Mathématiques pour les glomorphes à rayures

Algèbre linéaire

$\bowtie$

(Chapitre en cours de construction)

Dans tous ce chapitre, K désignera un *corps*. On ne considérera que des situations où K est le corps $\mathbb{R}$ des réels ou le corps $\mathbb{C}$ des complexes, si bien qu'il n'est pas nécessaire de savoir ce qu'est un corps général. Les éléments de K seront appelés *scalaires*.

On a vu que les structures des ensembles de solutions pour concernant certaines équations de suites récurrentes ou pour certaines équations différentielles avaient la mm̂e structure, et que les démonstrations étaient analogues. Il semble intéressant de comprendre quel est le point commun entre les deux problèmes qui explique qu'ils se ressemblent tant. Plutôt que de traiter séparément chaque situation, si on est capable d'identifier quelle cause entraine quelle conséquence dans un cadre abstrait commun, on pourrait traiter d'un seul coup toutes les autres situations similaires qui se présenteront ensuite.

C'est l'objectif des structures algébriques, identifier ce qui est commun dans des contextes a priori très variés, et voir tout ce qu'on peut déduire à partir de ces seuls points communs, afin d'obtenir les mm̂es conclusions valables pour tous ces problèmes très différents.

On étudie dans ce chapitre les espaces vectoriels, cadre adapté pour étudier ensuite les applications linéaires. Ce n'est pas la structure algébrique la plus simple, mais c'est peut-être la plus simple à appréhender car le cas modèle est un cadre avec lequel on est déjà familié : les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

1 Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels

Le but de la notion d'espace vectoriel est donc de regrouper sous un même nom tous les ensembles munis d'opérations qui se comportent comme pour les vecteurs de l'espace usuel. Le but est de généraliser à tous ces contextes toutes les propriétés déjà connues pour les vecteurs.

On considère par exemple le cas de $\mathbb{R}^3$. On peut additionner les vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}.$$

Julien Royer
Université Paul Sabatier - Toulouse 3
Version du 5 mai 2023

On note qu'on utilise l'addition connue sur $\mathbb{R}$ pour définir l'addition sur $\mathbb{R}^3$. Il est alors facile de vérifier que cette addition verifie toutes les bonnes propriétés de l'addition des réels. Cette addition est *associative*. Cela signifie que pour tous $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z} \in \mathbb{R}^3$ on a

$$(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) + \overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} + (\overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}). \tag{1.1}$$

Cette addition admet un *élément neutre*. Il existe un vecteur $\overrightarrow{0}$ tel que

$$\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3, \quad \overrightarrow{x} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}. \tag{1.2}$$

Il suffit de prendre

$$\overrightarrow{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

où 0 est l'élément neutre pour l'addition sur $\mathbb{R}$. Enfin tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ admet un opposé :

$$\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3, \exists \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^3, \quad \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = \overrightarrow{y} + \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}. \tag{1.3}$$

On note alors $(-\overrightarrow{x})$ l'opposé de $\overrightarrow{x}$. Dans le cas de $\mathbb{R}^3$, l'opposé de $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3)$ est

$$-\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}.$$

Les propriétés (1.1), (1.2) et (1.3) font de $\mathbb{R}^3$, muni de son addition, ce qu'on appelle un *groupe*. C'est même un *groupe commutatif*, puisque l'addition est commutative :

$$\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^3, \quad \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = \overrightarrow{y} + \overrightarrow{x}.$$

On peut également multiplier les vecteurs par un réel. La définition est la suivante :

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}.$$

Avec les propriétés de la multiplication sur $\mathbb{R}$ on peut vérifier les propriétés suivantes pour cette *multiplication externe* sur $\mathbb{R}^3$. Par associativité de la multiplication sur $\mathbb{R}$, on obtient que

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathsf{K}^2, \forall \overrightarrow{x} \in \mathsf{E}, \quad \lambda \cdot (\mu \cdot \overrightarrow{x}) = (\lambda\mu) \cdot \overrightarrow{x} \tag{1.4}$$

Comme 1 est un élément neutre pour la multiplication de $\mathbb{R}$, on a aussi

$$\forall \overrightarrow{x} \in \mathsf{E}, \quad 1 \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}. \tag{1.5}$$

Enfin, la propriété de distribution entre l'addition et la multiplication de $\mathbb{R}$ donne

$$\forall \lambda \in \mathsf{K}, \forall (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in \mathsf{E}^2, \quad \lambda \cdot (\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = \lambda \cdot \overrightarrow{x} + \lambda \cdot \overrightarrow{y} \tag{1.6}$$

et

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathsf{K}^2, \forall \overrightarrow{x} \in \mathsf{E}, \quad (\lambda + \mu) \cdot \overrightarrow{x} = \lambda \cdot \overrightarrow{x} + \mu \cdot \overrightarrow{x}. \tag{1.7}$$

1.1 Définition et exemples de référence

Définition 1.1. On appelle K-espace vectoriel un ensemble non-vide E muni d'une loi de composition interne (l'addition)

$$\begin{cases} \mathsf{E}\times\mathsf{E} & \to & \mathsf{E} \\ (\vec{x},\vec{y}) & \mapsto & \vec{x}+\vec{y} \end{cases}$$

et d'une multiplication externe

$$\begin{cases} \mathsf{K}\times\mathsf{E} & \to & \mathsf{E} \\ (\lambda,\vec{x}) & \mapsto & \lambda\cdot\vec{x} \end{cases}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

(i) l'addition est commutative : $\forall(\vec{x},\vec{y})\in\mathsf{E}^2$, $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$;

(ii) l'addition est associative : $\forall(\vec{x},\vec{y},\vec{z})\in\mathsf{E}^3$, $(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$;

(iii) l'addition admet un élément neutre : il existe $\vec{0}\in\mathsf{E}$ tel que pour tout $\vec{x}\in\mathsf{E}$ on a $\vec{x}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{x}=\vec{0}$;

(iv) tout élément $\vec{x}$ de E admet un opposé (inverse pour l'addition) : il existe $\vec{y}\in\mathsf{E}$ tel que $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}=\vec{0}$ (on note alors $\vec{y}=-\vec{x}$)

(v) $\forall\vec{x}\in\mathsf{E}$, $1_{\mathsf{K}}\cdot\vec{x}=\vec{x}$;

(vi) $\forall\lambda\in\mathsf{K},\forall(\vec{x},\vec{y})\in\mathsf{E}^2$, $\lambda\cdot(\vec{x}+\vec{y})=\lambda\cdot\vec{x}+\lambda\cdot\vec{y}$;

(vii) $\forall(\lambda,\mu)\in\mathsf{K}^2,\forall\vec{x}\in\mathsf{E}$, $(\lambda+\mu)\cdot\vec{x}=\lambda\cdot\vec{x}+\mu\cdot\vec{x}$;

(viii) $\forall(\lambda,\mu)\in\mathsf{K}^2,\forall\vec{x}\in\mathsf{E}$, $\lambda\cdot(\mu\cdot\vec{x})=(\lambda\mu)\cdot\vec{x}$.

Tous les exemples que l'on va donner sont basés sur le fait que $\mathbb{R}$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel*. En effet, il résulte de la construction de $\mathbb{R}$ que toutes les opérations de la définition 1.1 sont valables si les vecteurs sont, comme les scalaires, des réels. Dans ce cas le vecteur nul est simplement $\vec{0}=0$. De même, $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

À partir des opérations connues sur $\mathbb{R}$, on peut donner d'autres exemples d'espaces vectoriels, sur le modèle de ce qu'on a discuté en introduction (et en commençant d'ailleurs par ce cas).

Proposition 1.2. *L'ensemble $\mathbb{R}^2$, muni des opérations usuelles sur les vecteurs définies par*

$$\forall\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2,\forall\vec{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2,\quad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\end{pmatrix}$$

et

$$\forall\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2,\forall\lambda\in\mathbb{R},\quad \lambda\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda x_1\\\lambda y_2\end{pmatrix},$$

est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, dont l'élément neutre pour l'addition est $\vec{0}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. De même, $\mathbb{R}^d$ muni des opérations analogues est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et $\mathbb{C}^d$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel pour tout $d\in\mathbb{N}$.

On a dit que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. En ne prenant que des λ réels dans la définition 1.1, on peut aussi le voir comme un espace vectoriel réel.

Proposition 1.3. $\mathbb{C}$*, muni de ses opérations usuelles (en restreignant la multiplication au produit d'un réel avec un complexe), est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel.*

La façon dont on a muni $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ d'une structure d'espace vectoriel à partir de celle de $\mathbb{R}$ peut être généralisée au produit de n'importe quelle paire d'espaces vectoriels.

Proposition 1.4 (Espace vectoriel produit)**.** *Soient* E_1 *et* E_2 *deux* K*-espaces vectoriels. Alors* $\mathsf{E}_1 \times \mathsf{E}_2$ *est un* K*-espace vectoriel pour les opérations suivantes. Pour* $x_1, y_1 \in \mathsf{E}_1$*,* $x_2, y_2 \in \mathsf{E}_2$ *et* $\lambda \in \mathsf{K}$ *on pose*

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

et

$$\lambda \cdot (x_1, x_2) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2).$$

Dans les deux cas, on utilise pour la première coordonnée les opérations sur E_1 *et pour la seconde coordonnées les opérations sur* E_2*. L'ensemble* $\mathsf{E}_1 \times \mathsf{E}_2$ *muni de ces opérations est alors un* K*-espace vectoriel.*

Proposition 1.5. $\mathsf{K}[X]$ *est un* K*-espace vectoriel pour les opérations (somme et multiplication par un scalaire) usuelles.*

Proposition 1.6. *L'ensemble* $\mathsf{K}^{\mathbb{N}}$ *des suites à valeurs dans* K *est un* K*-espace vectoriel pour les opérations (somme et multiplication par un scalaire) usuelles.*

On peut voir un élément de K^d comme une application de $[\![1, d]\!]$ dans K et un élément de $\mathsf{K}^{\mathbb{N}}$ comme une application de $\mathbb{N}$ dans K. Ainsi l'exemple suivant généralise naturellement les précédents.

Proposition 1.7. *Soit* Ω *un ensemble quelconque. Alors l'ensemble* $\mathcal{F}(\Omega; \mathsf{K})$ *des fonctions de* Ω *dans* K *est un* K*-espace vectoriel pour les opérations usuelles : pour* $f, g \in \mathcal{F}(\Omega; \mathbb{R})$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *on définit* $(f + g)$ *et* λf *par*

$$\forall x \in \Omega, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \textit{et} \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x).$$

Très vite (c'est-à-dire dès maintenant), on va arrêter d'utiliser des flèches pour les vecteurs ou un point pour marquer la multiplication externe. Il faudra par exemple être prudent avec la notation 0 qui pourra à la fois désigner le scalaire nul dans K et le vecteur nul dans E. Si on est attentif à la nature des objets que l'on manipule, il ne doit pas y avoir d'ambicuïté, mais on peut utiliser des notations différentes quand cela facilite la compréhension.

On peut de la même façon munir $\mathcal{F}(\Omega, \mathsf{E})$, où Ω est un ensemble quelconque et E est un K-espace vectoriel quelconque, d'une structure de K-espace vectoriel.

1.2 Sous-espaces vectoriels

Il apparaît assez clairement que la définition 1.1 va être pénible à vérifier en pratique. On va donc s'empresser de le faire le moins possible. On ne le fait que pour quelques espaces vectoriels de références (dont certains ont déjà été discutés au paragraphe précédent) et ensuite, bien souvent, on pourra montrer qu'un ensemble muni d'une addition et d'une multiplication est un espace vectoriel en le voyant comme le sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel déjà connu.

Définition 1.8. Soit E un K-espace vectoriel. Soit F une partie non vide de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si c'est un espace vectoriel pour les opérations définies par restriction des opérations sur E.

Proposition 1.9. *Soient* E *un espace vectoriel et* F *une partie de* E*. Alors* F *est un sous-espace vectoriel de* E *si et seulement si*

$$\begin{cases} 0 \in \mathsf{F}; \\ \forall x, y \in \mathsf{F},\ x + y \in \mathsf{F}; \\ \forall x \in \mathsf{F}, \forall \lambda \in \mathsf{K},\ \lambda x \in \mathsf{F}. \end{cases}$$

Remarque 1.10. De façon équivalente, F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

$$\begin{cases} 0 \in \mathsf{F}, \\ \forall x, y \in \mathsf{F}, \forall \lambda \in \mathsf{K}, \quad \lambda x + y \in \mathsf{F}. \end{cases}$$

Example 1.11.
— $\{0\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E.
— Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. La droite vectorielle d'équation $\alpha x_1 + \beta x_2 = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
— Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Ex. 1-2

1.3 Sommes de sous-espaces vectoriels, sous-espaces supplémentaires

Proposition 1.12. *Soit* E *un* K*-espace vectoriel et* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E*. Alors la somme*

$$\mathsf{F} + \mathsf{G} = \{x + y, x \in \mathsf{F}, y \in \mathsf{G}\}$$

est un sous-espace vectoriel de E*.*

Démonstration. Comme $0 \in \mathsf{F}$ et $0 \in \mathsf{G}$, on a $0 = 0 + 0 \in \mathsf{F} + \mathsf{G}$. Soient $x, y \in \mathsf{F} + \mathsf{G}$ et $\lambda \in \mathsf{K}$. Il existe $x_\mathsf{F}, y_\mathsf{F} \in \mathsf{F}$ et $x_\mathsf{G}, y_\mathsf{G} \in \mathsf{G}$ tels que $x = x_\mathsf{F} + x_\mathsf{G}$ et $y = y_\mathsf{F} + y_\mathsf{G}$. On a alors

$$\lambda x + y = \lambda(x_\mathsf{F} + x_\mathsf{G}) + (y_\mathsf{F} + y_\mathsf{G}) = (\underbrace{\lambda x_\mathsf{F} + y_\mathsf{F}}_{\in \mathsf{F}}) + (\underbrace{\lambda x_\mathsf{G} + y_\mathsf{G}}_{\in \mathsf{G}}) \in \mathsf{F} + \mathsf{G}.$$

Cela prouve que $\mathsf{F} + \mathsf{G}$ est un sous-espace vectoriel de E. □

Remarque 1.13. Attention à ne pas confondre $\mathsf{F} + \mathsf{G}$ et $\mathsf{F} \cup \mathsf{G}$. En général (sauf si l'un est inclus dans l'autre), l'union de deux sous-espaces vectoriels *n'est pas* un sous-espace vectoriel.

