = |(f(\delta) - \ell) + (\ell - f(-\delta))| \leqslant |f(\delta) - \ell| + |f(-\delta) - \ell| \leqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

D'où la contradiction. D'où le résultat par l'absurde.

Définition 2.5. On suppose que D contient $]a, +\infty[$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$. Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que f tend vers l en $+\infty$ et on note

$$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} l$$

si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > a, \forall x \geqslant A, \quad |f(x) - l| \leqslant \varepsilon.$$

On définit de la même façon la limite en $-\infty$.

Exemple 2.6. Pour $x \in \mathbb{R}_+$ on note $f(x) = \frac{x}{1+x}$. Montrons que $f(x)$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $A \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$. Pour $x \geqslant A$ on a

$$\left|\frac{x}{1+x} - 1\right| = \frac{1}{1+x} \leqslant \frac{1}{1+A} \leqslant \frac{1}{A} = \varepsilon.$$

D'où le résultat.

Définition 2.7. Soit $a \in \overline{D}$. On dit que f tend vers $+\infty$ en a si

$$\forall M \geqslant 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, \quad |x - a| \leqslant \delta \Longrightarrow f(x) \geqslant M.$$

On a une définition analogue pour une limite $-\infty$.

Exemple 2.8. On considère sur $\mathbb{R}^*$ la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$. Soit $M \geqslant 0$. On note $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$. Alors pour $x \in \mathbb{R}^* \cap [-\delta, \delta]$ on a

$$\frac{1}{x^2} \geqslant \frac{1}{\delta^2} = M.$$

Cela prouve que f tend vers $+\infty$ en 0.

***Exercice* 12.** Définir le fait que f tend vers $\pm\infty$ en $\pm\infty$.

Remarque 2.9. On dit que f admet une limite en $a \in \overline{D}$ ou en $\pm\infty$ si f admet une limite finie.

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l \quad : \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, \quad |x - a| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon \tag{2.1}$$

$$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} l \quad : \quad \forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in D, \quad x \geqslant A \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon \tag{2.2}$$

$$f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} l \quad : \quad \forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in D, \quad x \leqslant B \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon \tag{2.3}$$

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty \quad : \quad \forall M \geqslant 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, \quad |x - a| \leqslant \delta \Longrightarrow f(x) \geqslant M \tag{2.4}$$

$$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \quad : \quad \forall M \geqslant 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in D, \quad x \geqslant A \Longrightarrow f(x) \geqslant M \tag{2.5}$$

$$f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty \quad : \quad \forall M \geqslant 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in D, \quad x \leqslant B \Longrightarrow f(x) \geqslant M \tag{2.6}$$

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty \quad : \quad \forall M \geqslant 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, \quad |x - a| \leqslant \delta \Longrightarrow f(x) \leqslant -M \tag{2.7}$$

$$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty \quad : \quad \forall M \geqslant 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in D, \quad x \geqslant A \Longrightarrow f(x) \leqslant -M \tag{2.8}$$

$$f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty \quad : \quad \forall M \geqslant 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in D, \quad x \leqslant B \Longrightarrow f(x) \leqslant -M \tag{2.9}$$

Remarque 2.10. Soit $a \in \overline{D}$ (ou $a = +\infty$, ou $a = -\infty$). Si f admet une limite en a on la note

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

(x est ici une variable muette).

Définition 2.11. Soit $a \in \overline{D}$. On suppose que $D \cap]a, +\infty[\neq \emptyset$. On dit que la fonction f admet une limite l à droite en a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in]a, a + \delta] \cap D, \quad |f(x) - l| \leqslant \varepsilon.$$

Dans ce cas on écrit

$$f(x) \xrightarrow[x \to a^+]{} l \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x > a}]{} l.$$

On définit de la même façon la limite à gauche.

Exemple 2.12. La fonction partie entière admet une limite à gauche et une limite à droite en tout point.

2.2 Propriétés qualitatives d'une fonction admettant une limite

Proposition 2.13. *Soit $a \in \overline{D}$. On suppose que f admet une limite (finie) en a. Alors il existe une voisinage V de a tel que f est bornée sur $D \cap V$.*

On a des résultats analogues en remplaçant a par $+\infty$ ou $-\infty$.

Démonstration. Soit $l \in \mathbb{R}$ la limite de f en a. Alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D \cap [x - \delta, x + \delta]$ on a $|f(x) - l| \leqslant 1$. Pour un tel x on a alors par l'inégalité triangulaire

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - l| + |l| \leqslant 1 + |l|.$$

D'où le résultat. □

Proposition 2.14. *Soit $a \in \overline{D}$.*

(i) On suppose que f tend vers une limite strictement positive ou vers $+\infty$ en a. Alors il existe un voisinage V de a tel que $f(x) > 0$ pour tout $x \in D \cap V$.

(ii) On suppose que f tend vers une limite strictement négative ou vers $-\infty$ en a. Alors il existe un voisinage V de a tel que $f(x) < 0$ pour tout $x \in D \cap V$.

On a des résultats analogues en remplaçant a par $+\infty$ ou $-\infty$.

Démonstration. □

2.3 Opérations sur les limites

Proposition 2.15. *Soient f et g deux fonctions sur D. Soit $a \in \overline{D}$. Soient $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$. On suppose que*

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l_1 \quad \text{et} \quad g(x) \xrightarrow[x \to a]{} l_2.$$

Alors on a

$$f(x) + g(x) \xrightarrow[x \to a]{} l_1 + l_2.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour $x \in D \cap [a - \delta, a + \delta]$ on a $|f(x) - l_1| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. De même, il existe $\delta_2 > 0$ tel que pour $x \in D \cap [a - \delta, a + \delta]$ on a $|g(x) - l_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. On note $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Pour $x \in D \cap [x - \delta, x + \delta]$ on a alors par l'inégalité triangulaire

$$|(f(x) + g(x)) - (l_1 + l_2)| \leqslant |f(x) - l_1| + |g(x) - l_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Cela prouve que $f + g$ tend vers $l_1 + l_2$ en a. □

On a des résultats analogues en remplaçant a par $+\infty$ ou $-\infty$.

Proposition 2.16. *Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{I}$. On suppose que f est bornée*[1] *et que g tend vers 0 en a. Alors fg tend vers 0 en a.*

Démonstration. □

Exemple 2.17. On a

$$x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x \to 0]{} 0.$$

1. au moins au voisinage de a

Proposition 2.18. *Soient f et g deux fonctions sur D. Soit $a \in \overline{D}$. Soient $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$. On suppose que*

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l_1 \quad et \quad g(x) \xrightarrow[x \to a]{} l_2.$$

Alors on a

$$f(x)g(x) \xrightarrow[x \to a]{} l_1 l_2.$$

Démonstration. Pour tout $x \in D$ on a

$$f(x)g(x) - l_1 l_2 = f(x)(g(x) - l_2) + (f(x) - l_1)l_2.$$

La fonction f admet une limite en a, et est donc bornée au voisinage de a. En outre les fonctions $g - l_2$ et $f - l_1$ tendent vers 0 en a. On en déduit que

$$f(x)g(x) - l_1 l_2 \xrightarrow[x \to a]{} 0.$$

D'où le résultat. □

Proposition 2.19. *Soient D_1 et D_2 deux intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$. Soient f une fonction de D_1 dans D_2 et g une fonction de D_2 dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{D_1}$. On suppose que f tend vers $b \in \overline{D_2}$ quand x tend vers a et que g tend vers $l \in \mathbb{R}$ en b. Alors on a*

$$g(f(x)) \xrightarrow[x \to a]{} l.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in J \cap [b - \delta, b + \delta]$ on a $|g(y) - l| \leqslant \varepsilon$. Il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in [a - \eta, a + \eta]$ on a $|f(x) - b| \leqslant \delta$. Comme on a toujours $f(x) \in J$, on a donc $f(x) \in J \cap [b - \delta, b + \delta]$. Ainsi pour $x \in D \cap [a - \delta, a + \delta]$ on a

$$|g(f(x)) - l| \leqslant \varepsilon.$$

D'où le résultat. □

On a des résultats analogues en remplaçant b et/ou l par $+\infty$ et $-\infty$.

Corollaire 2.20. *Soit $a \in \overline{D}$. Soit $l \in \mathbb{R}^*$. On suppose que*

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l.$$

Alors f est non nulle au voisinage de a et on a

$$\frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x \to a]{} \frac{1}{l}.$$

Démonstration. Puisque f tend vers une limite non nulle en a, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D \cap [a - \delta, a + \delta]$ on a $f(x) \neq 0$. La fonction $1/f$ est alors bien définie sur $D \cap [a - \delta, a + \delta]$. Pour montrer qu'elle tend bien vers $1/l$ en a il suffit alors d'appliquer le résultat de composition des limites à f et la fonction inverse (vue à l'exemple. □

Proposition 2.21. *Soit $a \in \mathring{D}$ et f une fonction définie de $D \setminus \{a\}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f admet une limite $l_g \in \mathbb{R}$ à gauche et une limite l_d à droite en a. Alors f admet une limite en a si et seulement si $l_g = l_d$ et dans ce cas cette limite est la valeur commune de l_g et l_d.*

Exemple 2.22. La fonction $x \mapsto \frac{x+2|x|}{x}$ n'admet pas de limite en 0.

2.4 Limites et relation d'ordre

Proposition 2.23. *Soient $a \in \overline{D}$. On suppose que $f \geqslant 0$ (au voisinage de a) et tend vers une limite $l \in \mathbb{R}$ en a. Alors $l \geqslant 0$.*

On a des résultats analogues pour f négative, et/ou en remplaçant a par $+\infty$ ou $-\infty$.

Démonstration. On suppose par l'absurde que $l < 0$. D'après la proposition 2.14 on a $f < 0$ au voisinage de a, ce qui contredit l'hypothèse. D'où le résultat. $\square$

Corollaire 2.24 (Compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre)**.** *Soient f et g deux fonctions de D dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{D}$. On suppose que pour $x \in D$ (au voisinage de a) on a*

$$f(x) \leqslant g(x).$$

On suppose de plus que

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l_1 \quad et \quad g(x) \xrightarrow[x \to a]{} l_2,$$

avec $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$. Alors on a $l_1 \leqslant l_2$.

Démonstration. On applique la proposition précédente à $g - f$. $\square$

Corollaire 2.25. *Soient $a \in \overline{D}$ et $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$. On suppose que*

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l_1 \quad et \quad f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l_2.$$

Alors $l_1 = l_2$.

Démonstration. On a

$$f(x) - f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l_1 - l_2$$

Or pour tout $x \in D$ on a $f(x) - f(x) \geqslant 0$, donc $l_1 - l_2 \geqslant 0$. De même $l_1 - l_2 \leqslant 0$, d'où $l_1 = l_2$. $\square$

Proposition 2.26 (Théorème des gendarmes)**.** *(i) Soient f, g et h trois fonctions de D dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{D}$. On suppose que pour x au voisinage de a on a*

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x).$$

On suppose de plus que $f(x)$ et $h(x)$ tendent vers la même limite $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers a. Alors $g(x)$ tend vers l quand x tend vers a.

(ii) Soient f et g deux fonctions de D dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{D}$. On suppose que pour x au voisinage de a on a

$$f(x) \geqslant g(x).$$

On suppose de plus que $g(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a. Alors $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a.

(iii) On a des résultats analogues pour des fonctions qui tendent vers $-\infty$, ainsi que pour des limites en $-\infty$ et $+\infty$.

Démonstration. On montre la première propriété. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que pour $x \in [a-\delta, a+\delta] \cap D$ on a

$$f(x) \geqslant l - \varepsilon \quad \text{et} \quad h(x) \leqslant l + \varepsilon.$$

Quitte à réduire δ on a alors

$$l - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \leqslant l + \varepsilon.$$

Cela prouve que g tend vers l en a. □

2.5 Exercices

***Exercice* 13.** **1.** Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$x \xrightarrow[x \to x_0]{} x_0, \qquad x^2 \xrightarrow[x \to x_0]{} x_0^2 \qquad \text{et} \qquad 1 - \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1.$$

2. Montrer que l'application $x \mapsto \cos(x)$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

***Exercice* 14.** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$ et $l \in \mathbb{R}$.
1. Montrer que f tend vers l en a si et seulement si l'une des assertions suivantes est vérifiée :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, \quad |x-a| \leqslant \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon \tag{2.10}$$
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, \quad |x-a| \leqslant \delta \implies |f(x) - l| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.11}$$
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, \quad |x-a| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon \tag{2.12}$$

2. Montrer que ce n'est pas le cas avec les assertions suivantes :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \geqslant 0, \forall x \in I, \quad |x-a| \leqslant \delta \implies |f(x) - l| \leqslant \varepsilon \tag{2.13}$$
$$\forall \varepsilon \geqslant 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, \quad |x-a| \leqslant \delta \implies |f(x) - l| \leqslant \varepsilon \tag{2.14}$$

***Exercice* 15.** Soit $\alpha > 0$. Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction qui tend vers α en 0. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) > 0$ pour tout $x \in]0, \delta[$.

***Exercice* 16.** Étudier l'existence et, le cas échéant, la valeur des limites suivantes :

$$\textbf{1.}\ \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^5 + 4x^3 + x^2}{-3x^2 + 50x} \qquad \textbf{2.}\ \lim_{x \to 0} \frac{4x^5 + 4x^3 + x^2}{-3x^2 + 50x} \qquad \textbf{3.}\ \lim_{x \to 3} \frac{4x^5 + 4x^3 + x^2}{-3x^2 + 50x}$$

$$\textbf{4.}\ \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 1}{x^3 + 4x^2 + x} \qquad \textbf{5.}\ \lim_{x \to 8} \frac{1}{x - 8} \qquad \textbf{6.}\ \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + |x|}{x}$$

$$\textbf{7.}\ \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x+3} - \sqrt{x+2} \qquad \textbf{8.}\ \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x}$$

***Exercice* 17.** On note E la fonction qui à un réel x associe sa partie entière ($E(x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x).
1. Étudier les limites éventuelles de E en 0, $+\infty$ et $-\infty$.
2. Étudier la limite éventuelle en 0 de la fonction $x \mapsto xE\left(\frac{1}{x}\right)$.