Définition 1.14. Soit E un K-espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont en somme directe si

$$\mathsf{F} \cap \mathsf{G} = \{0\}\,.$$

Dans ce cas on note la somme $\mathsf{F} \oplus \mathsf{G}$ plutôt que $\mathsf{F} + \mathsf{G}$.

Définition 1.15. Soit E un K-espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont supplémentaires dans E si $\mathsf{F} \cap \mathsf{G} = \{0\}$ et $\mathsf{F} + \mathsf{G} = \mathsf{E}$.

Exemple 1.16. Soit F et G deux droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$. Si elles ne sont pas confondues, alors elles sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.

Exemple 1.17. Les sous-espaces

$$\mathsf{F} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^3 \right\} \quad \text{et} \quad \mathsf{G} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 2t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

✐ Ex. 3-5

1.4 Exercices

(voir la feuille d'exercices plus complète disponible sur Moodle)

***Exercice* 1.** **1.** Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(x_0) = 0$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Montrer que l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
3. Montrer que l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

***Exercice* 2.** Soit ω un ensemble non vide et $(\mathsf{F}_j)_{j\in\omega}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Montrer que l'intersection $\bigcap_{j\in\omega} \mathsf{F}_j$ est un sous-espace vectoriel de E.

***Exercice* 3.** On note

$$\mathsf{F} = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\} \quad \mathsf{G} = \{(x, x), x \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que F et G sont des sous-espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.

***Exercice* 4.** On note

$$\mathsf{F} = \{P \in \mathbb{R}[X], P(0) = 0\} \quad \mathsf{G} = \left\{P \in \mathbb{R}[X], P'(0) = 0\right\}.$$

Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$. Sont-ils en somme directe ? Identifier la somme $\mathsf{F} + \mathsf{G}$.

***Exercice* 5.** On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note F l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont paires, et G l'ensemble de celles qui sont impaires. Montrer que F et G sont des sous-espaces supplémentaires dans E.

***Exercice* 6.** Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

***Exercice* 7.** Soient E un K-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. À quelle condition l'union $\mathsf{F} \cup \mathsf{G}$ est-elle un sous-espace vectoriel de E.

2 Bases, dimension d'un espace vectoriel, espaces de dimensions finies.

2.1 Combinaisons linéaires, sous-espace engendré par une famille de vecteurs

Définition 2.1. Soit E un espace vectoriel et A une partie de E. On appelle combinaison linéaire de vecteurs de A un vecteur de la forme

$$x = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k v_k$$

avec $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathsf{K}$ et $v_1, \dots, v_m \in A$. On note $\operatorname{vect}(A)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de A.

Proposition 2.2. *Soient E un espace vectoriel et A une partie de E. Alors $\operatorname{vect}(A)$ est un sous-espace vectoriel de E. C'est le plus petit (pour l'inclusion) sous-espace vectoriel de E contenant A (au sens où $\operatorname{vect}(A)$ est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A, voir l'exercice 2).*

Démonstration. **(A compléter)** □

Définition 2.3. Soit $\mathcal{F} = (v_j)_{j\in\omega}$ une famille quelconque de vecteurs de E. On note $\operatorname{vect}(\mathcal{F}) = \operatorname{vect}(v_j, j \in \omega)$.

Soit $(\lambda_j)_{j\in\omega}$ une famille de scalaire. On dit qu'elle est presque nulle si tous les λ_j, sauf un nombre fini, sont nuls. Autrement dit, l'ensemble $\{j \in \omega \mid \lambda_j \neq 0\}$ est fini.

Étant donnée une famille $\mathcal{F} = (v_j)_{j\in\omega}$ de vecteurs de E, $\operatorname{vect}(\mathcal{F})$ est alors l'ensemble des vecteurs de la forme

$$x = \sum_{j\in\omega} \lambda_j v_j$$

où $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une famille presque nulle.

Si $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_m)$ est une famille finie, $\operatorname{vect}(\mathcal{F})$ est simplement l'ensemble des vecteurs de la forme

$$x = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_j,$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathsf{K}$.

2.2 Familles libre, familles génératrices, bases

Soit E un K-espace vectoriel.

2.2.1 Familles génératrices

Définition 2.4. Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E. On dit que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice si $\operatorname{vect}(\mathcal{F}) = \mathsf{E}$.

En particulier, une famille finie $(v_1, \dots, v_m)$ de vecteurs de E est génératrice si pour tout $x \in \mathsf{E}$ il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathsf{K}$ tels que $x = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m$.

Remarque 2.5. Toute famille contenant une famille génératrice est génératrice.

Exemple 2.6. — $(x)_{x\in \mathsf{E}}$ est une famille génératrice de E (ce n'est pas très intéressant, mais c'est vrai).
- Deux vecteurs non-colinéaires de $\mathbb{R}^2$ forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$. Plus généralement, toute famille contenant au moins deux vecteurs non-colinéaires de $\mathbb{R}^2$ est génératrice.
- Trois vecteurs non-coplanaires de $\mathbb{R}^3$ forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$. Plus généralement, toute famille contenant au moins trois vecteurs non-coplanaires de $\mathbb{R}^3$ est génératrice.

2.2.2 Familles libres

Définition 2.7. Soit $\mathcal{F} = (v_j)_{j\in\omega}$ une famille de vecteurs de E. On dit que $\mathcal{F}$ est libre (ou que les v_j, $j \in \omega$, sont linéairement indépendants) si pour toute famille $(\lambda_j)_{j\in\omega}$ presque nulle d'éléments de K on a

$$\sum_{j\in\omega} \lambda_j v_j = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \forall j \in \omega,\ \lambda_j = 0.$$

Dans le cas contraire, on dit que la famille $\mathcal{F}$ est liée (les v_j, $j \in \omega$, sont linéairement dépendants).

En particulier, une famille finie $(v_1, \dots, v_m)$ de vecteurs de E est libre si pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathsf{K}$ tels que $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0$ on a $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$.

Remarque 2.8. La famille $\varnothing$ est libre, tandis que la famille $\{0\}$ est liée.

Exemple 2.9. — Une famille de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ est libre si et seulement si ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.
- Une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$ est nécessairement liée.

Proposition 2.10. (i) *Toute sous-famille d'une famille libre est libre. De façon équivalente, toute famille contenant une famille liée est liée.*

(ii) *Si une famille est liée, on peut écrire l'un des vecteurs comme combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.*

(iii) *Une famille obtenue par concaténation d'une famille libre $\mathcal{L}$ et d'un vecteur $v \in \mathsf{E}\backslash \mathrm{vect}(\mathcal{L})$ est libre.*

Proposition 2.11. *Soit $\mathcal{L} = (v_j)_{j\in\omega}$ une famille libre de vecteurs de E et $x \in \mathrm{vect}(\mathcal{L})$. Alors il existe une unique famille $(\lambda_k)_{j\in\omega}$ presque nulle de scalaires telle que*

$$x = \sum_{j\in\omega} \lambda_j v_j.$$

Démonstration. On suppose que $(\lambda_j)_{j\in\omega}$ et $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sont deux familles presque nulles de scalaires telles que

$$x = \sum_{j\in\omega} \lambda_j v_j = \sum_{j\in\omega} \mu_j v_j.$$

Alors la famille $(\lambda_j - \mu_j)_{j\in\omega}$ est presque nulle et on a

$$\sum_{j\in\omega} (\lambda_j - \mu_j) v_j = 0.$$

Comme la famille $\mathcal{L}$ est libre, cela implique que $\lambda_j = \mu_j$ pour tout $j \in \omega$. □

2.2.3 Bases

Définition 2.12. Une famille de vecteurs de E est une base si elle est libre et génératrice.

✎ Ex. 11

Exemples 2.13. — $\varnothing$ est une base de $\{0\}$;

- — (1) est une base de K (en fait, (x) est une base de K pour tout $x \in \mathsf{K} \setminus \{0\}$) ;
- — Deux vecteurs non-colinéaires de $\mathbb{R}^2$ forment une base de $\mathbb{R}^2$;
- — Trois vecteurs non-coplanaires de $\mathbb{R}^3$ forment une base de $\mathbb{R}^3$;
- — (1) est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, et $(1, i)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$;
- — Soit $d \in \mathbb{N}$. Pour $j \in [\![1, d]\!]$ on note
$$e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$
(où l'unique coefficient 1 est en j-ième position). Alors la famille $(e_j)_{1 \leqslant j \leqslant d}$ est une base de K^d. Elle est appelée base canonique de $\mathbb{R}^d$.
- — La famille $(X^j)_{j \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathsf{K}[X]$. Elle est appelée base canonique de $\mathsf{K}[X]$.

Définition 2.14. On suppose que $\mathcal{B} = (e_j)_{j \in \omega}$ est une base de E. Soit $x \in \mathsf{E}$ et $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ l'unique famille presque nulle de scalaires telles que
$$x = \sum_{j \in \omega} x_j e_j.$$
Alors les x_j, $j \in \omega$, sont appelés coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$. On note alors e_j^* l'application qui à $x \in \mathsf{E}$ associe sa coordonnée x_j selon le vecteur e_j.

Remarque 2.15. On considère le cas $\mathsf{E} = \mathsf{K}^n$. Si β est la base canonique de K^n (et seulement dans ce cas), tout vecteur coïncide avec le vecteur de ses coordonnées dans la base β. En dehors de ce cas très particulier, il faut bien distinguer un vecteur de E et son vecteur de coordonnées dans une base (c'est particulièrement perturbant si $\mathsf{E} = \mathsf{K}^n$ mais β n'est pas la base canonique). ✎ Ex. 12

Exemple 2.16. On considère dans $\mathbb{R}^2$ les vecteurs
$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Les familles (e_1, e_2) et (β_1, β_2) sont des bases de $\mathbb{R}^2$. Étant donné un vecteur
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$
on a
$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 \quad \text{et} \quad x = (x_1 - x_2)\beta_1 + x_2 \beta_2.$$
On observe en particulier que même si $e_1 = \beta_1$, on a $e_1^* \neq \beta_1^*$. Ainsi les applications coordonnées dépendent bien de tous les vecteurs de la base considérée.

2.3 Espaces vectoriels de dimensions finies, dimension d'un espace vectoriel

Définition 2.17. Soit E un K-espace vectoriel. On dit que E est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie (contenant un nombre fini de vecteurs). Sinon on dit que E est de dimension infinie.

Lemme 2.18. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Soient $\mathcal{L}$ une famille libre de E et $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$.*

Démonstration. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des familles libres de E contenant $\mathcal{L}$ et contenues dans $\mathcal{G}$. Alors $\mathcal{A}$ n'est pas vide (il contient $\mathcal{L}$) et a un nombre fini d'éléments (qui sont toutes des familles finies) car $\mathcal{G}$ est finie. On choisit alors une famille $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ de cardinal maximal. Elle est libre par définition. Soit $g \in \mathcal{G}$. Comme la concaténation de $\mathcal{B}$ avec g contient $\mathcal{L}$, est contenue dans $\mathcal{G}$ et a plus d'éléments que $\mathcal{B}$, elle ne peut pas être libre. On a donc $g \in \operatorname{vect}(\mathcal{B})$. Ainsi $\mathcal{G} \subset \operatorname{vect}(\mathcal{B})$ et $\mathsf{E} = \operatorname{vect}(\mathcal{G}) \subset \operatorname{vect}(\mathcal{B})$. Cela prouve que $\mathcal{B}$ est génératrice, donc c'est une base de E. $\square$

Lemme 2.19. *Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie et $\mathcal{L}$ une famille libre. Alors on a $\mathsf{Card}(\mathcal{L}) \leqslant \mathsf{Card}(\mathcal{G})$.*

Démonstration. On montre par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que si E admet une famille génératrice à p éléments alors toute famille contenant au moins $p+1$ éléments est liée. Si $p = 0$ alors $\mathsf{E} = \{0\}$ et (0) est la seule famille contenant au moins 1 élément. Elle est liée. On considère $p \in \mathbb{N}^*$ et on suppose le résultat acquis jusqu'au rang $p-1$. On suppose donc que E admet une famille génératrice $(e_1, \ldots, e_p)$ et on considère une famille $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_{p+1})$ de vecteurs de E.

Pour tout $j \in [\![1, p+1]\!]$ il existe $\alpha_{1,j}, \ldots, \alpha_{p,j} \in \mathsf{K}$ tels que

$$f_j = \sum_{i=1}^{p} \alpha_{i,j} e_i.$$

On suppose que $\alpha_{i,1} = 0$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$. Alors $f_1 = 0$ et la famille $\mathcal{F}$ est nécessairement liée. On suppose maintenant qu'il existe $i \in [\![1, p]\!]$ tel que $\alpha_{i,1} \neq 0$. Quitte à échanger les rôles de e_1 et e_i, on peut supposer sans perte de généralité que $\alpha_{1,1} \neq 0$. On pose $\mathsf{F} = \operatorname{vect}(e_2, \ldots, e_p)$. F admet alors une famille génératrice à $p-1$ éléments. Pour $j \in [\![2, p+1]\!]$ on pose

$$g_j = f_j - \frac{\alpha_{1,j}}{\alpha_{1,1}} f_1 \in \mathsf{F}.$$

La famille $(g_2, \ldots, g_{p+1})$ contient p éléments, donc par hypothèse de récurrence elle est liée. Il existe $\lambda_2, \ldots, \lambda_{p+1}$ non tous nuls tels que

$$\sum_{j=2}^{p+1} \lambda_j g_j = 0.$$

Cela donne

$$0 = \sum_{j=2}^{p+1} \lambda_j g_j = -\left(\sum_{j=2}^{p+1} \frac{\lambda_j \alpha_{1,j}}{\alpha_{1,1}} \right) f_1 + \sum_{j=2}^{p+1} \lambda_j f_j.$$

Il s'agit d'une relation non triviale entre les f_j, $1 \leqslant j \leqslant p+1$, donc la famille $\mathcal{F}$ est liée. D'où le résultat par récurrence. $\square$

Corollaire 2.20. *Si* E *admet une famille libre infinie, alors il est de dimension infinie.*

Ce dernier résultat est en fait une équivalence (voir l'exercice ? ?).

Théorème 2.21 (Théorème de la base incomplète)**.** *Soit* E *un* K*-espace vectoriel de dimension finie.*

(i) **Existence de bases en dimension finie :** E *admet une base.*

(ii) **Théorème de la base incomplète :** *Une famille libre de vecteurs de* E *peut être complétée en une base de* E*.*

(iii) **Théorème d'extraction des bases :** *D'une famille génératrice finie de vecteurs de* E *on peut extraire une base de* E*.*

Démonstration. Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie. On obtient la troisième assertion (et donc la première) en appliquant le lemme 2.18 avec $\mathcal{L} = \varnothing$. Pour la deuxième assertion, on observe que $\mathcal{L}$ est nécessairement finie d'après le lemme 2.19, puis on applique le lemme 2.18 avec $\mathcal{L}$ et la famille génératrice (finie) obtenue en prenant les vecteurs de $\mathcal{L}$ et de $\mathcal{G}$. □

Théorème 2.22 (Théorème de la dimension)**.** *Soit* E *un* K*-espace vectoriel de dimension finie. Alors toutes les bases de* E *sont finies et ont le même nombre d'éléments.*

Démonstration. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Comme ce sont des familles libres, elles ont chacune un nombre fini d'éléments. Comme $\mathcal{B}$ est libre et $\mathcal{B}'$ est génératrice, on a $\mathsf{Card}(\mathcal{B}) \leqslant \mathsf{Card}(\mathcal{B}')$. Comme $\mathcal{B}'$ est libre et $\mathcal{B}$ est génératrice, on a aussi $\mathsf{Card}(\mathcal{B}') \leqslant \mathsf{Card}(\mathcal{B})$. D'où le résultat. □

Définition 2.23. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. On appelle dimension de E et on note $\dim(\mathsf{E})$ le nombre d'éléments de n'importe quelle base de E.

Exemples 2.24. — $\mathbb{R}^d$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension d.
— $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

Proposition 2.25. *Soit* E *un* K*-espace vectoriel de dimension finie* $n \in \mathbb{N}$*. Soit* $\mathcal{F}$ *une famille de vecteurs de* E*. Si deux des assertions suivantes sont vraies alors la troisième l'est également :*

(i) $\mathcal{F}$ *a* n *éléments ;*

(ii) $\mathcal{F}$ *est libre ;*

(iii) $\mathcal{F}$ *est génératrice.*

En particulier, $\mathcal{F}$ *est dans ce cas une base de* E*.*

Démonstration. On suppose que $\mathcal{F}$ est libre et a n éléments. Alors par le théorème de la base incomplète, elle peut être complétée en une base $\mathcal{B}$ de E. Comme $\mathsf{Card}(\mathcal{B}) = n = \mathsf{Card}(\mathcal{F})$, on a en fait $\mathcal{B} = \mathcal{F}$, donc $\mathcal{F}$ est une base. De même, une famille génératrice à n élément est une base par le thèorème d'extraction des bases. □

✎ Ex. 16

Définition 2.26. Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E. On suppose que $\mathrm{vect}(\mathcal{F})$ est de dimension finie. Alors on appelle rang de la famille $\mathcal{F}$ et on note $\mathrm{rg}(\mathcal{F})$ la dimension de $\mathrm{vect}(\mathcal{F})$.

2.4 Sous-espaces d'une espace vectoriel de dimension finie

Proposition 2.27. *Soit* E *un* K*-espace vectoriel de dimension finie et* F *un sous-espace vectoriel de* E*. Alors* F *est de dimension finie et* $\dim(\mathsf{F}) \leqslant \dim(\mathsf{E})$*. En outre on a* $\dim(\mathsf{F}) = \dim(\mathsf{E})$ *si et seulement si* $\mathsf{F} = \mathsf{E}$*.*

Démonstration. On note $n = \dim(\mathsf{E})$.
• On suppose par l'absurde que F est de dimension infinie et on montre par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$ que F admet une famille libre à p éléments. Comme $\mathsf{F} \neq \{0\}$ on peut considérer $e_1 \in \mathsf{F}\backslash\{0\}$. Cela définit une famille libre (e_1) à 1 élément. Supposons avoir construit une famille $(e_1, \ldots, e_p)$ libre dans F. Comme $\mathsf{F} \neq \text{vect}(e_1, \ldots, e_p)$, on peut considérer $e_{p+1} \in \mathsf{F}\backslash\text{vect}(e_1, \ldots, e_p)$ et on obtient une famille $(e_1, \ldots, e_{p+1})$ libre dans F. Cela prouve que F admet une famille libre à p éléments pour n'importe quel $p \in \mathbb{N}$. Une famille libre dans F étant aussi une famille libre dans E, elle admet au plus n éléments. On obtient donc une contradiction dès que $p > n$. Ainsi F est de dimension finie. En outre, $\dim(F) \leqslant n$.
• Si $\mathsf{E} = \mathsf{F}$ il est clair que $\dim(\mathsf{F}) = \dim(\mathsf{E})$. Inversement, on suppose que $\dim(\mathsf{F}) = \dim(\mathsf{E})$. Soit $\mathcal{B}$ une base de F. C'est une famille libre de E ayant n éléments, donc c'est aussi une base de E, ce qui implique que $\mathsf{E} = \text{vect}(\mathcal{B}) = \mathsf{F}$. □

Proposition 2.28. *Soit* E *un* K*-espace vectoriel de dimension finie. Soit* F *un sous-espace de* E*. Alors* F *possède au moins un sous-espace supplémentaire dans* E*, et si* G *est un supplémentaire de* F *on a*

$$\dim(\mathsf{E}) = \dim(\mathsf{F}) + \dim(\mathsf{G}).$$

Démonstration. On note $n \in \mathbb{N}$ la dimension de E.
• Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de F (avec $p = \dim(\mathsf{F}) \leqslant n$). Il s'agit d'une famille libre de E, que l'on peut compléter en une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E. On note $\mathsf{G} = \text{vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$. Alors on peut vérifier que G est un supplémentaire de F (exercice), ce qui prouve que F admet au moins un supplémentaire dans E.
• On suppose maintenant que G est un supplémentaire de F dans E. Soit $(f_1, \ldots, f_q)$ une base de G ($q = \dim(\mathsf{G}) \leqslant n$). Alors $(e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_q)$ est une base de E (exercice) donc $n = p + q$. □

Proposition 2.29 (Formule de Grassman)**.** *Soit* E *un* K*-espace vectoriel de dimension finie. Soient* F *et* G *deux sous-espace vectoriels de* E*. Alors on a*

$$\dim(\mathsf{F} + \mathsf{G}) = \dim(\mathsf{F}) + \dim(\mathsf{G}) - \dim(F \cap \mathsf{G}).$$

Démonstration. On note $p = \dim(\mathsf{F})$, $q = \dim(\mathsf{G})$ et $s = \dim(\mathsf{F} \cap \mathsf{G})$ (d'après l'exercice 2, $\mathsf{F} \cap \mathsf{G}$ est un sous-espace de E). Comme $\mathsf{F} \cap \mathsf{G}$ est un sous-espace de F et de G on a $s \leqslant \min(p, q)$. Soit $(e_1, \ldots, e_s)$ une base de $\mathsf{F} \cap \mathsf{G}$. On peut la compléter en une base $(e_1, \ldots, e_s, f_{s+1}, \ldots, f_p)$ de F et en une base $(e_1, \ldots, e_s, g_{s+1}, \ldots, g_q)$ de G. Alors $\beta = (e_1, \ldots, e_s, f_{s+1}, f \ldots, f_p, g_{s+1}, \ldots, g_q)$ est une famille génératrice de $\mathsf{F}+\mathsf{G}$. Montrons que β est également une famille libre. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_s, \mu_{s+1}, \ldots, \mu_p, \nu_{s+1}, \ldots, \nu_q \in \mathsf{K}$ tels que

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_s e_s + \mu_{s+1} f_{s+1} + \cdots + \mu_p f_p + \nu_{s+1} g_{s+1} + \cdots + \nu_q g_q = 0.$$

On a alors

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_s e_s + \mu_{s+1} f_{s+1} + \cdots + \mu_p f_p = -\nu_{s+1} g_{s+1} - \cdots - \nu_q g_q \in \mathsf{F} \cap \mathsf{G}.$$

Cela implique que $\mu_{s+1} = \cdots = \mu_p = 0$. Comme la famille $(e_1, \ldots, e_s, g_{s+1}, \ldots, g_q)$ est libre, cela implique que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_s = \nu_{s+1} = \cdots = \mu_p = 0$. Cela prouve que β est une famille libre. C'est donc une base de $\mathsf{F} + \mathsf{G}$. On en déduit que

$$\dim(\mathsf{F} + \mathsf{G}) = s + (p - s) + (q - s) = \dim(\mathsf{F}) + \dim(\mathsf{G}) - \dim(\mathsf{F} \cap \mathsf{G}). \qquad \square$$

Proposition 2.30. *Soit* E *un* K*-espace vectoriel de dimension finie* $n \in \mathbb{N}$*. Soient* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E*. Si deux des assertions suivantes sont vraies alors la troisième l'est également :*

(i) $\dim(\mathsf{F}) + \dim(\mathsf{G}) = n$ *;*

(ii) $\mathsf{F} \cap \mathsf{G} = \{0\}$ *;*

(iii) $\mathsf{F} + \mathsf{G} = \mathsf{E}$.

En particulier, F *et* G *sont dans ce cas des sous-espaces supplémentaires dans* E.

2.5 Exercices

***Exercice* 8.** **1.** Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = x, \quad f_3(x) = \cos(x), \quad f_4(x) = \sin(x).$$

La famille (f_1, f_2, f_3, f_4) de $\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ est-elle libre ?
2. Même question avec

$$f_1(x) = \cos(x), \quad f_2(x) = \sin(x), \quad \varphi_3(x) = \cos(2x), \quad f_4(x) = \sin(2x).$$

3. Même question avec

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \cos(x)^2, \quad \varphi_3(x) = \sin(x)^2, \quad f_4(x) = \cos(2x).$$

***Exercice* 9.** Pour $a \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $e_a(x) = e^{ax}$. Montrer que la famille $(e_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

***Exercice* 10.** Soit E un K-espace vectoriel.
1. Soit $\mathcal{L}$ une famille libre de vecteurs de E. Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}$. Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est libre.
2. Montrer que si $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{L}$, alors la famille $\mathcal{F}$ ne peut pas être génératrice.
3. Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice de vecteurs de E. Soit $x \in \mathsf{E}$. Montrer que la famille $\mathcal{G} \cup \{x\}$ est liée.

***Exercice* 11.** Les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ sont-elles libres ? génératrices ? des bases ?

$$\mathcal{F}_0 = \varnothing, \quad \mathcal{F}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}; \quad \mathcal{F}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathcal{F}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{F}_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

***Exercice* 12.** On note (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
1. On note

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que (β_1, β_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.
b. Exprimer β_1 et β_2 dans la base (e_1, e_2).
c. Exprimer e_1 et e_2 dans la base (β_1, β_2).

2. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. On note maintenant

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que (β_1, β_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $ad - bc \neq 0$.
b. Dans ce cas, exprimer e_1 et e_2 dans la base (β_1, β_2).

***Exercice* 13.** Soit E un espace vectoriel de dimension infinie.
1. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ il existe une famille libre de vecteurs de E à p éléments.
2. Montrer que E admet une famille libre infinie.

***Exercice* 14.** Pour $k \in \mathbb{N}$ on considère la suite $e_k = (e_{k,n})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$e_{k,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n, \\ 0 & \text{si } n \neq k. \end{cases}$$

1. La famille $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est-elle une base de $\mathsf{K}^{\mathbb{N}}$?
2. Identifier $\mathrm{vect}((e_k)_{k \in \mathbb{N}})$.

***Exercice* 15.** Montrer que $C^0(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension infinie.

***Exercice* 16.** Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions finies. Montrer que $\mathsf{E} \times \mathsf{F}$ est de dimension finie et que

$$\dim(\mathsf{E} \times \mathsf{F}) = \dim(\mathsf{E}) + \dim(\mathsf{F}).$$

***Exercice* 17.** **1.** On considère dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes $P_0(X) = 4$, $P_1(X) = X - 2$ et $P_2(X) - 3X^2 + 4X - 7$. Montrer que la famille (P_0, P_1, P_2) est libre.
2. On considère une famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}[X]$ telle que $\deg(P_n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille (P_n) est libre.

***Exercice* 18.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n$ des réelles deux à deux distincts. Pour $j \in [\![1, n]\!]$ on pose

$$P_j(X) = \frac{\prod_{k \neq j}(X - a_k)}{\prod_{k \neq j}(a_j - a_k)} \in \mathbb{R}_{n-1}(X).$$

Montrer que la famille $(P_1, \ldots, P_n)$ est libre.