***Exercice* 18.** Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ et deux fonctions ε_1 et ε_2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tels que ε_1 et ε_2 tendent vers 0 en 0 et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + x^2 \varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + x^2 \varepsilon_2(x).$$

1. Montrer qu'il existe $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ et une fonction ε de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui tend vers 0 en 0 tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$(f+g)(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + x^2 \varepsilon(x)$$

2. Même question en remplaçant $f + g$ par fg.

***Exercice* 19.** Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction qui tend vers 0 en 0 tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + x^2 \varepsilon(x).$$

1. On suppose que $a_0 \neq 0$. Montrer qu'il existe $\nu > 0$ tel que pour tout $x \in [-\nu, \nu]$, $f(x)$ a même signe que a_0.
2. On suppose que $a_0 = 0$ et $a_1 \neq 0$. Montrer qu'il existe $\nu > 0$ tel que pour tout $x \in [-\nu, \nu]$, $f(x)$ a même signe que $a_1 x$.
3. On suppose que $a_0 = a_1 = 0$ et $a_2 \neq 0$. Montrer qu'il existe $\nu > 0$ tel que pour tout $x \in [-\nu, \nu]$, $f(x)$ a même signe que $a_2 x^2$.
4. Que peut-on dire du signe de f au voisinage de 1 ?

***Exercice* 20.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 1-périodique (*i.e.* $f(x+1) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). On suppose que f admet une limite en $+\infty$. Montrer que f est constante.

3 Continuité

3.1 Définition et premières propriétés

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$.

Définition 3.1. Soit $a \in I$. On dit que f est continue en a si $f(x)$ tend vers $f(a)$ quand x tend vers a. Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I \cap [a - \delta, a + \delta], \quad |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon.$$

Définition 3.2. On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point de I.

Exemples 3.3.
— Les fonctions constantes sont continues sur $\mathbb{R}$.
— L'application identité $x \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$.
— La fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}_+$ (exercice, voir exemple 2.2).
— La fonction inverse est continue sur $\mathbb{R}^*$ (voir exemple 2.3).
— L'application

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

n'est pas continue en 0, et donc par continue sur $\mathbb{R}$ (voir exemple 2.4). Par contre elle est bien continue sur $\mathbb{R}^*$.

Exemple 3.4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Alors f est continue en 0 (voir exemple 2.17).

Proposition 3.5. *Soit $a \in I$. On suppose que f est continue en a. Alors*

(i) *si $f(a) > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [a - \delta, a + \delta] \cap I$ on a $f(x) > 0$,*

(ii) *si $f(a) < 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [a - \delta, a + \delta] \cap I$ on a $f(x) < 0$.*

Proposition 3.6. *Soit g une autre fonction de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que f et g sont continues en a. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.*

1. *La fonction $\lambda f : x \mapsto \lambda f(x)$ est continue en a.*
2. *La fonction $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$ est continue en a.*
3. *La fonction $fg : x \mapsto f(x)g(x)$ est continue en a.*
4. *On suppose de plus que $g(a) \neq 0$. Alors la fonction $\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ est définie au voisinage de a et est continue en a.*

Corollaire 3.7.
1. *Les fonctions polynomiales (c'est-à-dire de la forme $x \mapsto a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ avec $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$) sont continues.*
2. *Soient f et g deux fonctions polynomiales telles que g ne s'annule pas sur I. Alors la fonction rationnelle f/g est continue sur I.*

Proposition 3.8. *Soit g une fonction de J dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x \in I$ on a $f(x) \in J$. Ainsi la fonction $g \circ f$ est bien définie de I dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$. Si f est continue en a et g est continue en $f(a) \in J$, alors $g \circ f$ est continue en a.*

3.2 Fonctions continues sur un intervalle

Théorème 3.9. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(a)f(b) \leqslant 0$ (autrement dit, $f(a)$ et $f(b)$ n'ont pas même signe). Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.*

Idée de démonstration. Si $f(a) = 0$ ou $f(b) = 0$ alors le résultat est clair. On suppose que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ (le cas $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$ est analogue). On note $s \in [a, b]$ le plus petit réel vérifiant la propriété :

$$\forall x \in]s, b], \quad f(x) > 0. \tag{$*$}$$

L'existence de s est le maillon manquant de la démonstration à ce stade, ce sera justifié au S2. On suppose par l'absurde que $f(s) > 0$. Alors $s \neq a$ et il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]s - \delta, s]$ on a $x \in [a, b]$ et $f(x) > 0$. Ainsi $s - \delta$ vérifie la propriété $(*)$, ce qui contredit la définition de s. On suppose maintenant que $f(s) < 0$. Alors $s \neq b$ et il existe $\delta > 0$ tel que $s + \delta \in [a, b]$ et $f(s + \delta) < 0$, ce qui contredit à nouveau la définition de s. Finalement la seule possibilité est que $f(s)$ soit nul. D'où le résultat. $\square$

Corollaire 3.10. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Alors pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$.*

Corollaire 3.11. *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

Théorème 3.12. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Alors f est bornée et atteint ses bornes.*

Puisqu'on sait déjà que l'image de f est un intervalle, cela signifie qu'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ avec $m < M$ et tels que

$$f([a, b]) = \{f(x), x \in [a, b]\} = [m, M].$$

3.3 Exercices

***Exercice* 21.** Soit f une fonction de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est continue sur $[\varepsilon, +\infty[$ pour tout $\varepsilon > 0$.
1. Montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$.
2. À l'aide d'un contre-exemple, montrer que f n'est pas nécessairement continue sur $[0, +\infty[$.

***Exercice* 22.** Soient f_+ et f_- des fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}_-^*$ dans $\mathbb{R}$, respectivement. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$f(x) = \begin{cases} f_+(x) & \text{si } x \geqslant 0, \\ f_-(x) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La fonction f ainsi définie est-elle bien continue ?

***Exercice* 23.** Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
1. Montrer que si f est continue sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $|f|$ (qui à x associe $|f(x)|$) l'est également.
2. Montrer que la réciproque est fausse.

***Exercice* 24.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} = -\infty$. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$.

***Exercice* 25.** Un marcheur parcourt six kilomètres en une heure (il ne marche pas forcément à vitesse constante). Montrer qu'il existe un intervalle de temps d'une demi-heure pendant lequel il marche exactement trois kilomètres.

***Exercice* 26.** Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$ et vers $+\infty$. Montrer que f est minorée et atteint son minimum.

4 Dérivabilité

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$.

4.1 Définitions et premières propriétés

Définition 4.1. Soit $a \in I$. On dit que la fonction f est dérivable au point a si la fonction

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

(bien définie sur $I \setminus \{a\}$) admet une limite (finie) en a. Dans ce cas cette limite est appelée dérivée de f au point a et est notée $f'(a)$.

Définition 4.2. On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I. Dans ce cas la fonction

$$f' : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ a & \mapsto & f'(a) \end{array} \right.$$

est appelée (fonction) dérivée de f.

Exemples 4.3. — Une fonction constante sur I est dérivable sur I de dérivée nulle.
- — La fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée constante égale à 1.
- — Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Alors la fonction $f : x \mapsto x^k$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f' : x \mapsto kx^{k-1}$. En effet pour $x_0 \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$ on a

$$(x_0 + h)^k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j x_0^{k-j} h^j,$$

et donc

$$\frac{(x_0 + h)^k - x_0^k}{h} = \sum_{j=1}^{k} C_k^j x_0^{k-j} h^{j-1} \xrightarrow[h \to 0]{} C_k^{k-1} x_0^{k-1} = k x_0^{k-1}.$$

Proposition 4.4. *Soit $a \in I$. La fonction f est dérivable en a si et seulement si il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a dans I, une fonction $\varepsilon : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ qui tend vers 0 en a et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\forall x \in \mathcal{V}, \quad f(x) = f(a) + (x - a)\lambda + (x - a)\varepsilon(x). \tag{4.1}$$

Dans ce cas on a $f'(a) = \lambda$.

Proposition 4.5. *On suppose que f est dérivable en a et pour $x \in I$ on pose*

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) & \text{si } x \neq a, \\ 0 & \text{si } x = a. \end{cases}$$

Alors ε tend vers 0 quand x tend vers a et vérifie (4.1) par définition. Inversement, supposons qu'il existe $\mathcal{V}$ et $\varepsilon : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ comme dans l'énoncé. Alors on a

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lambda + \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} \lambda.$$

Cela prouve que f est dérivable en a de dérivée $f'(a) = \lambda$.

Proposition 4.6. *Soit $a \in I$. On suppose que f est dérivable en a. Alors f est continue en a.*

Démonstration. D'après (4.1) on a

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + (x - a)\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a).$$

Cela prouve que f est continue en a. □

Remarque 4.7. ⚠ La réciproque n'est pas vraie. Considérer par exemple la fonction $x \mapsto |x|$ qui est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable en 0.

Proposition 4.8. *Soit g une autre fonction de I dans $\mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que f et g sont dérivables en a.*

(i) La fonction $f+g$ est dérivable en a de dérivée $f'(a)+g'(a)$.

(ii) La fonction λf est dérivable en a de dérivée $\lambda f'(a)$.

(iii) La fonction fg est dérivable en a de dérivée $f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$.

(iv) On suppose de plus que $g(a) \neq 0$. Alors la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable en a de dérivée

$$\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{f(a)^2}.$$

Démonstration. (i) Soit $x \in I \setminus \{a\}$. On a

$$\frac{\big(f(x)+g(x)\big)-\big(f(a)+g(a)\big)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} f'(a)+g'(a).$$

Cela prouve que $f+g$ est dérivable en a de dérivée $f'(a)+g'(a)$.
(ii) On a

$$\frac{\lambda f(x)-\lambda f(a)}{x-a} = \lambda\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} \lambda f'(a).$$

Cela prouve que λf est dérivable en a de dérivée $\lambda f'(a)$.
(iii) Comme g est continue en a on a

$$\begin{aligned}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} &= \frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(x) + f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\\ &\xrightarrow[x\to a]{} f'(a)g(a)+f(a)g'(a).\end{aligned}$$

Cela prouve que fg est dérivable en a de dérivée $f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$.
(iv) On montre la dernière propriété pour $f=1$, le cas général s'obtient en écrivant $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$. On a

$$\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(a)}}{x-a} = \frac{\frac{g(a)-g(x)}{x-a}}{g(a)g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} -\frac{g'(a)}{g(a)^2}.$$

Cela prouve que $1/g$ est dérivable en a de dérivée $-1/g(a)^2$. □

Proposition 4.9. *Soit g une fonction définie sur un voisinage J de $f(a)$, dérivable en $f(a)$. Alors la fonction $g \circ f$ est dérivable en a de dérivée*

$$(g\circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Démonstration. D'après la proposition 4.4 il existe une fonction $\varepsilon_1 : I \to \mathbb{R}$ qui tend vers 0 en a et telle que pour $x \in I$ on a

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon_1(x).$$

De même, il existe une fonction $\varepsilon_2 : J \to \mathbb{R}$ qui tend vers 0 en $f(a)$ et telle que pour $y \in J$ on a

$$g(y) = g(f(a)) + (y-f(a))g'(f(a)) + (y-f(a))\varepsilon_2(y).$$

Soit $x \in I$. Avec $y = f(x)$ on obtient

$$\begin{aligned}g(f(x)) &= g(f(a)) + (x-a)f'(a)g'(f(a)) + (x-a)\varepsilon_1(x)g'(f(a))\\ &\quad + (x-a)(f'(a)+\varepsilon_1(x))\varepsilon_2(f(x))\\ &= g(f(a)) + (x-a)f'(a)g'(f(a)) + (x-a)\varepsilon(x),\end{aligned}$$

où

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x)g'(f(a)) + (f'(a)+\varepsilon_1(x))\varepsilon_2(f(x)) \xrightarrow[x\to a]{} 0.$$

D'où le résultat. □

4.2 Application à l'étude d'extremums locaux

Définition 4.10. — On dit que f admet un maximum local en x_0 s'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ on a $f(x) \geqslant f(x_0)$.
- On dit que f admet un minimum local en x_0 s'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ on a $f(x) \leqslant f(x_0)$.
- On dit que f admet un extremum local en x_0 si f admet un minimum ou un maximum local en x_0.

Proposition 4.11. *Soit $x_0 \in \mathring{I}$. On suppose que f est dérivable en x_0 et admet un extremum local en x_0. Alors $f'(x_0) = 0$.*

Démonstration. Il existe $\delta > 0$ tel que $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset I$. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer que f admet un minimum local en x_0. Pour tout $h \in]0, \delta]$ on a

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geqslant 0.$$

Par passage à la limite, on obtient que $f'(x_0) \geqslant 0$. De même pour $h \in [-\delta, 0[$ on a

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leqslant 0,$$

et donc $f'(x_0) \leqslant 0$. Cela prouve que $f'(x_0) = 0$. □

⚠ La conclusion n'est pas vraie si x_0 est au bord de l'intervalle. Par exemple la fonction $x \mapsto x^2$ sur $[0, 1]$ admet un minimum en 0 et un maximum en 1. Il se trouve que la dérivée s'annule en 0 mais pas en 1. Le fait que la dérivée s'annule en 0 est conséquence du fait que la fonction $x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ admet toujours un minimum en 0.

4.3 Accroissements finis

Théorème 4.12 (Théorème de Rolle)**.** *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Démonstration. Si f est constante, alors le résultat est clair : on a $f'(c) = 0$ pour tout $c \in]a, b[$. On suppose maintenant que f n'est pas constante. Quitte à changer f en $-f$, on peut par exemple supposer que f prend des valeurs strictement supérieures à $f(a)$. Comme f est continue sur le segment $[a, b]$, elle atteint son maximum en un point $c \in [a, b]$. Nécessairement, on a $c \in]a, b[$. Par la condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur, on a alors $f'(c) = 0$. □

Théorème 4.13 (Théorème des accroissements finis)**.** *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Démonstration. Pour $t \in [a, b]$ on note

$$g(t) = f(t) - (t - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Cela définit une fonction g continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. En outre on a $g(b) = f(a) = g(a)$. D'après le théorème de Rolle, il existe donc $c \in]a,b[$ tel que

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

D'où le résultat. □

Proposition 4.14. *Soit f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathring{I}$.*

(i) f est constante sur I si et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathring{I}$.