***Exercice* 19.** On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ définis par

$$\mathsf{F} = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + z = y + t\right\}$$

et

$$\mathsf{G} = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y + t = x - y - z = 0\right\}.$$

1. a. Déterminer une base de F et préciser sa dimension.
b. Vérifier que $a = (3, 1, 2, 4)$ appartient à F et donner ses coordonnées dans cette base.

2. a. Déterminer une base de G et préciser sa dimension.
b. Vérifier que $b = (4, 1, 3, -1)$ appartient à G et donner ses coordonnées dans cette base.

3. Déterminer une base de $\mathsf{F} \cap \mathsf{G}$ et préciser sa dimension.

3 Applications linéaires

3.1 Définition et premières propriétés

Définition 3.1. Soient E et F deux K-espaces vectoriels. On appelle application linéaire de E dans F une application u de E dans F telle que

$$\forall x, y \in \mathsf{E}, \quad u(x+y) = u(x) + u(y)$$

et

$$\forall \lambda \in \mathsf{K}, \forall x \in \mathsf{E}, \quad u(\lambda x) = \lambda u(x).$$

On note $L(\mathsf{E}_1, \mathsf{E}_2)$ l'ensemble des applications linéaires de E_1 dans E_2. On appelle endomorphisme de E une application linéaire de E dans lui-même. On note $L(\mathsf{E}) = L(\mathsf{E}, \mathsf{E})$.

Remarque 3.2. Une application $u : \mathsf{E} \to \mathsf{F}$ est linéaire si et seulement si

$$\forall x, y \in \mathsf{E}, \forall \lambda \in \mathsf{K}, \quad u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y).$$

Remarque 3.3. Soit u une application linéaire de E dans F. Alors on a $u(0_\mathsf{E}) = 0_\mathsf{F}$. En effet on a

$$u(0_\mathsf{E}) = u(0_\mathsf{E} + 0_\mathsf{E}) = u(0_\mathsf{E}) + u(0_\mathsf{E}),$$

et on obtient le résultat en soustrayant $u(0_\mathsf{E})$ des deux côtés de l'égalité.

Exemples 3.4.
- L'application $\mathrm{Id}_\mathsf{E} : x \mapsto x$ est une application linéaire.
- L'application $(x_1, x_2) \mapsto 2x_1 - x_2$ est une applications linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ mais $(x_1, x_2) \mapsto x_1^2$ et $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + 2$ ne le sont pas.
- L'application
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - y \\ -3x + 5y \end{pmatrix}$$
est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
- L'application $\varphi \mapsto \varphi'$ est une application linéaire de $C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ dans $C^0(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.
- Soient $a, b \in \mathbb{R}$. L'application qui a une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe la suite $(u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$.

Ex. 20

Proposition 3.5. *Soient* E_1, E_2 *et* E_3 *des* K*-espaces vectoriels.*

(i) $L(\mathsf{E}_1, \mathsf{E}_2)$ *est un* K*-espace vectoriel.*

(ii) *Si* $u \in L(\mathsf{E}_1, \mathsf{E}_2)$ *et* $v \in L(\mathsf{E}_2, \mathsf{E}_3)$ *alors* $v \circ u \in L(\mathsf{E}_1, \mathsf{E}_3)$.

(iii) *Si* $u \in L(\mathsf{E}_1, \mathsf{E}_2)$ *est bijective, alors* $u^{-1} \in L(\mathsf{E}_2, \mathsf{E}_1)$.

Démonstration. Montrons (iii). Soit $u \in L(\mathsf{E}_1, \mathsf{E}_2)$ bijective. Soient $y_1, y_2 \in \mathsf{E}_2$ et $\mu \in \mathsf{K}$. On note $x_1 = u^{-1}(y_1)$ et $x_2 = u^{-1}(y_2)$. On a

$$\mu y_1 + y_2 = \mu u(x_1) + u(x_2) = u(\mu x_1 + x_2)$$

donc

$$u^{-1}(\mu y_1 + y_2) = \mu x_1 + x_2 = \mu u^{-1}(y_1) + u^{-1}(y_2).$$

Cela prouve que u^{-1} est linéaire. □

Définition 3.6. Soient E et F deux K-espaces vectoriels. On appelle isomorphisme linéaire de E dans F une application linéaire bijective de E dans F. On note $\mathrm{GL}(\mathsf{E},\mathsf{F})$ l'ensemble des isomorphismes linéaires de E dans F et $\mathrm{GL}(\mathsf{E}) = \mathrm{GL}(\mathsf{E},\mathsf{E})$ l'ensemble des automorphismes de E.

Définition 3.7. On appelle forme linéaire sur E une application linéaire de E dans K. On note E^* l'ensemble des formes linéaires sur E.

Exemple 3.8. Soient $a_1, \dots, a_d \in \mathsf{K}$. L'application

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathsf{K}^d & \to & \mathsf{K} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} & \mapsto & a_1x_1 + \cdots + a_dx_d \end{array}\right.$$

est une forme linéaire sur K^d.

Exemple 3.9. Soit E un K-espace vectoriel. On suppose que $\beta = (\beta_i)_{i\in\omega}$ est une base de E. On rappelle que pour $i \in \omega$ on a noté β_i^* l'application qui à $x = \sum_{i\in\omega} x_i\beta_i$ (écriture unique, $(\beta_i)_{i\in\omega}$ est une famille presque nulle) associe x_i. Alors β_i^* est une forme linéaire sur E.

Exemple 3.10. Les applications $P \mapsto P(0)$ et $P \mapsto P'(1)$ sont des formes linéaires sur $\mathbb{R}[X]$.

3.2 Images et images réciproques par une application linéaire - Noyau

Définition 3.11. Le noyau de u est par définition

$$\ker(u) = \{x \in \mathsf{E}_1 \,|\, u(x) = 0\}\,.$$

Son image est

$$\mathrm{Im}(u) = \{u(x), x \in \mathsf{E}_1\}\,.$$

Proposition 3.12. *Soient E_1 et E_2 deux K-espaces vectoriels et u une application linéaire de E dans F.*

(i) Si F_1 est un sous-espace vectoriel de E_1, alors

$$u(\mathsf{F}_1) = \{u(x), x \in \mathsf{F}_1\}$$

est un sous-espace vectoriel de E_2. En particulier, $\mathrm{Im}(u) = u(\mathsf{E}_1)$ est un sous-espace vectoriel de E_2.

(ii) Si F_2 est un sous-espace vectoriel de E_2, alors

$$u^{-1}(F_2) = \{x \in \mathsf{E} \,|\, u(x) \in \mathsf{F}_2\}$$

est un sous-espace vectoriel de E_1. En particulier, $\ker(u) = u^{-1}(\{0\})$ est un sous-espace vectoriel de E_1.

Démonstration. • Soient $y_1, y_2 \in u(\mathsf{F}_1)$ et $\lambda \in \mathsf{K}$. Soient $x_1, x_2 \in \mathsf{F}_1$ tels que $u(x_1) = y_1$ et $u(x_2) = y_2$. On a alors

$$y_1 + y_2 = u(x_1) + u(x_2) = u(x_1 + x_2)$$

Comme $x_1 + x_2 \in \mathsf{F}_1$ cela prouve que $y_1 + y_2 \in u(\mathsf{F}_2)$. De même, comme $\lambda x_1 \in \mathsf{F}_1$ on a

$$\lambda y_1 = \lambda u(x_1) = u(\lambda x_1) \in u(\mathsf{F}_1).$$

Finallement on obtient que $u(\mathsf{F}_1)$ est un sous-espace vectoriel de E_2.

- Soient $x_1, x_2 \in u^{-1}(\mathsf{F}_2)$ et $\lambda \in \mathsf{K}$. On a

$$u(x_1 + x_2) = \underbrace{u(x_1)}_{\in \mathsf{F}_2} + \underbrace{u(x_2)}_{\in \mathsf{F}_2} \in \mathsf{F}_2,$$

donc $x_1 + x_2 \in u^{-1}(\mathsf{F}_2)$. De même,

$$u(\lambda x_1) = \lambda \underbrace{u(x_1)}_{\in \mathsf{F}_2} \in \mathsf{F}_2,$$

donc $\lambda x_1 \in u^{-1}(\mathsf{F}_2)$. Cela prouve que $u^{-1}(\mathsf{F}_2)$ est un sous-espace vectoriel de F_2. □

Proposition 3.13. *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels et* $u \in L(\mathsf{E}, \mathsf{F})$. *Alors* u *est injective si et seulement si* $\ker(u) = \{0\}$.

Démonstration. D'après la remarque 3.3, on a toujours $\{0\} \subset \ker(u)$.

On suppose que u est injective et on considère $x \in \ker(u)$. On a alors $u(x) = u(0)$, donc $x = 0$. Cela prouve que $\ker(u) \subset \{0\}$, et donc $\ker(u) = \{0\}$.

Inversement on suppose que $\ker(u) = \{0\}$. Soient alors $x_1, x_2 \in \mathsf{E}$ tels que $u(x_1) = u(x_2)$. On a alors
$$u(x_1 - x_2) = u(x_1) - u(x_2) = 0,$$
donc $x_1 - x_2 \in \ker(u)$. Cela implique que $x_1 = x_2$, et donc que u est injective. □

Proposition 3.14. *Soient* E *et* F *deux* K*-espaces vectoriels. Soit* $u \in L(\mathsf{E}, \mathsf{F})$ *et* $y \in \mathsf{F}$. *On s'intéresse aux solutions* $x \in \mathsf{E}$ *de l'équation*

$$u(x) = y.$$

Autrement dit, on s'intéresse à la pré-image $u^{-1}(\{y\})$.

(i) *Si* $y \in \mathrm{Im}(u)$ *et* $x_0 \in \mathsf{E}$ *est une solution particulière, alors l'ensemble des solutions est donné par*

$$u^{-1}(\{y\}) = \{x \in \mathsf{E}, x - x_0 \in \ker(u)\} = \{x_0 + z, z \in \ker(u)\}.$$

3.3 Applications linéaires et bases

Proposition 3.15. (i) *L'image d'une famille libre par une application linéaire injective est libre.*

(ii) *L'image d'une famille génératrice par une application linéaire surjective est génératrice.*

(iii) *L'image d'une base par un isomorphisme linéaire est une base.*

Démonstration. Soient E et F deux K-espaces vectoriels. Soit $u \in L(\mathsf{E}, \mathsf{F})$.
• Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille libre de vecteurs de E. Soit $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathsf{K}^I$ presque nulle telle que

$$\sum_{i\in I} \lambda_i u(e_i) = 0.$$

Alors on a

$$u\left(\sum_{i\in I} \lambda_i e_i\right) = 0.$$

Comme u est injective, cela implique que

$$\sum_{i\in I} \lambda_i e_i = 0.$$

Comme la famille $(e_i)_{i\in I}$ est libre, cela implique que $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in I$. Cela prouve que la famille $(u(e_i))_{i\in I}$ est libre.
• Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de E. Montrons que $(u(e_i))_{i\in I}$ est une famille génératrice de F. Soit $y \in \mathsf{F}$. Comme u est surjective, il existe $x \in \mathsf{E}$ tel que $u(x) = y$. Comme la famille $(e_i)_{i\in I}$ est génératrice, il existe $n \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_n \in I$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathsf{K}$ tels que

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i_j} e_{i_j}.$$

Par linéarité de u on a alors

$$y = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i_j} u(e_{i_j}).$$

• La troisième assertion est conséquence des deux premières. □

Proposition 3.16. *Soient* E *et* F *deux* K*-espaces vectoriels. On suppose que* $(e_i)_{i\in\omega}$ *une base de* E*. Soit* $(f_i)_{i\in\omega}$ *une famille de vecteurs de* F*. Alors il existe une unique application linéaire* $u \in L(\mathsf{E}, \mathsf{F})$ *telle que*

$$\forall i \in \omega, \quad u(e_i) = f_i.$$

En outre

(i) *u est injective si et seulement si la famille $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre,*

(ii) *u est surjective si et seulement si la famille $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est génératrice,*

(iii) *u est un isomorphisme si et seulement si la famille $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base,*

Démonstration. • On suppose que $u \in L(\mathsf{E}, \mathsf{F})$ est telle que $u(e_i) = f_i$ pour tout $i \in \omega$. Soient $x \in \mathsf{E}$ et $(\xi_i)_{i\in\omega}$ l'unique famille presque nulle dans K telle que $x = \sum_{i\in\omega} x_i e_i$. On a alors

$$u(x) = u\left(\sum_{i\in\omega} x_i e_i\right) = \sum_{i\in\omega} x_i u(e_i) = \sum_{i\in\omega} x_i f_i.$$

Ainsi u est uniquement déterminée par la famille (f_i). Inversement, on vérifie que l'application u ainsi définie est bien une application linéaire vérifiant $u(e_i) = f_i$ pour tout $i \in \omega$.

• On a vu à la proposition 3.15 que si u est injective alors la famille $(f_i)_{i\in\omega}$ est libre. Inversement, on suppose que la famille $(f_i)_{i\in\omega}$ est libre. Soit $x = \sum_{i\in\omega} x_i e_i \in \ker(u)$ (avec $(x_i)_{i\in\omega}$ presque nulle). On a alors

$$0 = u(x) = \sum_{i\in\omega} x_i f_i.$$

Comme la famille (f_i) est libre, on a nécessairement $x_i = 0$ pour tout $i \in \omega$. Ainsi $x = 0$. Cela prouve que $\ker(u) = \{0\}$, et donc que u est injective par la proposition 3.13.
• On a vu à la proposition 3.15 que si u est surjective alors la famille $(f_i)_{i\in\omega}$ est génératrice. Inversement, on suppose que la famille $(f_i)_{i\in\omega}$ est génératrice. Soit $y \in \mathsf{F}$. Il existe $(y_i)_{i\in\omega} \in \mathsf{K}^\omega$ presque nulle telle que $y = \sum_{i\in\omega} y_i f_i$. On pose $x = \sum_{i\in\omega} y_i e_i$. On a alors $x \in \mathsf{E}$ et $u(x) = y$. Cela prouve que u est surjective.
• L'assertion (iii) est conséquence de (i) et (ii). □

3.4 Applications linéaires en dimension finie

Proposition 3.17. *Soient* E *et* F *deux* K*-espaces vectoriels et* $u \in L(\mathsf{E}, \mathsf{F})$*. On suppose que* E *est de dimension finie. Alors* $\mathrm{Im}(u)$ *est un sous-espace de* F *de dimension finie.*

Démonstration. On note $n = \dim(\mathsf{E})$ et on considère une base $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ de E. Alors on a

$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{vect}(u(\beta_1), \ldots, u(\beta_n)).$$

(À détailler) □

Définition 3.18. Soient E et F deux K-espaces vectoriels et $u \in L(\mathsf{E}, \mathsf{F})$. On suppose que E est de dimension finie. Alors on note $\mathrm{rg}(u)$ et on appelle rang de u la dimension de $\mathrm{Im}(u)$

Proposition 3.19. *Soient* E *et* F *deux* K*-espaces vectoriels et* $u \in L(\mathsf{E}, \mathsf{F})$*. On suppose que* E *est de dimension finie. Si deux des assertions suivantes sont vraies, alors la troisième l'est également :*

(i) *u est injective,*

(ii) *u est surjective,*

(iii) $\dim(\mathsf{E}) = \dim(\mathsf{F})$ *(en particulier* F *est de dimension finie).*

En particulier, u est dans ce cas un isomorphisme linéaire.

Démonstration. On note $n = \dim(\mathsf{E}) \in \mathbb{N}$. Soit $\beta = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour $i \in [\![1, n]\!]$ on note $f_i = u(e_i)$.

On suppose que u est injective et $\dim(\mathsf{F}) = n$. Alors $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille libre de F et contient $\dim(F)$ éléments. C'est donc une base de F, et u est un isomorphisme. On conclut de façon analogue si u est surjective et $\dim(\mathsf{F}) = n$.

Si u est injective et surjective, alors on sait par la proposition 3.15 que $\dim(\mathsf{E}) = \dim(\mathsf{F})$. □

Proposition 3.20. *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels de même dimension finie n et* $u \in L(\mathsf{E}, \mathsf{F})$*. On suppose qu'il existe* $v \in L(\mathsf{F}, \mathsf{E})$ *tel que* $u \circ v = \mathrm{Id}_\mathsf{F}$ ou $v \circ u = \mathrm{Id}_\mathsf{E}$*. Alors u est inversible et $v = u^{-1}$.*

Démonstration. On suppose que $v \circ u = \mathrm{Id}_{\mathsf{E}}$. Alors on a $\ker(u) \subset \ker(v \circ u) \subset \{0\}$, donc u est injective. Cela implique que u est bijective. On a alors $v = v \circ u \circ u^{-1} = u^{-1}$.

On suppose maintenant que $u \circ v = \mathrm{Id}_{\mathsf{F}}$). Alors $\mathsf{F} = \mathrm{Im}(u \circ v) \subset \mathrm{Im}(u)$, ce qui implique que u est sujective, et donc bijective. On obtient comme précédemment que $v = u^{-1}$. □

Theorem 3.21 (Théorème du rang)**.** *Soit* E *un* K*-espace vectoriel de dimension finie,* F *un* K*-espace vectoriel et* $u \in L(\mathsf{E}, \mathsf{F})$*. Alors on a*

$$\dim(\mathsf{E}) = \dim(\ker(u)) + \mathrm{rg}(u).$$

Démonstration. Soit S un supplémentaire de $\ker(u)$ dans E. On considère

$$\tilde{u} : \begin{cases} S & \to & \mathrm{Im}(u) \\ x & \mapsto & u(x) \end{cases}$$

• Montrons que $\tilde{u}$ est un isomorphisme de S dans $\mathrm{Im}(u)$. $\tilde{u}$ est bien linéaire car u est linéaire. Soit $x \in \ker(\tilde{u})$. Alors $x \in S$ et $u(x) = 0$, donc $x \in S \cap \ker(u) = \{0\}$. Cela prouve que $\tilde{u}$ est injective. Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$. Il existe $x \in \mathsf{E}$ tel que $u(x) = y$. Soit $x_1 \in \ker(u)$ et $x_2 \in S$ tels que $x = x_1 + x_2$. On a $\tilde{u}(x_2) = u(x_2) = u(x) = y$. Cela prouve que $\tilde{u}$ est surjective. D'où $\tilde{u}$ est un isomorphisme.

On a alors

$$\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(\tilde{u}) = \dim(S) = \dim(\mathsf{E}) - \dim(\ker(u)).$$

□

Proposition 3.22. *Soient* E *et* F *deux* K*-espaces vectoriels de dimensions finies. Alors* $L(\mathsf{E}, \mathsf{F})$ *est de dimension finie et*

$$\dim(L(\mathsf{E}, \mathsf{F})) = \dim(\mathsf{E}) \times \dim(\mathsf{F}).$$

Démonstration. Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E (avec $n = \dim(\mathsf{E}) \in \mathbb{N}$) et $(f_1, \dots, f_p)$ une base de F (avec $p = \dim(\mathsf{F}) \in \mathbb{N}$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, p]\!]$ on considère l'unique application $\varphi_{i,j} \in L(\mathsf{E}, \mathsf{F})$ tel que $\varphi_{i,j}(e_i) = f_j$ et $\varphi_{k,j} = 0$ pour $k \neq i$. Autrement dit,

$$\varphi_{i,j} = x \mapsto \sum_{i,j} e_i^*(x) f_j.$$

On vérifie alors que $(\varphi_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ est une base de $L(\mathsf{E}, \mathsf{F})$ et contient np éléments. □

3.5 Projections, symmétries, homothéties

3.5.1 Projections

Soit E un K-espace vectoriel.

Définition 3.23. Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E. On appelle projection sur F parallèlement à G l'application qui à $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$ (écriture unique) associe x_F.

Proposition 3.24. *Soient* F *et* G *deux sous-espaces supplémentaires de* E *et* p *la projection sur* F *parallèlement à* G*.*

(i) $p \in L(\mathsf{E})$

(ii) $p^2 = p$

(iii) $\operatorname{Im}(p) = \ker(p - \operatorname{Id}_{\mathsf{E}}) = F$

(iv) $\ker(p) = G$.

Remarque 3.25. $\operatorname{Id} - p$ est la projection sur G parallèlement à F. On dit que p et $\operatorname{Id}_{\mathsf{E}} - p$ sont les projecteurs associés à la décomposition $\mathsf{E} = F \oplus G$.

Définition 3.26. On appelle projection de E tout $p \in L(\mathsf{E})$ tel que $p^2 = p$ (endomorphisme idempotent de E).

Proposition 3.27. *Soit p une projection de E. Alors $\ker(p)$ et $\operatorname{Im}(p)$ sont supplémentaires dans E et p est la projection sur $\operatorname{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.*

Démonstration. Soit $x \in \ker(p) \cap \operatorname{Im}(p)$. Il existe $y \in \mathsf{E}$ tel que $x = p(y)$. On a alors $0 = p(x) = p^2(y) = p(y) = x$. D'où $\ker(p) \cap \operatorname{Im}(p) = \{0\}$.

Soit maintenant $x \in \mathsf{E}$. On a $x = (x - p(x)) + p(x)$. On a $p(x) \in \operatorname{Im}(p)$ et $p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = 0$, donc $x - p(x) \in \ker(p)$. Cela prouve que $x \in \ker(p) + \operatorname{Im}(p)$. Finalement, $\ker(p)$ et $\operatorname{Im}(p)$ sont bien supplémenataires dans E.

Soit $z \in \operatorname{Im}(p)$ et $\zeta \in \mathsf{E}$ tel que $p(\zeta) = z$. On a alors $p(z) = p^2(\zeta) = p(\zeta) = z$. Ainsi, pour $y \in \ker(p)$ et $z \in \operatorname{Im}(z)$ on a $p(y + z) = z$, ce qui prouve que p est la projection sur $\operatorname{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$. $\square$

3.5.2 Symétries

Soit E un K-espace vectoriel.

Définition 3.28. Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E. On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G l'application qui à $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$ (écriture unique) associe $x_F - x_G$.

Proposition 3.29. *Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E et s la symétrie par rapport F parallèlement à G.*

(i) $s \in L(\mathsf{E})$

(ii) $s^2 = \operatorname{Id}_{\mathsf{E}}$

(iii) $\ker(s - \operatorname{Id}_{\mathsf{E}}) = F$

(iv) $\ker(s + \operatorname{Id}_{\mathsf{E}}) = G$.

Définition 3.30. On appelle symétrie de E tout $s \in L(\mathsf{E})$ tel que $s^2 = \operatorname{Id}_{\mathsf{E}}$ (endomorphisme involutif de E).

Proposition 3.31. *Soit s une projection de E. Alors $\ker(s - \operatorname{Id}_{\mathsf{E}})$ et $\ker(s + \operatorname{Id}_{\mathsf{E}})$ sont supplémentaires dans E et s est la symétrie par rapport à $\ker(s - \operatorname{Id}_{\mathsf{E}})$ parallèlement à $\ker(s + \operatorname{Id}_{\mathsf{E}})$.*

Démonstration. Soit $x \in \ker(s - \operatorname{Id}_{\mathsf{E}}) \cap \ker(s + \operatorname{Id}_{\mathsf{E}})$. Alors on a $x = s(x) = -x$ donc $x = 0$. Cela prouve que $\ker(s - \operatorname{Id}_{\mathsf{E}}) \cap \ker(s + \operatorname{Id}_{\mathsf{E}}) = \{0\}$.

Soit maintenant $x \in \mathsf{E}$. On a

$$x = \frac{x + s(x)}{2} + \frac{x - s(x)}{2} \in \ker(s - \operatorname{Id}_{\mathsf{E}}) + \ker(s + \operatorname{Id}_{\mathsf{E}}).$$

En effet
$$s\left(\frac{x+s(x)}{2}\right)=\frac{s(x)+s^2(x)}{2}=\frac{s(x)+x}{2},$$
donc
$$\frac{x+s(x)}{2}\in\ker(s-\mathrm{Id}_{\mathsf{E}}).$$
De même,
$$\frac{x-s(x)}{2}\in\ker(s+\mathrm{Id}_{\mathsf{E}}).$$
Cela prouve que
$$\ker(s-\mathrm{Id}_{\mathsf{E}})\bigoplus\ker(s+\mathrm{Id}_{\mathsf{E}})=\mathsf{E}.$$

Soient maintenant $y\in\ker(s-\mathrm{Id}_{\mathsf{E}})$ et $z\in\ker(s+\mathrm{Id}_{\mathsf{E}})$. Alors on a $s(y+z)=s(y)+s(z)=y-z$. Cela prouve que s est la symétrie par rapport à $\ker(s-\mathrm{Id}_{\mathsf{E}})$ parallèlement à $\ker(s+\mathrm{Id}_{\mathsf{E}})$. □

Exemple 3.32. L'endomorphisme de $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ qui à f associe la fonction $x\mapsto f(-x)$ est une symétrie.

3.5.3 Homotéthies

Définition 3.33. Soit $\alpha\in\mathsf{K}\backslash\{0\}$. On appelle homothétie de E de rapport α l'application h_α qui à $x\in\mathsf{E}$ associe αx.

3.6 Exercices

(voir la feuille d'exercices plus complète disponible sur Moodle)

***Exercice* 20.** Déterminer l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}$.

***Exercice* 21.** Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ on pose
$$u(x,y)=(x+y,x-y,x+y)\in\mathbb{R}^3.$$
1. Montrer que $u\in L(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3)$.
2. u est-elle injective ? surjective ? bijective ?

***Exercice* 22.** Pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ on pose
$$u(x,y,z)=(-3x-y+z,8x+3y-2z,-4x-y+2z)\in\mathbb{R}^3.$$
1. Déterminer une base et la dimension de $\ker(u)$. u est-elle injective ?
2. Determiner le rang de u et une base de $\mathrm{Im}(u)$. u est-elle surjective ?

***Exercice* 23.** Soient E un K-espace vectoriel et $u,v\in L(\mathsf{E})$. Montrer que $u\circ v=0$ si et seulement si $\mathrm{Im}(v)\subset\ker(u)$.

***Exercice* 24.** On note (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On note u l'endomorphisme de E défini par
$$u(e_1)=-2e_1+2e_3,\quad u(e_2)=3e_2,\quad u(e_3)=-4e_1+4e_3.$$
1. Déterminer la dimension et une base de $\ker(u)$.
2. u est-elle injective ? surjective ? bijective ?
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(u)$.
4. Montrer que $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont en somme directe dans $\mathbb{R}^3$.

***Exercice* 25.** On considère dans $\mathbb{R}^2$ les vecteurs $u = (1,1)$, $v = (2,-1)$ et $w = (1,4)$.
1. Montrer que (u,v) est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Pour quelle(s) valeur(s) de a existe-t-il une application linéaire $f \in L(\mathbb{R}^2)$ telle que $f(u) = (2,1)$, $f(v) = (1,-1)$ et $f(w) = (5,a)$?

***Exercice* 26.** Soient $u, v \in L(\mathsf{E})$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que $\ker(v)$ et $\mathrm{Im}(v)$ sont stable par u (c'est-à-dire $u(\ker(v)) \subset \ker(v)$ et $u(\mathrm{Im}(v)) \subset \mathrm{Im}(v)$)

***Exercice* 27.** Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in L(\mathsf{E})$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\ker(u) = \mathrm{Im}(u)$,
(ii) $u^2 = 0$ et $n = 2\mathrm{rg}(u)$.