(ii) f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathring{I}$.

(iii) f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in \mathring{I}$.

(iv) Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathring{I}$, alors f est strictement croissante sur I.

(v) Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathring{I}$, alors f est strictement décroissante sur I.

⚠ Les réciproques des deux dernières propriétés sont fausses. Considérer par exemple les fonctions $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto -x^3$ sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. (i) On sait que si f est constante sur I alors sa dérivée est nulle. Inversement, on suppose que f' est nulle sur $\mathring{I}$. Soient $a, b \in I$ avec $a < b$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a,b[\subset \mathring{I}$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) = 0,$$

et donc $f(a) = f(b)$. Cela prouve que f est constante. Les autres propriétés se montrent de façon analogue.

□

Théorème 4.15 (Inégalité des accroissements finis)**.** *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ et dérivable sur $]a,b[$. On suppose qu'il existe $M \geqslant 0$ tel que $|f'(x)| \leqslant M$ pour tout $x \in]a,b[$. Alors on a*

$$|f(b) - f(a)| \leqslant M\,|b - a|\,.$$

Définition 4.16. On dit que F est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et $F' = f$.

Proposition 4.17 (Prolongement d'une dérivée)**.** *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit f une fonction continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$. On suppose que $f'(x)$ tend vers une limite ℓ quand x tend vers a. Alors f est dérivable en a de dérivée $f'(a) = \ell$.*

Démonstration. Soit $x \in I \setminus \{a\}$. Par le théorème des accroissements finis il existe c_x dans $]a,x[$ ou $]x,a[$ (selon si $x > a$ ou $x < a$ tel que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x).$$

Or $c_x \to a$ quand $x \to a$, donc

$$f'(c_x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell.$$

Cela prouve que f est dérivable en a de dérivée $f'(a) = \ell$. □

4.4 Exercices

***Exercice* 27.** Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?
3. La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

***Exercice* 28.** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} xe^x & \text{si } x \leqslant 1, \\ ax + b & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Déterminer a, b pour que f soit dérivable en 1, puis faire l'étude de f et tracer son graphe.

***Exercice* 29.** On considère la fonction définie par $f(x) = \frac{2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}}$.
1. Donner son domaine de définition D_f. La fonction est elle continue ? Dérivable ?
2. Calculer f' et donner le tableau de variation de f.
3. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ a trois solutions dans $\mathbb{R}$.
4. Tracer le graphe de f.

***Exercice* 30.** Soit f une fonction continue de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ et dérivable sur $]0, +\infty[$. On suppose que f' tend vers une limite $l \in \mathbb{R}$ en 0. Montrer que f est dérivable en 0 de dérivée $f'(0) = l$.

***Exercice* 31.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que f tend vers l en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x_0) = 0$.

5 Fonctions strictement monotones

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. On note $J = f(I)$ son image. On rappelle que si f est continue alors J est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Proposition 5.1. *On suppose que $I =]a, b[$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $a < b$. On suppose que f est strictement croissante. Alors f admet une limite (finie ou infinie) en a et en b.*

On a des résultats analogues en $-\infty$ ou en $+\infty$ si l'intervalle I n'est pas borné et/ou si f est décroissante.

Démonstration. On montre que f admet une limite (finie ou $+\infty$) en b. La limite en a est analogue.
• On commence par supposer que f n'est pas majorée. Soit $M \geqslant 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que $b - \delta \in I$ et $f(b - \delta) \geqslant M$. Comme f est croissante on a alors

$$\forall x \in]b - \delta, b[, \quad f(x) \geqslant f(b - \delta) \geqslant M.$$

Cela prouve que f tend vers $+\infty$ en b.

- On suppose maintenant que f est majorée. On note

$$m = \sup \{f(x), x \in]a, b[\}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On a $f(x) \leqslant m + \varepsilon$ pour tout $x \in I$. Comme $m - \varepsilon$ n'est pas un majorant de f, il existe $\delta > 0$ tel que $f(b - \delta) \geqslant m - \varepsilon$. Par croissance, on a alors, pour tout $x \in [b - \delta, b[$,

$$m - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant m \leqslant m + \varepsilon.$$

Cela prouve que f tend vers m en b. □

Proposition 5.2. *On suppose que f est strictement monotone. Alors f est injective. En particulier f réalise une bijection de I dans J. De plus sa réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue et strictement monotone, de même monotonie que f.*

On observe qu'on n'a pas supposé que f est continue dans ce résultat. La continuité de f^{-1} dépend du fait que I est un intervalle.

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & [-1,0] \cup]1,2] \\ x & \mapsto & \begin{cases} x & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ x+1 & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} [-1,0] \cup]1,2] & \to & [-1,1] \\ y & \mapsto & \begin{cases} y & \text{si } -1 \leqslant y \leqslant 0 \leqslant 0 \\ y-1 & \text{si } 1 < y \leqslant 2 \end{cases} \end{array} \right.$$

Les fonctions f et g sont réciproques l'une de l'autre. On peut appliquer le résultat à f : f est définie sur un intervalle et sa réciproque g est bien continue. Par contre, bien que g soit strictement monotone et continue, sa réciproque f n'est pas continue. C'est dû au fait que g n'est pas définie sur un intervalle.

Démonstration. On suppose par exemple que f est strictement croissante.
- Soient $y_1, y_2 \in J$ tels que $y_1 < y_2$. Puisque $f(f^{-1}(y_1)) < f(f^{-1}(y_2))$ on a $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, ce qui prouve que f^{-1} est également strictement croissante.
- Montrons la continuité. Soit par exemple $y_0 \in J$. On note $x_0 = f^{-1}(y_0)$. On suppose par exemple que $x_0 \in \mathring{I}$ (les autres cas sont analogues). Soit $\varepsilon > 0$. On peut supposer que $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset I$. On a alors

$$f(x_0 - \varepsilon) < y_0 < f(x_0 + \varepsilon).$$

Soit alors $\delta > 0$ tel que $[y_0 - \delta, y_0 + \delta] \subset [f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon)]$. Alors pour tout $y \in [y_0 - \delta, y_0 + \delta] \cap J$ on a

$$x_0 - \varepsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon.$$

Cela prouve que f^{-1} est continue en y_0. □

Proposition 5.3. *On suppose que f est continue et injective. Alors f est strictement monotone.*

Idée de preuve sur un dessin.

Proposition 5.4. *On suppose que f est strictement monotone. Soit $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0) \in J$. On suppose que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) \neq 0$. Alors f^{-1} est dérivable en y_0 et on a*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Démonstration. Par continuité de f^{-1} en y_0 on a

$$f^{-1}(y) \xrightarrow[y \to y_0]{} f^{-1}(y_0) = x_0.$$

Pour $y \in J \setminus \{y_0\}$ on a

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{f^{-1}(y) - x_0}{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)} \xrightarrow[y \to y_0]{} \frac{1}{f'(x_0)}.$$

□

Proposition 5.5. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction dérivable et strictement monotone sur I. On suppose que f' ne s'annule pas sur I. Alors la réciproque f^{-1} définie sur $J = f(I)$ est dérivable et pour tout $y \in J$ on a*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Démonstration. Soit $y_0 \in I$ et $x_0 = f^{-1}(y_0)$. D'après la proposition 5.2, f^{-1} est continue en y_0. Pour $y \in J \setminus \{y_0\}$ et $x = f^{-1}(y)$ (qui tend vers x_0 lorsque y tend vers y_0) on a alors

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \xrightarrow[y \to y_0]{} \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Cela prouve que f^{-1} est dérivable en y_0 de dérivée $(f^{-1})'(y_0) = 1/f'(f^{-1}(y_0))$. □

Remarque 5.6. On peut retrouver facilement l'expression de la dérivée de f^{-1} on observant que pour tout $y \in J$ on a

$$f(f^{-1}(y)) = y,$$

ce qui donne après dérivation (d'après la proposition 4.9)

$$\forall y \in J, \quad f'(f^{-1}(y))(f^{-1})'(y) = 1.$$

On note néanmoins que ce raisonnement nécessite de déjà savoir que f^{-1} est dérivable.

6 Relations de comparaison

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{I}$. On autorise le cas $x_0 = +\infty$ (s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $]a, +\infty[\subset I$) ou $x_0 = -\infty$ (s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $]-\infty, a[\subset I$).

6.1 Fonctions négligeables

Définition 6.1. Soit h une fonction de I dans $\mathbb{R}$. On note alors

$$\underset{x \to x_0}{o}(g(x))$$

toute fonction de la forme $\varepsilon(x)g(x)$ où ε est une fonction définie sur I qui tend vers 0 en x_0. On dit alors que f est négligeable devant g en x_0.

En pratique, on n'utilisera cette définition que pour une fonction g qui ne s'annule pas au voisinage épointé de x_0 (quitte à réduire l'intervalle I, on a $g(x) \neq 0$ pour $x \in I \setminus \{x_0\}$). Cette condition est d'ailleurs souvent imposée directement dans la définition. Dans ce cas, pour une fonction f de I dans $\mathbb{R}$ on a

$$f(x) = \underset{x \to x_0}{o}(g(x)) \tag{6.1}$$

(ce qui ce lit : « f est un petit o de g en x_0 ») si et seulement si

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0.$$

Cela signifie que $f(x)$ est « très petit » par rapport à $g(x)$ quand x est « très proche » de x_0. C'est particulièrement intéressant d'avoir cet élément de comparaison quand les deux fonctions convergent vers 0 ou vers $\pm\infty$ en x_0.

Exemple 6.2. — Soient $p, q \in \mathbb{R}$ avec $p < q$. Alors on a

$$x^p = \underset{x \to \pm\infty}{o}(x^q) \quad \text{et} \quad x^q = \underset{x \to 0}{o}(x^p).$$

— Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha < \beta$. Alors on a

$$e^{\alpha x} = \underset{x \to +\infty}{o}(e^{\beta x}) \quad \text{et} \quad e^{\beta x} = \underset{x \to -\infty}{o}(e^{\alpha x}).$$

La notation « petit o » est totalement inhabituelle, et donc légitimement perturbante, car on utilise la même notation pour toute une classe de fonction. Plutôt que (6.1), il aurait été raisonnable d'écrire

$$f \in \underset{x \to x_0}{o}(g),$$

pour dire que f appartient à la classe des fonctions qui sont négligeables devant g en x_0. Mais l'usage est d'écrire (6.1), et une fois qu'on a pris l'habitude c'est en fait très pratique.

Il faut donc se familiariser avec les règles de calculs déroutantes des petits-o. Par exemple on peut écrire

$$\underset{x \to x_0}{o}(g(x)) + \underset{x \to x_0}{o}(g(x)) = \underset{x \to x_0}{o}(g(x)).$$

Cela signifie que si

$$f_1(x) = \underset{x \to x_0}{o}(g(x)) \quad \text{et} \quad f_2(x) = \underset{x \to x_0}{o}(g(x)),$$

alors

$$f_1(x) + f_2(x) = \underset{x \to x_0}{o}(g(x)).$$

Autrement dit, si f_1 et f_2 sont deux fonctions négligeables devant g en x_0, alors c'est aussi le cas de la somme $f_1 + f_2$. Pour s'en convaincre, il suffit de revenir à la définition, en pensant à prendre une fonction ε différente pour chaque petit-o. Ici, il existe deux fonctions ε_1 et ε_2 de I dans $\mathbb{R}$ qui tendent vers 0 en x_0 et telles que pour tout $x \in I$ on a

$$f_1(x) = \varepsilon_1(x)g(x) \quad f_2(x) = \varepsilon_2(x)g(x).$$

Pour $x \in I$ on a alors

$$f_1(x) + f_2(x) = \big(\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)\big)g(x).$$

Or $\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x) \to 0$ quand $x \to x_0$, donc cela prouve que $f_1(x) + f_2(x) = \underset{x \to x_0}{o}(g(x))$.

On a de la même façon

$$\underset{x \to x_0}{o}(g(x)) - \underset{x \to x_0}{o}(g(x)) = \underset{x \to x_0}{o}(g(x)).$$

Prudence, le membre de gauche n'a aucune raison d'être nul. Avec les notation précédente, on a

$$f_1(x) - f_2(x) = \big(\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)\big)g(x).$$

C'est bien négligeable devant g en x_0, mais même si on s'autorise à utiliser la même notation pour remplacer f_1 et f_2, cette différence n'a aucun raison d'être nulle.

Pour se faire la main, on peut vérifier les propriétés suivantes. Pour la suite, en cas de doute on peut toujours revenir à une écriture explicite avec des fonctions ε pour s'assurer qu'on ne dit pas de bêtise.

(i) Si $f_1(x) = \underset{x \to x_0}{o}(f_2(x))$ et $f_2(x) = \underset{x \to x_0}{o}(f_3(x))$ alors $f_1(x) = \underset{x \to x_0}{o}(f_3(x))$.

(ii) Si $f(x) = \underset{x \to x_0}{o}(h(x))$ alors $\lambda f(x) = \underset{x \to x_0}{o}(h(x))$.

(iii) Si $f(x) = \underset{x \to x_0}{o}(h(x))$ alors $f(x)g(x) = \underset{x \to x_0}{o}(h(x)g(x))$.

(iv) Si $f_1(x) = \underset{x \to x_0}{o}(g_1(x))$ et $f_2(x) = \underset{x \to x_0}{o}(g_2(x))$ alors $f_1(x)f_2(x) = \underset{x \to x_0}{o}(g_1(x)g_2(x))$.

Exemple 6.3. On a

$$2x + 7x^2 - e^x x^4 = 2x + \underset{x \to 0}{o}(x).$$

En guise d'exemples plus avancés, on montre les croissances comparées entres les fonctions puissances, exponentielles et logarithmes.

Proposition 6.4 (Croissances comparées). *Soient $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\gamma > 0$.*

(i) On a

$$\ln(x)^\gamma = \underset{x \to +\infty}{o}(x^\beta) \quad \text{et} \quad x^\beta = \underset{x \to +\infty}{o}(e^{\alpha x}).$$

(ii) On a

$$|\ln(x)|^\gamma = \underset{x \to 0^+}{o}(x^{-\beta}).$$

Démonstration. On montre par exemple que $x^\beta \underset{x \to +\infty}{=} o(e^{\alpha x})$. Pour $x \geqslant 0$ on pose

$$f(x) = \frac{x^{\beta+1}}{e^{\alpha x}} = x^{\beta+1} e^{-\alpha x} \geqslant 0.$$

Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour $x \in \mathbb{R}_+$ on a

$$f'(x) = (\beta+1)x^\beta e^{-\alpha x} - \alpha x^{\beta+1} e^{-\alpha x} = (\beta + 1 - \alpha x) x^\beta e^{-\alpha x}.$$

On observe que $f'(x) \geqslant 0$ pour $x \leqslant \frac{\beta+1}{\alpha}$ et $f'(x) \leqslant 0$ pour $x \geqslant \frac{\beta+1}{\alpha}$. Ainsi f est croissante sur $\left[0, \frac{\beta+1}{\alpha}\right]$ et f est décroissante sur $\left[\frac{\beta+1}{\alpha}, +\infty\right[$, donc f atteint son maximum en $x_0 = \frac{\beta+1}{\alpha}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a donc

$$0 \leqslant f(x) \leqslant f(x_0).$$

En praticulier f est bornée. Pour tout $x \geqslant 0$ on a alors

$$0 \leqslant \frac{x^\beta}{e^{\alpha x}} = \frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{f(x_0)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$

Cela prouve que

$$\frac{x^\beta}{e^{\alpha x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

et donc, par définition, que $x^\beta \underset{x \to +\infty}{=} o(e^{\alpha x})$. □

6.2 Fonctions dominées

Définition 6.5. Soit h une fonction de I dans $\mathbb{R}$. On note alors

$$\underset{x \to x_0}{O}(g(x))$$

toute fonction de la forme $\beta(x)g(x)$ où β est une fonction bornée sur I. On dit alors que f est dominée par g en x_0.

De nouveau, on n'utilisera cette définition que pour une fonction g qui ne s'annule pas au voisinage épointé de x_0. Pour une fonction f de I dans $\mathbb{R}$ on a alors

$$f(x) = \underset{x \to x_0}{O}(g(x))$$

(ce qui ce lit : « f est un grand O de g en x_0 ») si et seulement si le quotient $f(x)/g(x)$ est borné au voisinage épointé de x_0. Cela signifie que $f(x)$ est « au plus du même ordre de grandeur » que $g(x)$ quand x est « très proche » de x_0.

Les calculs avec les grands O sont similaires à ceux avec les petits o. On peut en guise d'exemple vérifier les propriétés suivantes.

(i) Si $f_1(x) = \underset{x \to x_0}{O}(f_2(x))$ et $f_2(x) = \underset{x \to x_0}{O}(f_3(x))$ alors $f_1(x) = \underset{x \to x_0}{O}(f_3(x))$.

(ii) Si $f_1(x) = \underset{x \to x_0}{O}(g(x))$ et $f_2(x) = \underset{x \to x_0}{O}(g(x))$ alors $f_1(x) + f_2(x) = \underset{x \to x_0}{O}(f_3(x))$.

(iii) Si $f(x) = \underset{x \to x_0}{O}(g(x))$ alors $\lambda f(x) = \underset{x \to x_0}{O}(g(x))$.

(iv) Si $f(x) \underset{x\to x_0}{=} O(g(x))$ alors $f(x)h(x) \underset{x\to x_0}{=} O(g(x)h(x))$.

(v) Si $f_1(x) \underset{x\to x_0}{=} O(g_1(x))$ et $f_2(x) \underset{x\to x_0}{=} O(g_2(x))$ alors $f_1(x)f_2(x) \underset{x\to x_0}{=} O(g_1(x)g_2(x))$.

On note que si f est dominée par h en x_0, alors h peut être ou ne pas être dominée par f en x_0.

Il est clair qu'on a le lien suivant entre petit-o et grand-O :

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} o(h(x)) \quad \Longrightarrow \quad f(x) \underset{x\to x_0}{=} O(h(x)).$$

Ainsi le petit-o était plus précis que ne l'est le grand-O. Néanmoins, en reprenant l'exemple 6.3 on s'aperçoit qu'on peut être plus précis en comparant le reste à une fonction plus petite.

Exemple 6.6. On a

$$2x + 7x^2 - e^x x^4 = 2x + \underset{x\to 0}{O}(x^2).$$

C'est plus précis que l'égalité de l'exemple 6.3 car si $f(x) \underset{x\to 0}{=} O(x^2)$ alors en particulier $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x)$.

On termine ce paragraphe avec un dernier exemple de propriété. On suppose que $f(y) \underset{y\to 0}{=} O(y^n)$. On suppose que $g(x) \to 0$ quand $x \to x_0$. Alors

$$f(g(x)) \underset{x\to x_0}{=} O(g(x)^n).$$

Exemple 6.7. On a

$$\frac{1}{1-y} - 1 = \frac{y}{1-y} \underset{y\to 0}{=} O(y),$$

donc

$$\frac{1}{1-x^2} - 1 \underset{x\to 0}{=} O(x^2).$$

6.3 Fonctions équivalentes

Définition 6.8. Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de x_0. On dit que f et g sont équivalentes en x_0 et on note

$$f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$$

si

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} 1.$$

Cela implique en particulier que f ne s'annule pas non plus au voisinage de x_0. Pour donner une définition dans l'esprit des définitions 6.1 et 6.5, on peut dire que f est équivalente à g si et seulement s'il existe une fonction $\gamma : I \to \mathbb{R}$ qui tend vers 1 en x_0 et telle que $f(x) = \gamma(x)g(x)$ pour tout $x \in I$. Comme $\gamma(x) = 1 + \underset{x\to x_0}{o}(1)$, on peut encore dire que f est équivalente à g si et seulement si

$$f(x) = g(x) + \underset{x\to x_0}{o}(g(x)).$$

Exemple 6.9. On a
$$5x - x^2 + 8x^5 \underset{x\to 0}{\sim} 5x$$
et
$$5x - x^2 + 8x^5 \underset{x\to +\infty}{\sim} 8x^5.$$

Exemple 6.10. On a
$$\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x.$$
En effet,
$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0} \xrightarrow[x\to 0]{} \sin'(0) = 1.$$
De même on a
$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x.$$

Proposition 6.11. *La relation $\underset{x\to x_0}{\sim}$ est une relation d'équivalence : pour f, g et h de I dans $\mathbb{R}$ on a*
$$f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} f(x),$$
$$f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \iff g(x) \underset{x\to x_0}{\sim} f(x)$$
et
$$\left(f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \text{ et } g(x) \underset{x\to x_0}{\sim} h(x)\right) \implies f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} h(x)$$

Proposition 6.12. *Soient f_1, f_2, g_1, g_2 des fonctions de I dans $\mathbb{R}$. Si*
$$f_1(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_1(x) \quad \text{et} \quad f_1(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_2(x)$$
alors
$$f_1(x)f_2(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_1(x)g_2(x).$$

Remarque 6.13. Attention, on ne peut pas sommer les équivalents. Par exemple,
$$x + x^2 \underset{x\to 0}{\sim} x \quad \text{et} \quad -x \underset{x\to 0}{\sim} -x + x^3,$$
mais x^2 n'est pas équivalent à x^3 en 0. Pire, la somme pourrait être nulle, or on ne peut pas considérer d'équivalence pour la fonction nulle.

7 Dérivées d'ordres supérieurs - Développements limités

7.1 Dérivées successives

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. On note $f^{(0)} = f$ et, si f est dérivable, $f^{(1)} = f'$.

Définition 7.1.
— On dit que f est deux fois dérivable sur I si f est dérivable et si sa dérivée f' est elle-même dérivable sur I. Dans ce cas on note $f'' = f^{(2)}$ la dérivée de f'.
— Par récurrence sur n, on dit que f est n fois dérivable sur I (pour $n \geqslant 2$) si f est $(n-1)$ fois dérivable et si $f^{(n-1)}$ est elle même dérivable. Dans ce cas on note $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ la dérivée n-ième de f.

Définition 7.2. Soit $x_0 \in I$. On dit que f est n-fois dérivable en x_0 s'il existe $\delta > 0$ tel que f est $(n-1)$-fois dérivable sur $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ et si $f^{(n-1)}$ est dérivable en x_0.

Définition 7.3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f est de classe C^n sur I si f est n fois dérivable et si sa dérivée n-ième $f^{(n)}$ est continue sur I (f est de classe C^0 si elle est continue).

Définition 7.4. On dit de f qu'elle est de classe C^∞ si elle est n fois dérivable sur I pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (ou, de façon équivalente, si elle est de classe C^n pour tout n).

Exemple 7.5.
— Les fonctions puissances $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$, sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$;
— La fonction exponentielle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
— La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ x^n & \text{si } x \geqslant 0, \end{cases}$$

est de classe C^{n-1} mais pas de classe C^n (elle n'est pas n fois dérivable en 0).

Proposition 7.6. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$. Soient f et g deux fonctions n-fois dérivables (respectivement de classe C^n) sur I. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.*

(i) $f + g$ est n fois dérivable (respectivement de classe C^n) sur I et on a

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}.$$

(ii) λf est n fois dérivable (respectivement de classe C^n) sur I et on a

$$(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}.$$

(iii) fg est n fois dérivable (respectivement de classe C^n) sur I et on a

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

(iv) On suppose maintenant que g ne s'annule pas sur I. Alors f/g est n fois dérivable (respectivement de classe C^n) sur I.

Démonstration. On montre (iii) par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, le cas $n = 1$ étant donné par la proposition 4.8. Soit $n \geqslant 2$. On suppose le résultat acquis jusqu'au rang $n-1$. Comme f et g sont dérivables, le produit fg l'est également et $(fg)' = f'g + fg'$. Comme f' et g sont $(n-1)$ fois dérivables, le produit $(f'g)$ est $(n-1)$ fois dérivable par hypothèse de récurrence. De même, fg' est $(n-1)$ fois dérivable, donc $(fg)'$ est $(n-1)$ fois dérivable d'après (i). Ainsi (fg) est n fois dérivable. On vérifie de la même façon que si f et g sont de classe C^n, alors fg l'est également.

Le calcul de $(fg)^{(n)}$ se fait également par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Le cas $n = 1$ est déjà connu. On considère $n \geqslant 2$ et on suppose le résultat acquis jusqu'au rang $n-1$. On a alors par hypothèse de récurrence

$$(fg)^{(n-1)} = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k f^{(k)} g^{(n-1-k)}.$$

En dérivant et en faisant le changement d'indice $j = k + 1$ dans la première somme, on obtient

$$\begin{aligned}(fg)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} f^{(k+1)} g^{(n-1-k)} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \\ &= \sum_{j=1}^{n} C_{n-1}^{j-1} f^{(j)} g^{(n-j)} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \\ &= C_{n-1}^{n-1} f^{(n)} g + \sum_{k=1}^{n-1} (C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k}) f^{(k)} g^{(n-k)} + C_{n-1}^{0} f g^{(n)}.\end{aligned}$$

On a $C_{n-1}^{n-1} = 1 = C_n^n$ et $C_{n-1}^0 = 1 = C_n^0$. D'autre part, $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = C_n^k$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$. Ainsi on obtient bien

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Les autres résultats se montrent de la même façon. □

Exemple 7.7. — Les fonctions polynomiales sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions rationnelles sont de classe C^∞ sur leurs domaines de définition.
- La fonction logarithme est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Proposition 7.8. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$. Soient f une fonction n-fois dérivable (respectivement de classe C^n) sur I et g une fonction n-fois dérivable (de classe C^n) sur un intervalle J contenant $f(I)$. Alors la composée $(g \circ f)$ est n fois dérivable (de classe C^n) sur I.*

Démonstration. On montre le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. On a vu à la proposition 4.9 que $(g \circ f)$ est dérivable de dérivée $(g \circ f)' = (g' \circ f)f'$. Si f et g sont de classe C^1, alors $(g \circ f)'$ est continue, donc $(g \circ f)$ est de classe C^1. Cela donne le cas $n = 1$. On se donne alors $n \geqslant 2$ et on suppose le résultat acquis jusqu'au rang $n - 1$. On suppose que g et f sont n fois dérivables. Comme g', f et f' sont $(n-1)$ fois dérivables, la composée $(g' \circ f)$ et donc le produit $(g \circ f)' = (g' \circ f)f'$ le sont également. Cela prouve que $(g \circ f)$ est n fois dérivable. Si de plus f et g sont de classe C^n, alors g', f et f' sont de classe C^{n-1} et on obtient de la même façon que $(g \circ f)$ est de classe C^n. □

Exemple 7.9. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Alors f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ comme composée des fonctions $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ et exponentielle, qui sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et sur $\mathbb{R}$, respectivement. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a

$$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}. \tag{7.1}$$

Pour $n = 0$ c'est vrai par définition avec $P_0 = 1$. On considère $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose le résultat acquis au rang $n-1$. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}\right) \\ &= -\frac{1}{x^2}P'_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{2}{x^3}P_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}. \end{aligned}$$

Cela prouve (7.1) avec

$$P_n(X) = -X^2 P'_{n-1}(X) + 2X^3 P_{n-1}(X).$$

Par croissances comparées, on déduit de (7.1) que

$$f^{(n)}(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0.$$

En appliquant le théorème de prolongement d'une dérivée (proposition 4.17) aux dérivées successives de f, on obtient par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que f est n fois dérivable en 0 de dérivée $f^{(n)}(0) = 0$. Cela prouve que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Proposition 7.10. *Soit f une bijection de l'intervalle I dans l'intervalle J. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que f est de classe C^n sur I et que sa dérivée f' ne s'annule pas. Alors la bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est de classe C^n sur J.*

Démonstration. On montre le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. On a vu à la proposition 5.5 que f^{-1} est dérivable de dérivée

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

En particulier, si f est de classe C^1 on obtient que $(f^{-1})'$ est continue, et donc f^{-1} est de classe C^1. On suppose maintenant le résultat acquis jusqu'au rang $n-1$ ($n \geqslant 2$). Si f est de classe C^n, alors f' et f^{-1} (par hypothèse de récurrence) sont de classe C^{n-1}. D'après les propositions 7.8 et 7.6, $(f^{-1})'$ est de classe C^{n-1}, donc f^{-1} est de classe C^n. D'où le résultat. □

7.2 Développements limités - Formules de Taylor

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, et $x_0 \in \overline{I}$.