***Exercice* 28.** Soit E un espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension finie. On considère l'application

$$\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathsf{F} \times \mathsf{G} & \to & \mathsf{E} \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array} \right.$$

1. Vérifier que $\psi \in L(\mathsf{E})$.
2. Identifier $\mathrm{Im}(\Psi)$ et $\ker(\psi)$.
3. En utilisant le théorème du rang, retrouver la formule de Grassman (on utilisera le résultat de l'exercice 16).

***Exercice* 29.** Soient $n \in \mathbb{N}$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$ on note $u(P)$ le reste de la division euclidienne de P par Q. Montrer que u est une projection de $\mathbb{R}[X]$ dont on précisera l'image et le noyau.

***Exercice* 30.** On considère sur l'espace E des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ l'application Ψ qui à une fonction f associe la fonction $\Psi(f)$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\Psi(f))(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Montrer que Ψ est une projection de E dont on précisera le noyau et l'image.

***Exercice* 31.** Soit $u \in L(\mathsf{E})$. Montrer que u est une homothétie de E si et seulement si la famille $(x, u(x))$ est liée pour tout $x \in \mathsf{E}$.

***Exercice* 32.** Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u \in L(\mathsf{E})$.
1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $\ker(u^k) \subset \ker(u^{k+1})$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $\mathrm{Im}(u^k) \supset \mathrm{Im}(u^{k+1})$.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et majorée. On suppose que $u_n \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = u_N$ pour tout $n \geqslant N$.
4. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\ker(u^k) = \ker(u^{k+1})$. On note p le plus petit entier vérifiant cette propriété.
5. Montrer que pour tout $k \geqslant p$ on a $\ker(u^k) = \ker(u^{k+1})$.
6. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Im}(u^k) = \mathrm{Im}(u^{k+1})$. On note q le plus petit entier vérifiant cette propriété.
7. Montrer que pour tout $k \geqslant q$ on a $\mathrm{Im}(u^k) = \mathrm{Im}(u^{k+1})$.
8. Montrer que $p = q$.
9. Montrer que $\ker(u^p)$ et $\mathrm{Im}(u^p)$ sont supplémentaires dans E.

4 Matrices

4.1 Définitions

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. On appelle matrice à n lignes et p colonnes un tableau de scalaires à n lignes et p colonnes :

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & a_{i,j} & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

On note $M_{n,p}(\mathsf{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes. On note également $M_n(\mathsf{K})$ l'ensemble $M_{n,n}(\mathsf{K})$ des matrices carrées d'ordre n.

Formellement, on peut voir une matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in M_{n,p}(\mathsf{K})$ comme l'application de $[\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$ dans K qui à (i, j) associe $a_{i,j}$.

Définition 4.1. Soit $A = (a_{1 \leqslant i,j \leqslant n}) \in M_n(\mathsf{K})$. On dit que A est

(i) diagonale si $a_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$,

(ii) triangulaire supérieure si $a_{i,j} = 0$ pour $i > j$,

(iii) triangulaire inférieure si $a_{i,j} = 0$ pour $i < j$,

(iv) triangulaire si elle est triangulaire supérieure ou triangulaire supérieure.

Exemples 4.2. Les matrices suivantes sont respectivement diagonale, triangulaire supérieure et triangulaire inférieure :

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

On note qu'une matrice diagonale est en particulier triangulaire supérieure et triangulaire inférieure.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on note

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathsf{K}).$$

C'est la matrice $I_n = (\delta_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker :

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

C'est une matrice diagonale, appelée matrice identité (de taille n).

4.2 Calcul matriciel

4.2.1 Structure d'espace vectoriel

Comme ensemble des applications de $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ dans K, l'ensemble $M_{n,p}(\mathsf{K})$ est naturellement muni d'une addition et d'une multiplication par les scalaires, qui en font un K-espace vectoriel. Ainsi, pour $\lambda \in \mathsf{K}$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ on a

$$\lambda A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$$

et

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}.$$

On note qu'on ne peut additionner que des matrices qui ont la même taille.

Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ on note $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice (i,j), qui vaut 1.

Proposition 4.3. *La famille $(E_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ est une base de $M_{n,p}(\mathsf{K})$. En particulier,*

$$\dim(M_{n,p}(\mathsf{K})) = np.$$

4.2.2 Produit matriciel

Soient $n,p,q \in \mathbb{N}^*$. Pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in M_{n,p}(\mathsf{K})$ et $B = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}} \in M_{p,q}(\mathsf{K})$ on définit le produit

$$AB = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant q}} \in M_{n,q}(\mathsf{K})$$

par

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \forall j \in [\![1,q]\!], \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}. \tag{4.1}$$

Cela définit une application

$$\left\{ \begin{array}{ccc} M_{n,p}(\mathsf{K}) \times M_{p,q}(\mathsf{K}) & \to & M_{n,q}(\mathsf{K}), \\ (A,B) & \mapsto & AB. \end{array} \right.$$

Ce choix de définition est motivé par la proposition 4.38. Comme la définition n'est pas intuitive Il faut être vigilant avec les matrices qu'on peut multiplier entre elles et celles pour lesquelles on ne peut pas. En faisant bien attention à l'ordre des facteurs, puisqu'il se peut que AB ait un sens mais pas BA.

Dans le cas particulier $n = p = q$, on note tout de même qu'on a défini un produit interne sur $M_n(\mathsf{K})$.

Exemple 4.4. On calcule le produit AB avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Le produit est une matrice à 4 lignes (comme A) et 2 colonnes (comme B). Pour calculer par exemple le coefficient d'indice $(1, 2)$ on n'utilise que les coefficients de la première ligne de A et ceux de la deuxième colonne de B, comme indiqué par (4.1) :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \quad & -1 \\ & \\ & \\ & \end{pmatrix} \leftarrow 1 \times 2 + (-1) \times 3 + 0 \times (-1) \end{array}$$

On procède de même pour les autres coefficients et on obtient finalement :

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 6 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Remarque 4.5. Même quand les deux produits AB et BA ont un sens, ils ne sont pas forcément égaux. Ainsi, même sur $M_n(\mathsf{K})$, le produit matriciel n'est pas commutatif. Par exemple, pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

on a

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note que $AB = 0$ alors que $A \neq 0$ et $B \neq 0$. On a également $B^2 = 0$.

Remarque 4.6. On note dans le cas précédent que le produit de deux matrices peut être nul sans qu'aucune des deux matrices ne le soit.

Dans le même ordre d'idée, si trois matrices sont telles que $AB = AC$ ou $BA = CA$ cela n'implique pas du tout que B est égale à C. Par exemple, toujours avec les matrices de l'exemple précédent on a $AB = B^2$ et pourtant $A \neq B$ (on ne peut pas simplifier par B).

Proposition 4.7. *Soient $m, n, p, q \in \mathbb{N}^*$. Soient $A \in M_{n,p}(\mathsf{K})$, $B, \tilde{B} \in M_{m,n}(\mathsf{K})$, $C, \tilde{C} \in M_{p,q}(\mathsf{K})$ et $\lambda \in \mathsf{K}$.*

(i) *$I_n A = A I_p = A$ (en particulier, I_n est un élément neutre pour la multiplication dans I_n) ;*

(ii) *$(B + \tilde{B})A = BA + \tilde{B}A$ et $A(C + \tilde{C}) = AC + A\tilde{C}$;*

(iii) *$(BA)C = B(AC)$ (on peut simplement écrire BAC) ;*

(iv) *$\lambda(AC) = (\lambda A)C = A(\lambda C)$.*

Remarque 4.8. Soient $A, B \in M_n(\mathsf{K})$. En général $(A+B)^2$ n'est pas égal à $A^2+2AB+B^2$. On a simplement

$$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2.$$

Bien sûr on retrouve l'identité usuelle dans le cas particulier où $AB = BA$. Plus généralement, si A et B commutent on peut montrer comme pour les scalaires la formule du binôme.

Le piège principal avec le calcul matriciel est d'appliquer les mêmes règles qu'avec les scalaires. Ce qui ne fonctionne pas. Outre les questions de tailles des matrices et la non-commutativité, les problèmes sont également dû au fait que même dans $M_n(\mathsf{K})$ les matrices n'admettent pas toute un inverse pour le produit.

4.2.3 Matrices carrées inversibles

Définition 4.9. Soit $A \in M_n(\mathsf{K})$. On dit que A est inversible s'il existe $B \in M_n(\mathsf{K})$ telle que $AB = BA = I_n$. On note $\mathrm{GL}_n(\mathsf{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathsf{K})$.

Proposition 4.10. *Si A est inversible alors son inverse est unique (on la note A^{-1}).*

Démonstration. On suppose que B_1 et B_2 sont telles que $AB_1 = B_1A = I_n$ et $AB_2 = B_2A = I_n$. Alors on a

$$B_1 = B_1 I_n = B_1 A B_2 = I_n B_2 = B_2.$$

□

Remarque 4.11. On verra plus loin que s'il existe $B \in M_n(\mathsf{K})$ telle que $AB = I_n$ *ou* $BA = I_n$ alors A est inversible et $A^{-1} = B$.

Proposition 4.12. *Soient $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathsf{K})$.*

(i) *On a $A^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathsf{K})$ et $(A^{-1})^{-1} = A$.*

(ii) *On a $AB \in \mathrm{GL}_n(\mathsf{K})$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Démonstration. On a

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = I_n,$$

et de même, $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I_n$. Cela prouve que AB est inversible d'inverse $B^{-1}A^{-1}$.

□

Remarque 4.13. Soient $A \in M_n(\mathsf{K})$ une matrice inversible. Alors pour $X, Y \in \mathsf{K}^n \simeq M_{n,1}(\mathsf{K})$ on a

$$AX = Y \quad \Longleftrightarrow \quad X = A^{-1}Y.$$

Cela montre qu'on peut calculer l'inverse A^{-1} de A en résolvant un système linéaire (par exemple en utilisant le pivot de Gauss).

Exemple 4.14. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On admet pour le moment que A est inversible (on verra plus loin des critères d'inversibilité). Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Alors on a

$$\begin{aligned}
AX = Y &\iff \begin{cases} x_1 + x_3 = y_1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = y_2 \\ x_2 - x_3 = y_3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x_1 + x_3 = y_1 \\ x_2 + x_3 = y_2 - y_1 \\ x_2 - x_3 = y_3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x_1 + x_3 = y_1 \\ x_2 + x_3 = y_2 - y_1 \\ -2x_3 = y_3 - y_2 + y_1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x_1 = y_1 - x_3 = \frac{3}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 \\ x_2 = y_2 - y_1 - x_3 = -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 \\ x_3 = -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 \end{cases} \\
&\iff X = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} Y.
\end{aligned}$$

Cela prouve que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On peut vérifier a posteriori, par un calcul direct, que cette matrice est effectivement une inverse pour la matrice A, ce qui prouve qu'elle est donc inversible.

Pour une matrice A qui n'est pas inversible, l'algorithme du pivot de Gauss montre qu'on ne peut pas trouver pour n'importe quel Y une unique solution X. Par exemple, pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},$$

le calcul donne

$$\begin{aligned}
AX = Y &\iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = y_1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = y_2 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = y_3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = y_1 \\ -3x_2 - 6x_3 = y_2 - 4y_1 \\ 0 = y_3 - 2y_2 + y_1 \end{cases}
\end{aligned}$$

On n'a pas de solution si $y_3 - 2y_2 + y_1 \neq 0$, ce qui prouve que A n'est pas inversible (en outre, si $y_3 - 2y_2 + y_1 = 0$, alors il y a une infinité de solution, et plus précisément l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1).

Remarque 4.15. On résoud un système linéaire pour calculer l'inverse d'une matrice, mais inversement ce n'est pas utile de calculer l'inverse d'une matrice si on veut simplement résoudre un système linéaire.

4.2.4 Transposée d'une matrice

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in M_{n,p}$. Alors la transposée de A est

$$A^\mathsf{T} = (a_{j,i})_{\substack{1\leqslant j\leqslant p\\ 1\leqslant i\leqslant n}}.$$

Exemple 4.16. Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R}),$$

alors

$$A^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}).$$

Proposition 4.17. (i) $I_n^\mathsf{T} = I_n$.

(ii) *L'application $A \mapsto A^\mathsf{T}$ est un isomorphisme linéaire de $M_{n,p}(\mathsf{K})$ dans $M_{p,n}(\mathsf{K})$.*

(iii) *Pour tout $A \in M_{n,p}(\mathsf{K})$ on a $(A^\mathsf{T})^\mathsf{T} = A$ (en particulier, si $n = p$ on observe que la transposition est une symétrie de $M_n(\mathsf{K})$).*

(iv) *Pour tous $A \in M_{n,p}(\mathsf{K})$ et $B \in M_{p,q}(\mathsf{K})$ on a $(AB)^\mathsf{T} = B^\mathsf{T}A^\mathsf{T}$ (ce sont des matrices dans $M_{q,n}(\mathsf{K})$).*

Démonstration. On montre (iv). On note $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = (b_{l,m})_{\substack{1\leqslant l\leqslant p\\ 1\leqslant m\leqslant q}}$. Pour $i \in [\![1, q]\!]$ et $k \in [\![1, n]\!]$ on vérifie que les coefficients d'indice (i, k) des matrices $(AB)^\mathsf{T}$ et $B^\mathsf{T}A^\mathsf{T}$ sont tous deux égaux à

$$\sum_{j=1}^{p} a_{k,j}b_{j,i}.$$

□

Définition 4.18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in M_n(\mathsf{K})$.

(i) On dit que A est symétrique si $A^\mathsf{T} = A$ (autrement dit, $a_{i,j} = a_{j,i}$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$).

(ii) On dit que A est anti-symétrique si $A^\mathsf{T} = -A$ (autrement dit, $a_{i,j} = -a_{j,i}$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$).

Remarque 4.19. — Les matrices diagonales sont symétriques.
— Les éléments diagonaux d'une matrice anti-symétriques sont tous nuls.