Définition 7.11. Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au point x_0 s'il existe $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ tels que

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + \underset{x \to x_0}{o}\big((x - x_0)^n\big). \tag{7.2}$$

De façon équivalente on peut écrire

$$f(x_0 + h) = a_0 + a_1 h + \dots + a_n h^n + \underset{h \to 0}{o}(h^n).$$

Le développement limité décrit le comportement *local* de la fonction f au voisinage de x_0. Plus précisément, il donne une fonction polynomiale de degré n qui approche f à $o((x - x_0)^n)$ près. Plus n est grand, plus la description est précise.

Exemple 7.12. Soit $P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, avec $N \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_N \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $n \in [\![0, N]\!]$ on a

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \underset{x\to 0}{O}(x^{n+1}) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n).$$

Exemple 7.13. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$(1-x)(1+x+x^2+\dots+x^n) = 1 - x^{n+1},$$

donc

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \dots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x} = \sum_{j=0}^{n} x^j + \underset{x\to 0}{O}(x^{n+1}).$$

On en déduit également

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j x^j + \underset{x\to 0}{O}(x^{n+1}),$$

ou encore

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{j=0}^{n} x^{2j} + \underset{x\to 0}{O}(x^{2n+2}).$$

Exemple 7.14. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$x^{n+1} \sin\left(\frac{1}{x^n}\right) = \underset{x\to 0}{O}(x^{n+1}).$$

Proposition 7.15. *Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$.*

(i) *Si f admet un développement limité à l'ordre n en x_0, alors celui-ci est unique (les coefficients $a_0, \dots, a_n$ dans (7.2) sont uniques).*

(ii) *Si f et g admettent un développement limité à l'ordre n en x_0, c'est également le cas de $f + g$.*

(iii) *Si f et g admettent un développement limité à l'ordre n en x_0, c'est également le cas de fg.*

Démonstration. On montre la première propriété. On suppose que $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ sont tels que

$$\begin{aligned} a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^n + \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^n) \\ = b_0 + b_1(x-x_0) + \dots + b_n(x-x_0)^n + \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^n). \end{aligned} \tag{7.3}$$

On montre par récurrence sur $k \in [\![0, n]\!]$ que $a_k = b_k$. Par passage à la limite ($x \to x_0$) dans l'égalité précédente, on obtient $a_0 = b_0$. On considère $k \in [\![1, n]\!]$ et suppose le résultat acquis jusqu'au rang $k-1$. En divisant par $(x-x_0)^k$ et en prenant la limite $x \to x_0$ on obtient $a_k = b_k$, ce qui donne une contradiction et prouve que $a_k = b_k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. □

Démonstration. On montre la première propriété. On suppose que $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ sont tels que

$$a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^n + \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^n)$$
$$= b_0 + b_1(x-x_0) + \dots + b_n(x-x_0)^n + \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^n).$$

On suppose par l'absurde qu'il existe $k \in [\![0,n]\!]$ tel que $a_k \neq b_k$ et on considère le plus petit k tel que $a_k \neq b_k$. On a alors

$$a_k(x-x_0)^k + \dots + a_n(x-x_0)^n + \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^n) = b_k(x-x_0)^k + \dots + b_n(x-x_0)^n + \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^n).$$

Cela donne

$$a_k(x-x_0)^k + \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^k) = b_k(x-x_0)^k + \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^k),$$

En divisant par $(x-x_0)^k$ et en prenant la limite $x \to x_0$ on obtient $a_k = b_k$, ce qui donne une contradiction et prouve que $a_k = b_k$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$. □

Proposition 7.16. *Soit F une fonction dérivable sur I. On suppose que F' admet x_0 un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$. Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que*

$$F'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^n).$$

Alors on a

$$F(x) = F(x_0) + \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{(x-x_0)^{k+1}}{k+1} + \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^{n+1}).$$

Démonstration. • On considère le cas particulier d'une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ dérivable et telle que

$$\varphi'(x) = \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^n).$$

Soit $x \in I$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_x \in I$ tel que $|c_x - x_0| \leqslant |x - x_0|$ et

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = (x-x_0)\varphi'(c_x).$$

Comme

$$\varphi'(c_x) = \underset{x\to x_0}{o}((c_x-x_0)^n) = \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^n),$$

on a alors

$$\varphi(x) = (x-x_0)\varphi'(c_x) = \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^{n+1}).$$

• Pour $x \in I$ on note

$$\varphi(x) = F(x) - \left(F(x_0) + \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{(x-x_0)^{k+1}}{k+1}\right).$$

Alors on a $\varphi(x_0) = 0$ et

$$\varphi'(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k = \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^n).$$

D'après le cas particulier on a $\varphi(x) = \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^{n-1})$, ce qui donne le résulat. □

On a vu à la proposition 4.4 que la fonction f admet un développement limité à l'ordre 1 au point x_0 si et seulement si elle est dérivable en x_0, et que dans ce cas le développement est donnée par

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \underset{h\to 0}{o}(h).$$

Pour les développements d'ordres supérieurs, on n'a pas une telle équivalence, mais on peut montrer qu'une fonction régulière admet bien un développement limité.

Théorème 7.17 (Formule de Taylor-Young). *Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f est n fois dérivable en x_0 (continue si $n = 0$). Alors on a*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \underset{x\to x_0}{o}\big((x-x_0)^n\big) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \underset{x\to x_0}{o}\big((x-x_0)^n\big). \end{aligned}$$

Remarque 7.18. Si f est $(n+1)$ fois dérivable en x_0 on peut en fait préciser ce développement limité en écrivant

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \underset{x\to x_0}{O}\big((x-x_0)^{n+1}\big).$$

Pour cela il suffit d'écrire la formule de Taylor-Young à l'ordre $n+1$ et d'englober le dernier terme dans le reste.

Démonstration. On montre le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Si $n = 0$, c'est la définition de la continuité. On suppose que $n = 1$ et on suppose le résultat acquis jusqu'au rang $n-1$. Alors f est dérivable au voisinage de x_0 et f' est $(n-1)$ fois dérivable. Par hypothèse de récurrence on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^j}{j!} (f')^{(j)}(x_0) + \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^{n-1}) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^j}{j!} f^{(j+1)}(x_0) + \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^{n-1}). \end{aligned}$$

En intégrant ce développement limité (proposition 7.16) on obtient

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^{j+1}}{(j+1)!} f^{(j+1)}(x_0) + \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^n). \end{aligned}$$

D'où le résultat. $\square$

Remarque 7.19. Avant d'énoncer la formule de Taylor-Young, on a dit qu'il n'y avait pas équivalence entre régularité de la fonction et existence d'un développement limité d'ordre élevé. En effet, une fonction peut admettre un développement d'ordre élevé en un point sans être deux fois dérivable. C'est par exemple le cas de la fonction

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} x^{n+1} \sin\left(\frac{1}{x^n}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

En effet, f_n admet un développement limité d'ordre n en 0, mais elle n'y est pas deux fois dérivable. En particulier, **on ne peut pas dériver un développement limité**. Le fait que f admette un développement limité à l'ordre n ne permet pas de conclure que c'est aussi le cas de f' à l'ordre $n-1$.

Proposition 7.20 (Exemples à connaître). —

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \underset{x\to 0}{O}(x^{n+1}),$$

—
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \underset{x\to 0}{O}(x^{n+1}).$$

—
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{O}(x^{n+1})$$

—
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{O}(x^{n+1})$$

—
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{O}(x^{2n+2})$$

—
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{O}(x^{2n+3})$$

—
$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \underset{x\to 0}{O}(x^7).$$

— *Pour* $\alpha \in \mathbb{R}$ *on a*
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \underset{x\to 0}{O}(x^{n+1}).$$

—
$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{O}(x^{2n+2})$$

—
$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{O}(x^{2n+3})$$

On retrouve par exemple que

$$e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x, \quad \sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x, \quad \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x.$$

On a également

$$1 - \cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$

Exemple 7.21. On cherche à connaître le comportement de la fonction $x \mapsto e^{x^2}\cos(2x)$ au voisinage de 0. Disons que l'on cherche à approcher cette fonction à l'ordre 4. Puisque cette fonction est de classe C^∞, on pourrait en calculer les dérivées successives jusqu'à l'ordre 4 puis appliquer la formule de Taylor-Young. Mais calculer les dérivées successives peut vite être fastidieux et demande plus de travail que nécessaire (pour calculer la dérivée $(n+1)$-ième en 0, on a besoin de la dérivée n-ième sur tout un voisinage de 0). Au lieu de cela, on fait directement des calculs sur les développements limités de exp et cos.

On a

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{24} + \underset{y\to 0}{o}(y^4).$$

On rappelle que cela signifie qu'il existe une fonction $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui tend vers 0 en 0 et telle que pour tout $y \in \mathbb{R}$

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{24} + y^4\varepsilon(y).$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on peut appliquer cette égalité avec $y = x^2$. Cela donne

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} + x^8\varepsilon(x^2).$$

On en déduit

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^4).$$

On observe qu'on aurait pu se contenter d'écrire le développement limité de e^y à l'ordre 2. On vérifie de la même façon que

$$\cos(2x) = 1 - \frac{4x^2}{2} + \frac{16x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^4).$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
e^{x^2}\cos(2x) &= \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)\left(1 - 2x^2 + \frac{2x^4}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right) && (7.4)\\
&= 1 - 2x^2 + \frac{2x^4}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^4) + x^2 - 2x^4 + \frac{2x^6}{3} + \underbrace{x^2\underset{x\to 0}{o}(x^4)}_{=x^2x^4\varepsilon(x)=\underset{x\to 0}{o}(x^6)} && (7.5)\\
&\quad + \frac{x^4}{2} - \frac{2x^6}{2} + \frac{2x^8}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^8) + \underset{x\to 0}{o}(x^4) + \underset{x\to 0}{o}(x^6) + \underset{x\to 0}{o}(x^8) + \underset{x\to 0}{o}(x^8) && (7.6)\\
&= 1 - 2x^2 + \frac{2x^4}{3} + x^2 - 2x^4 + \frac{x^4}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^4) && (7.7)\\
&= 1 - x^2 - \frac{5x^4}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^4). && (7.8)
\end{aligned}$$

On fait on peut vérifier qu'on a plus précisément

$$e^{x^2}\cos(2x) = 1 - x^2 - \frac{5x^4}{6} + \underset{x\to 0}{O}(x^6).$$

Exemple 7.22. Les développements limités ne sont pas nécessairement en 0. Mais on peut toujours s'y ramener. On cherche un développement limité à l'ordre 4 pour la fonction $x \mapsto \sin(2x)$ au point $x = \frac{\pi}{2}$. On observe que c'est équivalent à chercher un développement en $h = 0$ pour la fonction $h \mapsto \sin\big(2(\frac{\pi}{2} + h)\big)$. On a

$$\begin{aligned}\sin\left(2\left(\frac{\pi}{2} + h\right)\right) &= \sin(\pi + 2h) = -\sin(2h) = -\left(2h - \frac{(2h)^3}{6} + \underset{h\to 0}{o}(h^4)\right)\\ &= -2h + \frac{4h^3}{3} + \underset{h\to 0}{o}(h^4).\end{aligned}$$

D'où

$$\sin(x) = -2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{4}{3}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 + \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{o}\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4\right).$$

Exemple 7.23. Pour $x \in \mathbb{R}^*$ on note

$$f(x) = \frac{\ln(e^x + x^2)}{x}.$$

On s'intéresse à la limite de f en 0. On observe que le numérateur et le dénominateur tendent vers 0 quand x tend vers 0. Cela ne permet pas de conclure. Il faut donc mieux comprendre *comment* ces fonctions tendent vers 0. Pour $x \in \mathbb{R}^*$ on a

$$f(x) = \frac{1}{x}\ln\left(1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right) = \frac{1}{x}\left(x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right) = 1 + \underset{x\to 0}{o}(1) \xrightarrow[x\to 0]{} 1.$$

7.3 Retour sur les extremums locaux

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, f une fonction deux fois dérivable de I dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathring{I}$.

Proposition 7.24. *(i) On suppose que f admet un minimum local en x_0. Alors $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) \geqslant 0$.*

(ii) On suppose que f admet un maximum local en x_0. Alors $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) \leqslant 0$.

(iii) On suppose que $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) > 0$. Alors f admet un minimum local (strict) en x_0.

(iv) On suppose que $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) < 0$. Alors f admet un maximum local (strict) en x_0.

Démonstration. On montre (iii). D'après la formule de Taylor-Young, il existe une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ qui tend vers 0 en x_0 et telle que, pour tout $x \in I$,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} f''(x_0) + (x - x_0)^2 \varepsilon(x).$$

Il existe $\delta > 0$ tel que $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset I$ et pour tout $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ on a

$$|\varepsilon(x)| \leqslant \frac{f''(x_0)}{4}.$$

Pour $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \backslash \{x_0\}$ on a alors

$$f(x) \geqslant f(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} f''(x_0) - \frac{(x - x_0)^2}{4} f''(x_0) > f(x_0).$$

Cela prouve que f admet un minimum local strict en x_0. $\square$

Remarque 7.25. Si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) = 0$, alors on ne peut rien conclure. f peut admettre en x_0 un minimum local, strict ou non, un maximum local, strict ou non, ou ne pas admettre du tout d'extremum local. Pour s'en convaincre on peut considérer en $x_0 = 0$ les fonctions $x \mapsto 0$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto -x^2$ et $x \mapsto x^3$.