Proposition 4.20. (i) *L'ensemble $S_n(\mathsf{K})$ des matrices symétriques est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathsf{K})$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.*

(ii) *L'ensemble $A_n(\mathsf{K})$ des matrices anti-symétriques est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathsf{K})$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.*

(iii) *$S_n(\mathsf{K})$ et $A_n(\mathsf{K})$ sont supplémentaires dans $M_n(\mathsf{K})$.*

(iv) *La transposition est la symétrie de $M_n(\mathsf{K})$ par rapport à $S_n(\mathsf{K})$ parallèlement à $A_n(\mathsf{K})$.*

Proposition 4.21. *Soit $A \in M_n(\mathsf{K})$. Alors A est inversible si et seulement si A^T l'est, et dans ce cas on a*

$$(A^\mathsf{T})^{-1} = (A^{-1})^\mathsf{T}.$$

4.2.5 Trace

Définition 4.22. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathsf{K})$. On appelle trace de A la somme des coefficients diagonaux de A :

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Proposition 4.23. (i) *La trace définit une forme linéaire sur* $M_n(\mathsf{K})$.

(ii) *Soient* $A, B \in M_n(\mathsf{K})$. *Alors on a* $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Démonstration. On note $AB = (c_{i,j})$ et $BA = (d_{i,j})$. On a alors

$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{k=1}^{n} c_{k,k} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{k,l} b_{l,k} = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{l,k} a_{k,l} = \sum_{l=1}^{n} d_{l,l} = \mathrm{Tr}(BA). \qquad \square$$

4.3 Matrices et applications linéaires

4.3.1 Matrice d'un vecteur dans une base

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 4.24. Soit $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ une base de E. Soit $x \in \mathsf{E}$. Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathsf{K}$ uniques tels que $x = \sum_{j=1}^{n} x_j \beta_j$. On note

$$\mathrm{Mat}_\beta(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Exemple 4.25. Soit $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ une base de E. Alors on a

$$\mathrm{Mat}_\beta(\beta_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Mat}_\beta(\beta_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \mathrm{Mat}_\beta(\beta_n) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 4.26. On considère dans $\mathbb{R}^2$ la base canonique $e = (e_1, e_2)$ et la base $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ avec

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On considère le vecteur

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Alors on a

$$\mathrm{Mat}_e(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_\beta(x) = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Exemple 4.27. On considère la base canonique $e = (1, X, X^2, X^3, X^4)$ de $\mathbb{R}_4[X]$. Alors on a

$$\mathrm{Mat}_e(X^3 - 2X) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4.3.2 Matrice d'une application linéaire.

Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions finies. On note $p = \dim(\mathsf{E})$ et $n = \dim(\mathsf{F})$. Soient $e = (e_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ une base de E et $f = (f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de F.

Définition 4.28. Soit $u \in L(\mathsf{E}, \mathsf{F})$. Pour $j \in [\![1, p]\!]$ il existe $(a_{1,j}, \dots, a_{n,j}) \in \mathsf{K}^n$ unique tel que

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i$$

(on a $a_{i,j} = f_i^*(u(e_j))$). On définit alors la matrice de u dans les bases e et f par

$$\mathrm{Mat}_{e,f}(u) = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in M_{n,p}(\mathsf{K}).$$

Pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, la j-ième colonne de la matrice $\mathrm{Mat}_{e,f}(u)$ est le vecteur $\mathrm{Mat}_f(u(e_j))$.

Définition 4.29. Soient $u \in L(\mathsf{E})$ et e une base de E. La matrice de u dans la base e est $\mathrm{Mat}_e(u) = \mathrm{Mat}_{e,e}(u)$ (on prend la même base au départ et à l'arrivée !).

Exemple 4.30. Soit β une base de E. Alors on a

$$\mathrm{Mat}_\beta(\mathrm{Id}_{\mathsf{E}}) = I_n.$$

On note que si β et $\tilde{\beta}$ sont deux bases différentes de E alors $\mathrm{Mat}_{\beta,\tilde{\beta}}(\mathrm{Id}_{\mathsf{E}})$ n'est pas I_n.

Exemple 4.31. On considère l'application linéaire

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_1 + x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

On note $e = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $f = (f_1, f_2, f_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a

$$u(e_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -f_1 + f_2 \quad \text{et} \quad u(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = f_2 + f_3,$$

donc

$$\mathrm{Mat}_{e,f}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On considère maintenant la base $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ de $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$u(e_1) = -2\beta_1 + \beta_2 \quad \text{et} \quad u(e_2) = -\beta_1 + \beta_3,$$

d'où

$$\mathrm{Mat}_{e,\beta}(u) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 4.32. On considère dans $\mathbb{R}_4[X]$ l'application linéaire $u : P \mapsto 3P - 2P' + P''$. On note $e = (1, X, X^2, X^3, X^4)$ la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$. On a

$$u(1) = 3, \quad u(X) = 3X - 2, \quad u(X^2) = 3X^2 - 4X + 2,$$
$$u(X^3) = 3X^3 - 6X^2 + 6X, \quad u(X^4) = 3X^4 - 8X^3 + 12X^2.$$

La matrice de u dans la base e est donc

$$\mathrm{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exemple 4.33. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E. On note $p = \dim(\mathsf{F})$ et $q = \dim(\mathsf{G}) = n - p$. Soient $f = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F et $g = (g_1, \dots, g_q)$. On note alors $e = (f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$. Ainsi e est une base de e. On note p la projection de E sur F parallèlement à G et s la symétrie de E par rapport à F parallèlement à G. On a alors

$$\mathrm{Mat}_e(p) = \begin{pmatrix} I_p & 0_{p\times q} \\ 0_{q\times p} & 0_{q\times q} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_e(s) = \begin{pmatrix} I_p & 0_{p\times q} \\ 0_{q\times p} & -I_q \end{pmatrix}.$$

Proposition 4.34. *Soit $x \in \mathsf{E}$. Alors on a*

$$\mathrm{Mat}_f(u(x)) = \mathrm{Mat}_{e,f}(u)\ \mathrm{Mat}_e(x).$$

Démonstration. On note $\mathrm{Mat}_{e,f}(u) = (a_{i,j})$ et $x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. La coordonnée de $u(x)$ selon f_i est

$$f_i^*(u(x)) = f_i^*\left(u\left(\sum_{j=1}^{p} x_j e_j\right)\right) = f_i^*\left(\sum_{j=1}^{p} x_j u(e_j)\right) = \sum_{j=1}^{p} x_j f_i^*\big(u(e_j)\big) = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j.$$

C'est bien la i-ème coordonnée du produit matriciel $\mathrm{Mat}_{e,f}(u)\ \mathrm{Mat}_e(x)$. □

Proposition 4.35. *Soient $e = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $f = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F. Alors l'application*

$$\begin{cases} L(\mathsf{E}, \mathsf{F}) & \to & M_{n,p}(\mathsf{K}) \\ u & \mapsto & \mathrm{Mat}_{e,f}(u) \end{cases}$$

est un isomorphisme linéaire. Sa réciproque est l'application qui à la matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ associe l'unique endomorphisme $u \in L(\mathsf{E}, \mathsf{F})$ tel que

$$\forall j \in [\![1, p]\!], \quad u(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} f_i.$$

Remarque 4.36. On retrouve en particulier que $\dim(L(\mathsf{E}, \mathsf{F})) = \dim(\mathsf{E}) \times \dim(\mathsf{F})$.

Remarque 4.37. Dans le cas $\mathsf{E} = \mathsf{F}$ et en prenant la même base e au départ et à l'arrivée, on obtient que l'application

$$\begin{cases} L(\mathsf{E}) & \to & M_n(\mathsf{K}) \\ u & \mapsto & \mathrm{Mat}_e(u) \end{cases}$$

est un isomorphisme linéaire.

Proposition 4.38. *Soit* E*,* F *et* G *trois espaces vectoriels de dimensions finies. Soient* e*,* f *et* g *des bases de* E*,* F *et* G*, respectivement. Soient* $u \in L(\mathsf{E},\mathsf{F})$ *et* $v \in L(\mathsf{F},\mathsf{G})$*. Alors on a*

$$\mathrm{Mat}_{e,g}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{f,g}(v)\ \mathrm{Mat}_{e,f}(u).$$

Proposition 4.39. *Soient* β *une base de* E *et* $u \in L(\mathsf{E})$*. Alors* u *est inversible dans* $L(\mathsf{E})$ *si et seulement si* $\mathrm{Mat}_\beta(u)$ *est inversible dans* $M_n(\mathsf{K})$*, et dans ce cas on a*

$$\mathrm{Mat}_\beta(u^{-1}) = \big(\mathrm{Mat}_\beta(u)\big)^{-1}.$$

Remarque 4.40. En particulier, la propriété que $\mathrm{Mat}_e(u)$ est inversible ne dépend pas du choix de la base e (même si la matrice elle-même dépend de e).

Démonstration. On note $A = \mathrm{Mat}_\beta(u)$.

On suppose que $u \in \mathrm{GL}(\mathsf{E})$ et on note $B = \mathrm{Mat}_\beta(u^{-1})$. D'après la proposition 4.38 on a $AB = \mathrm{Mat}_\beta(u \circ u^{-1}) = \mathrm{Mat}_\beta(\mathrm{Id}_{\mathsf{E}}) = I_n$ et de même $BA = I_n$. Cela prouve que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathsf{K})$ (et $A^{-1} = B$).

Inversement on suppose que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathsf{K})$. On note v l'unique endomorphisme de E tel que $\mathrm{Mat}_\beta(v) = A^{-1}$. On a alors $\mathrm{Mat}_\beta(u \circ v) = AA^{-1} = I_n$, ce qui implique que $u \circ v = \mathrm{Id}_{\mathsf{E}}$.

□

On observe que les matrices des vecteurs et des applications linéaires permettent de faire des calculs en oubliant complètement le contexte (espace vectoriel et base) et en ne gardant que des coefficients, rangés dans des matrices. Les règles de calcul matriciel ont été choisies de sorte à ce que les calculs sur les matrices respectent bien les règles de calculs entres vecteurs et applications linéaires.

4.3.3 Application linéaire associée à une matrice

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in M_{n,p}(\mathsf{K})$. On a vu que A peut être la matrice d'une application linéaire d'un espace de dimension p dans un espace de dimension n. En fait, d'après la proposition 4.35, A est la matrice de beaucoup d'endomorphismes, puisque pour n'importe quel espaces E et F de dimension p et n, et pour n'importe quelles bases e de E et f de F, il existe $u \in L(\mathsf{E},\mathsf{F})$ telle que $\mathrm{Mat}_{e,f}(u) = A$. Parmis tous ces endomorphismes possibles, on en ressort un qui est naturellement associé à la matrice A.

Définition 4.41. Soit $A \in M_{n,p}(\mathsf{K})$. L'application linéaire canoniquement associée à A est l'application

$$u_A : \begin{cases} \mathsf{K}^p & \to & \mathsf{K}^n \\ X & \mapsto & AX \end{cases}$$

On remarque que pour cette définition les vecteurs de K^p et K^n doivent être vus comme des vecteurs colonnes (ou comme des matrices à 1 colonne).

Exemple 4.42. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Alors l'application linéaire canoniquement associée à A est

$$u_A : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Proposition 4.43. *La matrice de u_A dans les bases canoniques de K^p et K^n est A.*

Définition 4.44. Soit $A \in M_{n,p}(\mathsf{K})$ et $u_A \in L(\mathsf{K}^p, \mathsf{K}^n)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A. Alors on définit $\ker(A) = \ker(u_A)$, $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(u_A)$ et $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(u_A)$.

Remarque 4.45. D'après le théorème du rang appliqué à u_A on a

$$p = \dim(\ker(A)) + \mathrm{rg}(A).$$

Proposition 4.46. (i) *Soit $A \in M_{n,p}(\mathsf{K})$. Alors $\mathrm{rg}(A)$ est le rang dans K^n de la famille des vecteurs colonnes de A (dimension du sous-espace vectoriel engendré par ces vecteurs colonnes).*

(ii) *Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions finies p et n. Soient e une base de E et f une base de F. Soit $u \in L(\mathsf{E}, \mathsf{F})$ et $A = \mathrm{Mat}_{e,f}(u)$. Alors on a $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(u)$.*

Proposition 4.47. *Soit $A \in M_n(\mathsf{K})$. Les assertions suivantes sont équivelentes :*

(i) *A est inversible ;*

(ii) $\ker(A) = \{0\}$ *;*

(iii) $\mathrm{Im}(A) = \mathsf{K}^n$ *;*

(iv) $\mathrm{rg}(A) = n$ *;*

(v) *Les vecteurs colonnes de A forment une base de K^n ;*

(vi) *A est inversible à gauche (il existe $B \in M_n(\mathsf{K})$ telle que $BA = I_n$) ;*

(vii) *A est inversible à droite (il existe $B \in M_n(\mathsf{K})$ telle que $AB = I_n$).*

Remarque 4.48. On peut calculer $\ker(A)$ en utilisant l'algorithme du pivot de Gauss et en déduire le rang de A par le théorème du rang. Considérons par exemple la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R}).$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$. Alors on a

$$\begin{aligned} AX = 0 &\iff \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_4 = 0 \end{cases} \\ &\iff \dots \\ &\iff \begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 - x_4 \\ -x_2 = -2x_3 - x_4 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x_1 = -x_3 - 2x_4 \\ x_2 = 2x_3 + x_4 \end{cases} \end{aligned}$$

Cela prouve que

$$\ker(A) = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Comme ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, ils forment une famille libre dans $\mathbb{R}^4$ et forment donc une base de $\ker(A)$. En particulier $\ker(A)$ est de dimension 2, et d'après le théorème du rang la matrice A est de rang 2.

4.4 Changement de base

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$, muni d'une base $e = (e_1, \dots, e_n)$.

Pour un problème posé dans E, il peut être pertinant de travailler dans une base $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ différente de e. Il faut alors être capable d'exprimer les coordonnées d'un vecteur dans la base β, connaissant ses coordonnées dans la base e, et inversement si l'on veut revenir à une expression dans la base e de départ.