Pour la proposition 7.24 on a utilisé un développement limité à l'ordre 2 de f en x_0 pour obtenir le comportement de $f(x) - f(x_0)$ en x_0. Si $f''(x_0) = 0$, on peut chercher un développement limité à un ordre supérieur. Dès qu'on a un développement limité avec un terme non nul, on peut conclure de la même façon. Plus précisément, s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tels que

$$f(x) - f(x_0) = \alpha(x - x_0)^n + \underset{x \to x_0}{o}\big((x - x_0)^n\big),$$

alors on a les propriétés suivantes :

— Si n est pair et $\alpha > 0$ alors f admet un minimum local strict en x_0 ;

— Si n est pair et $\alpha < 0$ alors f admet un maximum local strict en x_0 ;

— Si n est impair alors f n'admet pas d'extremum local en x_0 ($f(x) - f(x_0)$ change de signe au voisinage de x_0).

Pour prouver ces propriétés, on procède exactement comme pour la proposition 7.24.

Remarque 7.26. Dans la proposition 7.24 on se place dans le cas où f admet en x_0 une tangente horizontale. Quand on compare $f(x)$ à $f(x_0)$, on s'intéresse donc à la position du graphe de f par rapport à cette tangente. On peut en fait faire la même étude qu'à la proposition 7.24 dans le cas général où la tangente n'est pas horizontale ($f'(x_0) \neq 0$).

Ainsi, si $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$) alors au voisinage de x_0 la courbe de f est au-dessus (en dessous) de sa tangente (qui est le graphe de la fonction $x \mapsto f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$). Comme observé à la remarque 7.25, si $f''(x_0) = 0$, on peut éventuellement conclure en aller chercher un développement limité plus précis.

7.4 Versions globales de la formule de Taylor

Théorème 7.27 (Formule de Taylor reste intégral)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction de classe C^{n+1} de I dans $\mathbb{R}$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors on a*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

Démonstration. On montre le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Le cas $n = 0$ est donné par le théorème fondamental de l'analyse pour une fonction de classe C^1. On considère $n \geqslant 2$ et on suppose le résultat acquis jusqu'au rang $n - 1$. Par hypothèse de récurrence on a

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\, dt.$$

Comme $f^{(n)}$ est de classe C^1, une intégration par parties donne alors

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\, dt &= \left[-\frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)\right]_a^b - \int_a^b \frac{-(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt \\ &= \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt.\end{aligned}$$

D'où le résultat par récurrence. □

Théorème 7.28 (Théorème de Taylor-Lagrange)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction de classe C^n sur $[a; b]$ et $(n+1)$ fois dérivable sur $]a; b[$. Alors il existe $c \in]a; b[$ tel que*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Démonstration. • On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que si φ est une fonction de classe C^n sur $[a, b]$ qui est $(n+1)$ fois dérivable sur $]a; b[$ et vérifie

$$\varphi(a) = \varphi(b), \quad \varphi'(a) = \varphi^{(2)}(a) = \cdots = \varphi^{(n)}(a) = 0,$$

alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $\varphi^{(n+1)}(c) = 0$. Pour $n = 0$, c'est le théorème de Rolle. On considère $n \geqslant 2$ et on suppose le résultat acquis jusqu'au rang $n-1$. Par hypothèse de récurrence, il existe $\tilde{c} \in]a; b[$ tel que $\varphi^{(n)}(\tilde{c}) = 0$. En appliquant le théorème de Rolle à la fonction $\tilde{\varphi}^{(n)}$ il existe alors $c \in]a; \tilde{c}[$ tel que $\varphi^{(n+1)}(c) = 0$. On cherche maintenant à appliquer ce cas particulier à une fonction φ bien choisie.

• Pour $x \in [a; b]$ on pose

$$g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a).$$

Alors g vérifie les mêmes hypothèses de régularité que f, et on a de plus

$$g(a) = g'(a) = \cdots = g^{(n)}(a) = 0.$$

• Enfin pour $x \in [a; b]$ on pose

$$\varphi(x) = g(x) - \frac{(x-a)^{n+1}}{(b-a)^{n+1}} g(b).$$

Alors φ a la même régularité que f, on a $\varphi^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, et de plus $g(b) = 0 = g(a)$. D'après le cas particulier de la première étape, il existe $c \in]a; b[$ tel que

$$0 = \varphi^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(c) - \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}} g(b),$$

soit

$$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) = g(b) = f(a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a).$$

D'où le résultat. □

Le résultat suivant est une conséquence directe du théorème de Taylor-Lagrange :

Théorème 7.29 (Inégalité de Taylor-Lagrange)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction de classe C^n sur $[a; b]$ et $(n+1)$ fois dérivable sur $]a; b[$. On suppose qu'il existe $M \geqslant 0$ tel que $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leqslant M$ pour tout $x \in]a; b[$. Alors on a*

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

7.5 Exercices

***Exercice* 32.** Montrer qu'un développement limité est nécessairement unique. Plus précisément, montrer que si f est une fonction définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ et qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x_0 + h) = \sum_{j=0}^{n} a_j h^j + \underset{h \to 0}{o}(h^n) = \sum_{j=0}^{n} b_j h^j + \underset{h \to 0}{o}(h^n),$$

alors $a_j = b_j$ pour tout $j \in [\![0, n]\!]$.

***Exercice* 33.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|e^x - 1 - x| \leqslant \frac{|x|^2}{2} e^x$.

***Exercice* 34.** Donner les développements limités des fonctions suivantes en 0, à l'ordre indiqué entre parenthèses :

(i) $x \mapsto \sqrt{1+x} \times \ln(1+x)$ (à l'ordre 3)
(ii) $x \mapsto \sin(x)/(1+x)$ (à l'ordre 4)
(iii) $x \mapsto e^{\cos(x)}$ (à l'ordre 4)
(iv) tan (à l'ordre 5)
(v) arctan (à l'ordre 5)
(vi) $x \mapsto \frac{\tan(x)}{1+\arctan(x)}$ (à l'ordre 3)

***Exercice* 35.** **1.** Calculer le développement limité au point 1 et à l'ordre 3 de la fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2}$.
2. Calculer le développement limité au point $\frac{\pi}{3}$ et à l'ordre 3 de la fonction $x \mapsto \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$.

***Exercice* 36.** Étudier l'existence et, le cas échéant, la valeur des limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x \to 0^\pm} \frac{1}{x\cos(x) - \sin(x)}$

2. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}} \sqrt{x^2 + 2x} - x$

3. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \tan(x) - \cos(x)}{\sin(x^2)\ln(1+x)}$

4. $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin(x))}{(\pi - 2x)^2}$

***Exercice* 37.** On considère sur $\mathbb{R}$ la fonction $f : x \mapsto \cos(x) - 1 + (e^x - 1)^3$. En utilisant un développement limité, montrer que f admet un maximum local en 0.

8 Fonctions usuelles

8.1 Puissances entières

Pour $x \in \mathbb{R}$ on note $x^0 = 1$ puis, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x^n = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}.$$

On peut aussi définir x^n par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ en disant que $x^n = x \times x^{n-1}$. Si $x \neq 0$, on définit ensuite les puissances négatives de x par

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

On regroupe dans la proposition suivante un certain nombre de propriétés élémentaires (ou déjà vues) de ces fonctions puissances :

Proposition 8.1. *(i) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$ on a*

$$x^{n+m} = x^n x^m$$

(ii) Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{Z}$ on a

$$(xy)^n = x^n y^n.$$

(iii) Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$ on a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}, \quad \textit{avec } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

(iv) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors la fonction $x \mapsto x^n$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}.$$

Plus généralement, pour $k \in \mathbb{N}$ on a

$$\frac{d^k x^n}{dx^k} = \begin{cases} n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k} & \textit{si } k \leqslant n, \\ 0 & \textit{si } k > n. \end{cases}$$

En particulier,

$$\frac{d^n x^n}{dx^n} = n!.$$

Proposition-Définition. (i) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier impair. Alors la fonction $x \mapsto x^n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En outre

$$x^n \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty \quad \text{et} \quad x^n \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty.$$

Ainsi $x \mapsto x^n$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note

$$x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

sa bijection réciproque. Cette réciproque est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.

(ii) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier pair. Alors la fonction $x \mapsto x^n$ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$. En outre

$$x^n \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty.$$

Ainsi $x \mapsto x^n$ réalise une bijection de $[0,+\infty[$ dans $[0,+\infty[$. On note

$$x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

sa bijection réciproque. Cette réciproque est continue sur $[0,+\infty[$ et de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$.

8.2 Fonctions exponentielles et logarithmes

Le but de ce paragraphe est de donner une définition des fonctions logarithme et exponentielle, et d'en rappeler les principales propriétés. Pour cela on admet temporairement le résultat suivant :

Théorème 8.2. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$. Alors f admet une primitive F sur I, et l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions de la forme $F + \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. En particulier, pour $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ il existe une unique primitive de f sur I qui vaut y_0 en x_0.*

On définit alors le logarithme par la propriété suivante :

Définition. On appelle **logarithme (népérien)** et on note ln l'unique primitive de $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1.

À partir de cette définition on retrouve les principales propriétés que vous connaissez déjà pour le logarithme :

Proposition 8.3. *La fonction* ln *vérifie les propriétés suivantes :*

(i) ln *est de classe C^∞ sur* $]0, \infty[$.

(ii) ln *est strictement croissante sur* $]0, \infty[$.

(iii) Pour tout $(a, b) \in]0, +\infty[^2$ on a

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).$$

En particulier, pour $x \in]0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{Z}$ on a

$$\ln(x^n) = n \ln(x).$$

(iv) On a

$$\ln(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty \quad \text{et} \quad \ln(t) \xrightarrow[t \to 0]{} -\infty.$$

(v) ln *réalise une bijection de* $]0, +\infty[$ *dans* $\mathbb{R}$.

Démonstration. (i) Par définition, la fonction ln est dérivable sur $]0, +\infty[$. En outre sa dérivée est de classe C^∞ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas (toujours sur $]0, +\infty[$). On en déduit que la fonction ln est elle-même de classe C^∞.

(ii) La fonction ln est dérivable de dérivée strictement positive sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Elle y est donc strictement croissante.

(iii) Soit $a \in]0, +\infty[$. Pour $x \in]0, +\infty[$ on note

$$f(x) = \ln(ax) - \ln(a) - \ln(x).$$

La fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a

$$f'(x) = \frac{a}{ax} - \frac{1}{x} = 0.$$

Cela prouve que f est constante sur $]0, +\infty[$. Comme $f(1) = 0$, f est nulle, et on obtient bien

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \ln(ax) = \ln(a) + \ln(x).$$

Pour $x > 0$ on obtient alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\ln(x^n) = n\ln(x)$. Pour $n \in \mathbb{Z}$ négatif, on utilise le fait que

$$\ln(x^n) + \ln(x^{-n}) = \ln(1) = 0,$$

dont on déduit

$$\ln(x^n) = -\ln(x^{-n}) = n\ln(x).$$

(iv) Comme ln est strictement croissante on a $\ln(2) > 0 = \ln(1)$. Soit $M \geqslant 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\ln(2) \geqslant M$. Par croissance, on obtient que pour tout $x \geqslant 2^n$ on a $\ln(x) \geqslant \ln(2^n) = n\ln(2) \geqslant M$. Cela prouve que

$$\ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

D'après la propriété précédente on a pour tout $x \in]0,1[$

$$\ln(x) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty.$$

(v) Puisque ln est strictement monotone, elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur son image. Par ailleurs c'est une fonction continue, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires et les limites précédentes on peut montrer (comme à l'exercice 3.11) que ln est une fonction surjective de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Finalement, ln est bien une bijection strictement croissante de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

□

Définition. On appelle fonction **exponentielle** et on note $\exp : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$ la bijection réciproque de ln. En outre on note $e = \exp(1)$.

Proposition 8.4. *La fonction* exp *vérifie les propriétés suivantes :*

(i) $\exp(0) = 1$.

(ii) exp *est de classe* C^∞ *et* $\exp' = \exp$.

(iii) exp *est strictement croissante.*

(iv) Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *on a*

$$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b).$$

(v) On a

$$\exp(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0 \quad \textit{et} \quad \exp(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

(vi) exp *réalise une bijection de* $\mathbb{R}$ *dans* $]0,+\infty[$.

(vii) exp *est l'unique fonction vérifiant les deux premières propriétés.*

Démonstration. (i) Pour la première propriété on applique simplement la fonction exponentielle de chaque côté de l'égalité $\ln(1) = 0$.

(ii) La fonction exponentielle est de classe C^∞ comme réciproque d'une bijection de classe C^∞ dont la dérivée ne s'annule jamais. En outre pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\exp'(x) = \frac{1}{\ln'(\exp(x))} = \exp(x).$$

(iii) La fonction exponentielle est strictement croissante comme réciproque d'une bijection strictement croissante.

(iv) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a d'après la proposition précédente

$$\ln(\exp(a)\exp(b)) = \ln(\exp(a)) + \ln(\exp(b)) = a + b.$$

En appliquant exp, on obtient bien $\exp(a + b) = \exp(a)\exp(b)$.

(v) Soit $M > 0$. Pour tout $x \geqslant \ln(M)$ on a $\exp(x) \geqslant \exp(\ln(M)) = M$. Cela prouve que $\exp(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. On obtient également

$$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0.$$

(vi) Cette propriété est conséquence immédiate de la définition.

(vii) On suppose que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$ et $f' = f$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on note $g(x) = f(x)\exp(-x)$. Alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$g'(x) = f'(x)\exp(-x) - f(x)\exp(-x) = 0.$$

Cela prouve que g est constante sur $\mathbb{R}$. Puisque $g(0) = 1$, on obtient que $f(x)\exp(-x) = 1$, soit $f(x) = \exp(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$\square$

Définition. Pour $a \in]0, +\infty[$ et $b \in \mathbb{R}$ on note

$$a^b = \exp(b\ln(a)).$$

Remarque. — Les définitions de a^n et $a^{\frac{1}{n}}$ coïncident avec celles du paragraphe 8.1.

— Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$e^x = \exp(x).$$

Dans les deux propositions suivantes, on s'intéresse aux fonctions de la forme $x \mapsto x^b$ et $x \mapsto a^x$. Attention à ne pas les confondre ! En outre, ces notations sont pratiques mais en cas de doute, par exemple pour calculer les dérivées, pensez à revenir à la définition avec exponentielle et logarithme.

Proposition 8.5. *Soit $b \in \mathbb{R}$. L'application $x \mapsto x^b$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ de dérivée*

$$\frac{d}{dx}(x^b) = bx^{b-1}.$$

(i) On suppose que $b > 0$. Alors la fonction $x \mapsto x^b$ est prolongeable par continuité par 0 en 0, elle réalise alors une bijection strictement croissante de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$ et sa réciproque est $x \mapsto x^{\frac{1}{b}}$.

(ii) On suppose que $b < 0$. Alors la fonction $x \mapsto x^b$ réalise une bijection strictement décroissante de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$ et sa réciproque est $x \mapsto x^{\frac{1}{b}}$.

Proposition 8.6. *Soit $a > 0$. Alors l'application $x \mapsto a^x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, de dérivée*

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \ln(a)a^x.$$

(i) On suppose que $a > 1$. Alors la fonction $x \mapsto a^x$ réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$.

(ii) On suppose que $a \in]0, 1[$. Alors la fonction $x \mapsto a^x$ réalise une bijection strictement décroissante de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$.

Dans les deux cas, la réciproque est appelée **logarithme de base** a*.*

Proposition 8.7 (Croissances comparées). — *Pour tout $(\alpha, \beta) \in]0, +\infty[^2$ on a*

$$\ln(x) = \underset{x \to +\infty}{o}(x^\alpha), \quad x^\alpha = \underset{x \to +\infty}{o}(e^{\beta x}) \quad \text{et} \quad e^{-\beta x} = \underset{x \to +\infty}{o}(x^{-\alpha}).$$

— *Pour tout $\alpha \in]0, +\infty[$ on a*

$$\ln(x) = \underset{x \to 0}{o}(x^{-\alpha}).$$

Démonstration. L'application $f : x \mapsto \frac{x^{2\alpha}}{e^{\beta x}}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs positives. Pour tout $x > 0$ on a

$$f'(x) = \frac{e^{\beta x} x^{2\alpha - 1}}{e^{2\beta x}} (2\alpha - \beta x).$$

f atteint donc son maximum en $x_0 = \frac{2\alpha}{\beta}$ et pour tout $x > 0$ on a

$$0 \leqslant \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = \frac{f(x)}{x^\alpha} \leqslant \frac{f(x_0)}{x^\alpha} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$

Les autres propriétés se montrent de façon analogue. □

8.3 Réciproques des fonctions trigonométriques

Pour la définition des fonctions sinus et cosinus, on s'en remet à la vision géométrique. En deuxième année, ces deux fonctions pourront être définies par leurs séries respectives. On admet les propriétés suivantes :

Proposition 8.8. *(i) Les fonction* sin *et* cos *sont 2π-périodiques et surjectives de $\mathbb{R}$ dans $[-1, 1]$.*

(ii) La fonction cos *est paire et la fonction* sin *est impaire.*

(iii) Les fonctions sin *et* cos *sont dérivables sur $\mathbb{R}$. En outre*

$$\sin' = \cos \quad \text{et} \quad \cos' = -\sin.$$

On en déduit par récurrence que les fonctions sin *et* cos *sont en fait de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.*

On renvoie par exemple au cours en ligne suivant pour plus de détails sur l'obtention de ces propriétés par des arguments géométriques :

`http://uel.unisciel.fr/mathematiques/analyse3/analyse3_ch02/co/apprendre_ch02_002.html`

Proposition-Définition. La fonction sinus réalise une bijection strictement croissante de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1, 1]$. On note

$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

la bijection réciproque.

Par définition de la fonction arcsin, on a pour tout $x \in [-1,1]$

$$\sin(\arcsin(x)) = x.$$

De même, pour tout $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ on a

$$\arcsin(\sin(\theta)) = \theta.$$

⚠ Pour $\theta \in \mathbb{R}\backslash\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ la quantité $\arcsin(\sin(\theta))$ est bien définie mais

$$\arcsin(\sin(\theta)) \neq \theta.$$

C'est évident, puisque le membre de gauche est dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ mais pas le membre de droite. Finalement, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\arcsin(\sin(\theta)) = \theta \quad \Longleftrightarrow \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Proposition 8.9. *(i) La fonction* arcsin *est continue et strictement croissante sur* $[-1,1]$.

(ii) La fonction arcsin *est de classe* C^∞ *sur* $]-1,1[$ *et pour tout* $x \in]-1,1[$ *on a*

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démonstration. La première propriété résulte du résultat sur les fonctions réciproques. En outre, comme la dérivée du sinus ne s'annule par sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, la fonction arcsin est bien de classe C^∞ sur $]-1,1[$, et pour $x \in]-1,1[$ on a

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

car $\cos(\arcsin(x)) > 0$ et $\cos(\arcsin(x))^2 = 1 - \sin(\arcsin(x))^2 = 1 - x^2$. □

Remarque. On note que

$$\arcsin'(x) \xrightarrow[x\to\pm1]{} +\infty.$$

Proposition-Définition. La fonction cosinus réalise une bijection strictement décroissante de $[0,\pi]$ dans $[-1,1]$. On note

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$$

la bijection réciproque.

Comme précédemment on a

$$\forall x \in [-1,1], \quad \cos(\arccos(x)) = x,$$

et

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \arccos(\cos(\theta)) = \theta \Longleftrightarrow \theta \in [0,\pi].$$

Proposition 8.10. *(i) La fonction* arccos *est continue et strictement décroissante sur* $[-1,1]$.

(ii) La fonction arccos *est de classe* C^∞ *sur* $]-1,1[$ *et pour tout* $x \in]-1,1[$ *on a*

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Proposition 8.11. *Pour tout* $x \in [-1,1]$ *on a*

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Démonstration 1. Soit $x \in [-1,1]$. On a

$$x = \cos(\arccos(x)) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(x)\right)$$

et, puisque $\frac{\pi}{2} - \arccos(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\arcsin(x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(x).$$

$\square$

Démonstration 2. Pour $x \in [-1,1]$ on note $f(x) = \arcsin(x) + \arccos(x)$. Alors f est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$ de dérivée

$$f' : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Cela prouve que f est constante sur $[-1,1]$. Comme $f(0) = \frac{\pi}{2}$, on obtient que $f(x) = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in [-1,1]$. $\square$

On note que pour $\theta \in \mathbb{R}$ on a

$$\cos(\theta) = 0 \iff \theta \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Définition. Pour $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta - \frac{\pi}{2} \notin \pi\mathbb{Z}$ on note

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}.$$

Cela définit une fonction de classe C^∞ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ on a

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos(x)^2} = 1 + \tan^2(x).$$

Proposition-Définition. La fonction tan réalise une bijection strictement croissante de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$. On note

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

sa bijection réciproque.

Proposition 8.12. *(i) La fonction* arctan *est continue et strictement croissante sur* $\mathbb{R}$. *En particulier*

$$\arctan(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\frac{\pi}{2} \quad \textit{et} \quad \arctan(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}.$$

(ii) La fonction arctan *est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a*

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan(\arctan(x)) = x,$$

et

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi\right), \quad \arctan(\tan(\theta)) = \theta \iff \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Proposition 8.13. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a*

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \textit{si } x > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \textit{si } x < 0. \end{cases}$$

Démonstration. Pour $x \in \mathbb{R}^*$ on note

$$f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

Cela définit une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Cela implique que f est constante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Il ne reste plus qu'à calculer, par exemple,

$$f(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad f(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

(on peut aussi remarquer que la fonction f est impaire). □

8.4 Fonctions hyperboliques

Définition. Pour $x \in \mathbb{R}$ on note

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

et

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Proposition 8.14. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a*

$$\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1.$$

Proposition-Définition. (i) La fonction cosh est paire. Elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ de dérivée sinh. En outre elle définit une bijection strictement croissante de $[0, +\infty[$ dans $[1, +\infty[$. On note alors argcosh : $[1, +\infty[\to [0, +\infty[$ sa bijection réciproque.

(ii) La fonction sinh est impaire. Elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ de dérivée cosh. En outre elle définit une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note alors argsinh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa bijection réciproque.

(iii) La fonction tanh est impaire. Elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh(x)^2} = 1 - \tanh^2(x).$$

La fonction tanh définit une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$. On note alors argtanh $:]-1,1[\to \mathbb{R}$ sa bijection réciproque.

8.5 Exercices

***Exercice* 38.** Dans cet exercice on ne suppose pas connue la fonction exponentielle. On suppose que f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

(i) $f(0) = 1$,

(ii) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = f$.

1. En considérant la fonction $t \mapsto f(t)f(-t)$, montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $f(t) \neq 0$ et

$$f(-t) = \frac{1}{f(t)}.$$

2. Montrer que $f(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que si g est une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$, alors $g = f$.
4. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $C \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique fonction h dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $h(0) = C$ et $h' = \alpha h$, donnée par $h : t \mapsto Cf(\alpha t)$.
5. Soit $s \in \mathbb{R}$. En considérant la fonction $t \mapsto \frac{f(t+s)}{f(s)}$, montrer que $f(t+s) = f(t)f(s)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
6. Montrer que f est croissante, puis que pour tout $t \geqslant 0$ on a $f(t) \geqslant t$. En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction $\varphi_n : x \mapsto \frac{f(x)}{x^{n+1}}$. Montrer que φ_n est croissante sur $[n, \infty[$. En déduire la limite de $\frac{f(x)}{x^n}$ en $+\infty$.
8. Montrer que f définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$. Montrer que la bijection réciproque est dérivable et calculer sa dérivée en tout point.

***Exercice* 39.** Étudier l'existence et, le cas échéant, la valeur des limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^3e^{-x}$ **2.** $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^{-3}e^{-x}$ **3.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{-2}\ln(x)^3$ **4.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (x\ln(x))^{-4}e^x$

5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \ln(x)^4xe^{-2x}$ **6.** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^2e^{2x}$ **7.** $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\sin(1/x)$ **8.** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln(e^x + e^{-x})$

9. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ **10.** $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}$ **11.** $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}$ **12.** $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{e^{2x} - e^2}{x-1}$

***Exercice* 40.** On considère la fonction f définie par $f(x) = e^{\cos x + \sin^2 x}$.
1. Étudier la fonction f sur l'intervalle $I = [0, 2\pi]$.
2. Combien l'équation $f(x) = \sqrt{e}$ a-t-elle de solution dans I ?

***Exercice* 41.** On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln\big(\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})\big)$.
1. Montrer que f est définie, continue et dérivable sur $I = \big[0, \frac{\pi}{2}\big[$.
2. Calculer $f'(x)$ et simplifier l'expression.
3. Montrer que f est une bijection de I sur un intervalle J à déterminer.
4. On note g la fonction réciproque de f.
a. Préciser les variations de g.
b. Calculer $g'(f(x))$ pour tout $x \in I$.
c. Expliciter g et retrouver les résultats précédents.

***Exercice* 42. 1.** Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$ on a

$$\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}.$$

2. Calculer $\arccos\big(\sin(3\pi/2)\big)$, $\arcsin\big(\sin(11\pi/7)\big)$, $\arctan\big(\tan(-17\pi/5)\big)$.
3. On considère sur $\mathbb{R}$ la fonction $f : x \mapsto \arcsin\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$.
a. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable au moins sur $\mathbb{R}^*$.
b. Calculer sa dérivée et la simplifier au maximum.
c. f est-elle dérivable en 0 ?
d. Donner une expression plus simple de f par une fonction usuelle.

***Exercice* 43. 1.** Pour $x \in \mathbb{R}^*$, calculer : $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
2. Donner deux expressions de la dérivée de $x \mapsto \tan(x)$. En déduire $\cos^2(\arctan x)$.
3. On considère la fonction définie par $g(x) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ sur $I =]0, +\infty[$.
a. Montrer que g est continue sur I.
b. Calculer la limite de g à droite en 0. Montrer qu'on peut prolonger g par continuité en 0. On note toujours g la fonction ainsi prolongée.
c. Montrer que g est dérivable sur I et calculer g'.
d. g est telle dérivable en 0 ? On pourra utiliser la question 1.
e. Montrer que g est une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J à déterminer.
f. La fonction réciproque g^{-1} est-elle croissante ? décroissante ?

***Exercice* 44.** Pour $x > 1$ on note $f(x) = \sin\left(\frac{\frac{\pi x}{2}+1}{x-1}\right)$.
1. Donner l'ensemble de définition ainsi que l'ensemble image de la fonction arcsin.
2. Montrer qu'il existe $x_0 > 1$ tel que $\frac{\frac{\pi x_0}{2}+1}{x_0-1} = \frac{3\pi}{2}$.
3. Montrer que f définit une bijection de $[x_0, +\infty[$ vers un intervalle J que l'on précisera. On notera g la réciproque cette bijection.
4. Donner une expression de g.

9 Application à l'étude des arcs paramétrés plans

9.1 Régularité des fonctions à valeurs vectorielles (version rapide)

On considère dans cette section des fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ (ou de façon équivalente dans $\mathbb{C}$). On peut considérer de la même façon des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ pour $d \in \mathbb{N}^*$.

Par exemple, la position $M(t)$ d'un mobile à l'instant t dans le plan peut-être paramétrée par ses deux coordonnées $(x(t), y(t))$, ce qui définit une fonction d'un intervalle de temps I à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. En identifiant $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$, on peut voir $M(t)$ comme le complexe $x(t) + iy(t)$.

La norme euclidienne d'un point $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ est définie par

$$\|M\| = \sqrt{x^2 + y^2} = |x + iy|\,.$$

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et M une fonction de I dans $\mathbb{R}^2$. Pour $t \in I$ on pose $M(t) = (x(t), y(t))$.

Définition 9.1. Soit $t_0 \in \overline{I}$ (éventuellement $+\infty$ ou $-\infty$). Soit $P \in \mathbb{R}^2$. On dit que $M(t)$ tend vers P quand t tend vers t_0, et on note

$$M(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} P,$$

si

$$\|M(t) - P\| \xrightarrow[t \to t_0]{} 0.$$

Remarque 9.2. On note $P = (\xi, \eta)$. Alors

$$M(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} P$$

si et seulement si

$$x(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} \xi \quad \text{et} \quad y(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} \eta.$$

Définition 9.3. Soit $t_0 \in I$. On dit que M est continue en t_0 si $M(t)$ tend vers $M(t_0)$ quand $t \to t_0$. On dit que M est continue sur I si M est continue en t pour tout $t \in I$.

Définition 9.4. Soit $t_0 \in I$. On dit que M est dérivable en t_0 si le quotient

$$\frac{M(t) - M(t_0)}{t - t_0}$$

(bien défini sur $I \backslash \{t_0\}$) admet une limite quand t tend vers t_0. Dans ce cas on note $M'(t_0)$ cette limite.

On dit que M est dérivable sur I si elle est dérivable en t pour tout $t \in I$. Cela définit une fonction dérivée M' de I dans $\mathbb{R}^2$.

Remarque 9.5. M est dérivable sur I si et seulement si les coordonnées x et y le sont.

On définit de la même manière les fonctions n fois dérivables, les fonctions de classe C^n, etc.

9.2 Premiers exemples d'arcs paramétrés plans

Définition 9.6. Soit $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. On appelle arc paramétré plan de classe C^k une application f de classe C^k d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

Exemple 9.7. Soient $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ deux points du plan. Alors

$$\sigma_{AB} : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \big((1-t)x_A + tx_B, (1-t)y_A + ty_B\big) \end{array} \right.$$

est un arc paramétré plan de classe C^∞. Son image est le segment $[A, B]$ joignant A à B.

On remarque que l'arc paramétré

$$\left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \big((1-t)x_B + tx_A, (1-t)y_B + ty_A\big) \end{array} \right.$$

décrit le même segment, mais parcouru en sens inverse.

Définition 9.8. Soient $f : I \to \mathbb{R}^2$ et $g : J \to \mathbb{R}^2$ deux arcs paramétrés de classe C^k. On dit que f et g sont équivalents (positivement équivalents) s'il existe un C^k difféormorphisme $\varphi : J \to I$ (croissant) tel que $g = f \circ \varphi$. Dans ce cas f et g ont même image.

Exemple 9.9. Les arcs paramétrés plans

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (\cos(t), \sin(t)) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad g : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R}^2 \\ s & \mapsto & (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s)) \end{array} \right.$$

sont positivement équivalents. L'arc

$$h : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ \tau & \mapsto & (\cos(\tau), -\sin(\tau)) \end{array} \right.$$

est équivalent aux précédents, mais pas positivement équivalent (le cercle est parcouru en sens inverse).

9.3 Étude pratique d'un arc paramétré plan

Soit I un domaine de $\mathbb{R}$ (ou en fait un domaine plus général) et $M : I \to \mathbb{R}^2$ un arc paramétré plan. On cherche à dessiner dans le plan l'allure de l'image de M. Pour $t \in I$ on note $M(t) = (x(t), y(t))$.

9.3.1 Tableau des variations conjointes

On suppose que M est dérivable sur I. On étudie alors les variations de x et de y, qu'on peut rapporter dans un même tableau. Cela donne déjà l'allure grossière de la trajectoire décrite par M.

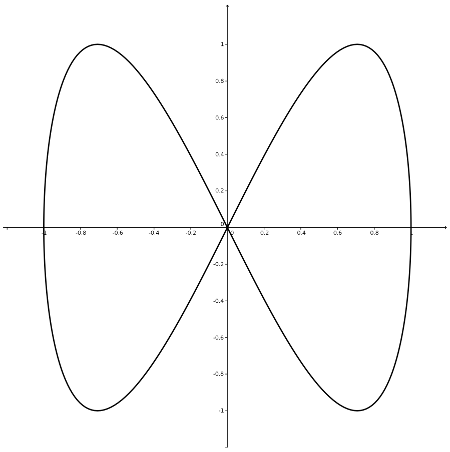
Exemple 9.10. On considère l'arc paramétré plan défini par

$$\forall t \in [0, 2\pi], \quad M(t) = (\cos(t), \sin(2t)).$$

On effectue une tableau de variation conjoint pour les deux coordonnées $x(t) = \cos(t)$ et $y(t) = \sin(2t)$.

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π		$\frac{5\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$x'(x)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x(x)$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	1
$y'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$y(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

En plaçant les points particuliers et grace aux variations des deux coordonées, on peut dessiner l'allure de l'image de M.



9.3.2 Tangente en un point

On cherche maintenant à décrire plus précisément l'allure de la trajectoire décrite par M au voisinage d'un point. On fixe $t_0 \in I$ et on s'intéresse à $M(t)$ pour t proche de t_0.

Définition 9.11. On suppose que M est de classe C^1. On dit que le point de paramètre t_0 est régulier si $M'(t_0) \neq 0$. Sinon on dit qu'il est singulier. On dit que l'arc M est régulier si chacun de ses points est régulier.

Si le point de paramètre t_0 est régulier, alors la droite passant par $M(t_0)$ et dirigée par le vecteur $M'(t_0)$ est tangente la courbe en $M(t_0)$.

Même si le point de paramètre t_0 est singulier, il peut y avoir une tangente à la courbe au point de paramètre t_0. Par exemple, supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ tels que

$$M(t_0 + h) = M(t_0) + h^p T + \underset{h \to 0}{o}(h^p), \tag{9.1}$$

alors la droite passant par $M(t_0)$ et dirigée par le vecteur T est tangente la courbe en $M(t_0)$. Dans ce cas on dit que p est le premier entier caractéristique au point de paramètre t_0. En particulier, si le point de paramètre t_0 est régulier, alors le premier entier caractéristique est 1.

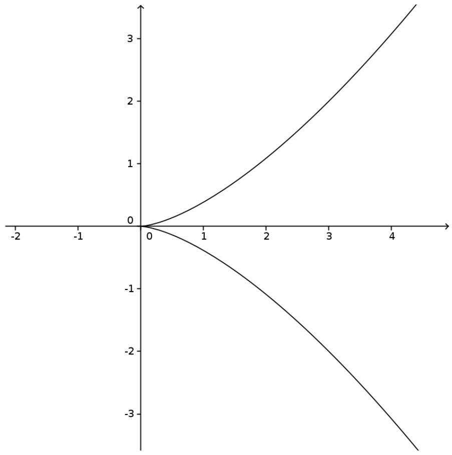
Exemple 9.12. On considère l'arc paramétré

$$M : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (3t^2, 2t^3) \end{cases}$$

Les points de paramètres $t \neq 0$ sont réguliers. En $t = 0$ on a

$$M(h) = h^2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \underset{h \to 0}{O}(h^3).$$

L'axe horizontal est tangent à M au point de paramètre 0.



On remarque qu'on peut aussi obtenir cette conclusion en étudiant la limite du rapport entre les accroissements de x et de y :

$$\frac{y(t) - y(0}{x(t) - x(0)} = \frac{2t^3}{3t^2} \xrightarrow[t \to 0]{} 0.$$

Cela indique que la courbe admet au point de paramètre 0 une tangente dont le coefficient directeur est 0 (il s'agit donc d'une tangente horizontale).

On note que si p est impair (ce qui est en particulier le cas pour un point régulier), alors par rapport au point $M(t_0)$ le point $M(t)$ est dans la direction de T pour $t > t_0$ proche de t_0 et dans la direction opposée pour $t < t_0$ proche de t_0. Plus précisément, si on note $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^2$, alors il existe $\delta > 0$ tel que pour $t \in I \cap [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ on a

$$\left\langle \overrightarrow{M(t_0)M(t)}, T \right\rangle \begin{cases} < 0 & \text{si } t < t_0, \\ > 0 & \text{si } t > t_0. \end{cases}$$

⚠ Attention au fait que pour $t_1, t_2 \in I$ tels que $t_1 \neq t_2$ et $M(t_1) = M(t_2)$ la courbe peut avoir deux tangentes différentes aux points de paramètres t_1 et t_2. Si on reprend l'exemple 9.10, a $M\left(\frac{\pi}{2}\right) = M\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (0, 0)$ et

$$M'\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M'\left(\frac{3}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi la droite d'équation $y = 2x$ est tangente à la courbe au point de paramètre $\frac{\pi}{2}$ et la droite d'équation $y = -2x$ est tangente à la courbe au point de paramètre $\frac{3\pi}{2}$.

9.3.3 Position par rapport à la tangente

Lorsque la courbe de M admet une tangente au point de paramètre t_0, on peut préciser la position de la courbe par rapport à la tangente.

Soit $t_0 \in I$ et p et T comme en (9.1). On suppose qu'il existe un entier $q > p$ et un vecteur $\overrightarrow{A}$ qui n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{T}$ tels que

$$M(t_0 + h) = \left(h^p + \underset{h\to 0}{o}(h^p)\right)\overrightarrow{T} + h^q\overrightarrow{A} + \underset{h\to 0}{o}(h^q).$$

On dit alors que q est le deuxième entier caractéristique au point de paramètre t_0. Si q est pair, alors pour $t \neq t_0$ proche de t_0 le point $M(t)$ est du côté de la tangente vers lequel pointe $\overrightarrow{A}$. Si q est impair, alors $M(t)$ est du côté de la tangente vers lequel point $\overrightarrow{A}$ pour $t > t_0$ proche de t_0 et de l'autre côté pour $t < t_0$ proche de t_0.

Définition 9.13. On suppose que M est de classe C^2. On dit alors que le point de paramètre t_0 est birégulier si $M'(t_0)$ et $M''(t_0)$ ne sont pas colinéaires (en particulier ils ne sont pas nuls).

On revient sur l'exemple 9.10. Les points de paramètres différents de $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$. Entre $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{2}$ le point $M(t)$ « tourne vers la gauche », entre $t = \frac{\pi}{2}$ et $t = \frac{3\pi}{2}$ il « tourne vers la droite », et enfin entre $t = \frac{3\pi}{2}$ et $t = 2\pi$ il tourne de nouveau vers la gauche. En $t = \frac{\pi}{2}$ et $t = \frac{3\pi}{2}$ on a des points d'inflexion. La dérivée seconde est colinéaire à la dérivée première, et le deuxième entier caractéristique est 3.

Selon la parité de p et de q on a donc quatre comportement typiques pour le comportement de M au voisinage de t_0 :
- p impair et q pair : point ordinaire ;
- p impair et q impair : point d'inflexion ;
- p pair et q impair : point de rebroussement de première espèce ;
- p pair et q pair : point de rebroussement de seconde espèce.

9.3.4 Branches infinies

Soit maintenant t_0 une borne de I (éventuellement infinie) n'appartenant pas à I.

Définition 9.14. On dit que M admet une branche infinie en t_0 si

$$\|M(t)\| \xrightarrow[t\to t_0]{} +\infty.$$

Définition 9.15. La courbe de M admet en t_0
- une asymptote (horizontale) d'équation $y = \alpha$ si $|x(t)| \to +\infty$ et $y(t) \to \alpha$ quand $t \to t_0$;
- une asymptote (verticale) d'équation $x = \beta$ si $x(t) \to \beta$ et $|y(t)| \to +\infty$ quand $t \to t_0$;
- une asymptote (oblique) d'équation $y = ax + b$ si

$$\frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t\to t_0]{} a \quad \text{et} \quad y(t) - ax(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} b.$$

On peut également définir d'autres types de comportements pour des branches infinies, mais on n'ira pas plus loin ici.

Exemple 9.16.

9.4 Coordonnées polaires

On s'intéresse dans ce paragraphe aux courbes définies par une equation de la forme

$$r = \rho(\theta),$$

où ρ est une fonction d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Cela correspond à la courbe définie par l'arc paramétré

$$M : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^2 \\ \theta & \mapsto & (\rho(\theta)\cos(\theta), \rho(\theta)\sin(\theta)) \end{array} \right.$$

Il ne s'agit donc que d'un cas particulier d'arc paramétrés plans, que l'on peut donc étudier comme précédemment. Néanmoins, il est en général plus efficace d'adopter des notations et des méthodes adaptées à ce cas particulier.

⚠Rien n'interdit à ρ de prendre des valeurs négatives.

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ on note

$$e_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

Pour $\theta \in I$ on a alors $M(\theta) = \rho(\theta)e_\theta$. On note v_θ la dérivée de e_θ par rapport à θ. On a alors

$$v_\theta = \frac{\mathrm{d}e_\theta}{\mathrm{d}\theta} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} = e_{\theta+\frac{\pi}{2}}.$$

En particulier, v_θ est orthogonal à e_θ.

On suppose maintenant que la fonction ρ est dérivable sur I. Alors M est dérivable et pour $\theta \in I$ on a

$$M'(\theta) = \rho'(\theta)e_\theta + \rho(\theta)v_\theta.$$

En particulier, si $\rho(\theta) \neq 0$ alors $M'(\theta) \neq 0$ (point régulier). Si $\rho(\theta) = 0$ et $\rho'(\theta) = 0$ alors

$$M(\theta + h) = hM'(\theta) + \underset{h\to 0}{o}(h) = h\rho'(\theta)e_\theta + \underset{h\to 0}{o}(h).$$

Ainsi la droite passant par l'origine et d'angle θ est tangente à M au point de paramètre θ.