4.4.1 Matrice de changement de base

Soit x un vecteur de E, dont on connait les coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base e :

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j.$$

On cherche les coordonnées $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ de x dans la base β :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \beta_i.$$

Il suffit de savoir faire ce calcul pour les vecteurs de la base e. En effet, si pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ on a calculé les coefficients $(a_{1,j}, \dots, a_{n,j})$ de e_j dans la base β, alors on peut écrire

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\beta_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_j a_{i,j}\beta_i.$$

Ainsi, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ on a

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j.$$

Ainsi on obtient le vecteur $(\xi_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ à partir du vecteur $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ par multiplication par la matrice $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Inversement, si on sait exprimer les vecteurs de la base β dans la base e, alors on pourra exprimer dans e n'importe quel vecteur dont on connait les coefficients dans β. C'est ce sens là qui est le plus facile, car en général on a justement défini la nouvelle base β en l'exprimant dans l'ancienne base e.

La matrice de passage de la base e à la base β est la matrice qui permet de faire le chemin du retour :

Définition 4.49. On appelle matrice de passage de la base e à la base β la matrice P des vecteurs de β dans la base e :

$$P = \mathrm{Mat}_{\beta,e}(\mathrm{Id}_{\mathsf{E}}).$$

Ainsi, la matrice de passage de la base e à la base β est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la base β exprimés dans la base e.

Cette convention est assez contre-intuitive car la matrice de passage de la base e à la base β est celle qui permet d'obtenir les coefficients dans l'ancienne base à partir de ceux dans la nouvelle.

Proposition 4.50. *Soit $x \in \mathsf{E}$. Soient e et β deux bases de E. Soit P la matrice de passage de la base e à la base β. Soient $X_e = \mathrm{Mat}_e(x)$ et $X_\beta = \mathrm{Mat}_\beta(x)$. Alors on a*

$$X_e = PX_\beta.$$

Démonstration. Cela résulte de la proposition 4.34 appliquée avec $u = \mathrm{Id}_{\mathsf{E}}$. □

Proposition 4.51. *La matrice $P = \mathrm{Mat}_{\beta,e}(\mathrm{Id}_{\mathsf{E}})$ est inversible et son inverse est*

$$P^{-1} = \mathrm{Mat}_{e,\beta}(\mathrm{Id}_{\mathsf{E}}).$$

Démonstration. D'après la proposition 4.38 appliquée avec $\mathsf{F} = \mathsf{G} = \mathsf{E}$, $u = v = \mathrm{Id}_{\mathsf{E}}$ et les base $f = \beta$, $g = e$, on a

$$\mathrm{Mat}_{e,\beta}(\mathrm{Id}_{\mathsf{E}})\,\mathrm{Mat}_{\beta,e}(\mathrm{Id}_{\mathsf{E}}) = I_n.$$

Cela prouve que $P = \mathrm{Mat}_{\beta,e}(\mathrm{Id}_{\mathsf{E}})$ est inversible d'inverse $P^{-1} = \mathrm{Mat}_{e,\beta}(\mathrm{Id}_{\mathsf{E}})$. □

Proposition 4.52. *Soit $u \in L(\mathsf{E})$. On note $P = \mathrm{Mat}_{\beta,e}(\mathrm{Id}_{\mathsf{E}})$ la matrice de passage de la base e à la base β. Alors on a*

$$\mathrm{Mat}_\beta(u) = P^{-1}\,\mathrm{Mat}_e(u)P. \tag{4.2}$$

Démonstration. Cela résulte encore de la proposition 4.38, d'après laquelle on a

$$\mathrm{Mat}_\beta(u) = \mathrm{Mat}_{e,\beta}(\mathrm{Id}_{\mathsf{E}})\,\mathrm{Mat}_e(u)\,\mathrm{Mat}_{\beta,e}(\mathrm{Id}_{\mathsf{E}}). \tag{4.3}$$

□

Remarque 4.53. Si on a peur de se mélanger avec la convention définissant P et P^{-1}, on peut simplement écrire (4.3) plutôt que (4.2). Cela permet d'éviter toute ambiguïté.

4.4.2 Matrices semblables

Définition 4.54. Soient $M, M' \in M_n(\mathsf{K})$. On dit que M et M' sont semblables s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathsf{K})$ telle que

$$M' = P^{-1}MP.$$

Proposition 4.55. *Soit* E *un* K*-espace vectoriel de dimension finie* $n \in \mathbb{N}$*. Soient* e *et* β *deux bases de* E*. Alors les matrices* $\mathrm{Mat}_e(u)$ *et* $\mathrm{Mat}_\beta(u)$ *sont semblables.*

Démonstration. Cela résulte directement de la proposition 4.52. □

Remarque 4.56. Inversement, soient M et M' sont deux matrices semblables et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathsf{K})$ telle que $M' = P^{-1}MP$. On note e la base canonique de K^n et on note β la base de K^n formée par les colonnes de P. Ainsi P est la matrice de passage de la base e à la base β. On a alors $M = \mathrm{Mat}_e(u_M)$ et $M' = \mathrm{Mat}_\beta(u_M)$, où u_M est l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice M.

Proposition 4.57. *Deux matrices semblables ont même trace.*

Démonstration. Soient M et M' deux matrices semblables. Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathsf{K})$ telle que $M' = P^{-1}MP$. D'après la proposition 4.23 appliquée avec $A = P^{-1}$ et $B = MP$ on a

$$\mathrm{Tr}(M') = \mathrm{Tr}(P^{-1}MP) = \mathrm{Tr}(MPP^{-1}) = \mathrm{Tr}(M).$$ □

Définition 4.58. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$. Soit $u \in L(\mathsf{E})$. Alors la trace $\mathrm{Tr}(u)$ de u est la trace de la matrice de u dans n'importe quelle base de E.

Remarque 4.59. Soit $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ une base de E. Alors on a

$$\mathrm{Tr}(u) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^*(u(\beta_i)).$$

Il est assez remarquable que cette quantité ne dépende pas de la base choisie.

4.4.3 Exemple d'application d'un changement de base

On chercher à déterminer les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} u_{n+1} = 2v_n - w_n, \\ v_{n+1} = 3u_n - 2v_n, \\ w_{n+1} = -2u_n + 2v_n + w_n. \end{cases} \tag{4.4}$$

On suppose que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont solutions. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}.$$

On note que u_n, v_n et w_n sont alors les coordonnées de U_n dans la base canonique $e = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note également u_A l'endomorphisme canoniquement associé à A. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$U_{n+1} = AU_n = u_A(U_n).$$

Par récurrence on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = A^n U_0. \tag{4.5}$$

On considère la base $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ définie par

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \beta_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

La raison pour laquelle on choisit cette base est qu'elle est constituée de vecteurs sur lesquels l'action de A est très simple. En effet on a

$$A\beta_1 = \beta_1, \quad A\beta_2 = 2\beta_2, \quad A\beta_3 = -4\beta_3.$$

Ainsi la matrice de u_A dans la base β est donc diagonale. On note

$$D = \mathrm{Mat}_\beta(u_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

On note P la matrice de passage de la base e à la base β. On a alors

$$P = \mathrm{Mat}_{\beta,e}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$D = \mathrm{Mat}_\beta(u_A) = \mathrm{Mat}_{e,\beta}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})\,\mathrm{Mat}_e(u_A)\,\mathrm{Mat}_{\beta,e}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = P^{-1}AP.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ on note

$$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = P^{-1}U_n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a alors

$$X_{n+1} = P^{-1}U_{n+1} = P^{-1}AU_n = P^{-1}APX_n = DX_n.$$

Contrairement aux puissances de A, il est facile de calculer par récurrence les puissances de D :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^n \end{pmatrix}.$$

Ainsi on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = D^n X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ 2^n y_0 \\ (-4)^n z_0 \end{pmatrix},$$

puis

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = U_n = PX_n = \begin{pmatrix} x_0 + 4 \cdot 2^n y_0 + 2 \cdot (-4)^n z_0 \\ x_0 + 3 \cdot 2^n y_0 - 3 \cdot (-4)^n z_0 \\ x_0 - 2 \cdot 2^n y_0 + 2 \cdot (-4)^n z_0 \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

Inversement, on peut vérifier que toutes les triplets de suites de cette forme sont solutions de (4.4).

Supposons maintenant qu'on impose de plus une donnée initiale U_0. Par exemple, on cherche les solutions de (4.4) telles que

$$U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'unique solution est donnée par (4.6) avec X_0 tel que

$$PX_0 = U_0. \tag{4.7}$$

La résolution du système donne

$$X_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{17}{30} \end{pmatrix}.$$

On note qu'il n'est pas nécessaire de calculer P^{-1}. Néanmoins, dans le cas d'une petite matrice de taille 3, on peut calculer

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{30} \end{pmatrix}.$$

On retrouve alors la valeur de $X_0 = P^{-1} U_0$ ci-dessus. On peut également calculer la matrice A^n qui apparaît dans (4.5), par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = (PDP^{-1})^n = PD^n P^{-1}.$$

Bref, c'est possible, mais il est important de se rappeler que ce n'est en fait pas nécessaire (pour des gros systèmes, il est bien plus rapide de seulement résoudre le système (4.7) que de calculer P^{-1}). D'ailleurs, déjà pour un système 3×3 on n'a pas envie d'expliciter A^n ci-dessus...

4.5 Exercices

(voir la feuille d'exercices plus complète disponible sur Moodle)

***Exercice* 33.** On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer l'ensemble des matrices $B \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$.

***Exercice* 34.** On note

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

***Exercice* 35.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathsf{K})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathsf{K}[X]$ tel que $P(A) = 0$.

***Exercice* 36.** Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Soient $A \in M_{n,p}(\mathsf{K})$ et $B \in M_{p,n}(\mathsf{K})$. Montrer que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

***Exercice* 37.** Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $e = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ deux bases de E. On note u l'unique endomorphisme de E tel que $u(e_j) = \beta_j$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$. Que peut-on dire de la matrice $\mathrm{Mat}_e(u)$?

***Exercice* 38.** On cherche l'ensemble des fonctions $x, y, z \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x'(t) = 4x(t) - 4y(t) + 4z(t), \\ y'(t) = 3x(t) - 3y(t) + 4z(t), \\ z'(t) = 3x(t) - 3y(t) + 4z(t). \end{cases}$$

1. Écrire le problème sous la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = AX(t),$$

avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $A \in M_3(\mathbb{R})$ à déterminer.
2. On note

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que la famille $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ est base de $\mathbb{R}^3$.
3. On note e la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $P = \mathrm{Mat}_{\beta,e}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ la matrice de passage de la base e à la base β. Expliciter P.
4. Pour $t \in \mathbb{R}$ on note $U(t) = P^{-1}X(t)$. On admet que $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ est dérivable et $U'(t) = P^{-1}X'(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$. Montrer que U est solution d'un problème de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad U'(t) = DU(t),$$

avec une matrice $D \in M_3(\mathbb{R})$ à expliciter.
5. Résoudre le problème précédent.
6. Déterminer l'ensemble des solutions (x, y, z) du problème de départ.
7. Déterminer l'ensemble des solutions vérifiant de plus

$$x(0) = 2, \quad y(0) = 4, \quad z(0) = -1.$$

5 Déterminant

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$.

5.1 Définition du déterminant et premières propriétés

5.1.1 Formes p-linéaires alternées

Définition 5.1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle forme p-linéaire sur E une application ψ de E^p dans K qui est linéaire par rapport à chacune de ses variables : pour $j \in [\![1, p]\!]$, $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, x_p \in \mathsf{E}$, $x, y \in \mathsf{E}$ et $\lambda \in \mathsf{K}$ on a

$$\begin{aligned}&\psi(x_1, \dots, x_{j-1}, \lambda x + y, x_{j+1}, \dots, x_n)\\ &\qquad = \lambda\psi(x_1, \dots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \dots, x_n) + \psi(x_1, \dots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \dots, x_n).\end{aligned}$$

Exemple 5.2. Les formes 1-linéaires sur E sont les formes linéaires sur E.

Exemple 5.3. Le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, définie par

$$\begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) & \mapsto & \sum_{j=1}^n x_j y_j \end{cases}$$

est une forme bilinéaire (2-linéaire) sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 5.4. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une forme p-linéaire sur E est alternée si pour tous $x_1, \dots, x_p \in \mathsf{E}$ tels qu'il existe $i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i \neq j$ et $x_i = x_j$ on a $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.

On s'intéresse ici aux formes n-linéaires alternées sur E.

Cas $n = 2$. On suppose que E est de dimension 2 et on considère une base $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ de E.

On suppose qu'il existe une forme 2-linéaire alternée ψ sur E. Comme ψ est alternée on a nécessairement $\psi(\beta_1, \beta_1) = \psi(\beta_2, \beta_2) = 0$. En outre

$$0 = \psi(\beta_1 + \beta_2, \beta_1 + \beta_2) = \psi(\beta_1, \beta_2) + \psi(\beta_2, \beta_1),$$

donc

$$\psi(\beta_2, \beta_1) = -\psi(\beta_1, \beta_2). \tag{5.1}$$

On considère maintenant deux vecteurs $x_1, x_2 \in \mathsf{E}$. Il existe $x_{1,1}, x_{1,2}, x_{2,1}, x_{2,2} \in \mathsf{K}$ tels que $x_1 = x_{1,1}\beta_1 + x_{1,2}\beta_2$ et $x_2 = x_{2,1}\beta_1 + x_{2,2}\beta_2$. On a alors

$$\begin{aligned}\psi(x_1, x_2) &= x_{1,1}\psi(\beta_1, x_2) + x_{1,2}\psi(\beta_2, x_2)\\ &= x_{1,1}x_{2,1}\psi(\beta_1, \beta_1) + x_{1,1}x_{2,2}\psi(\beta_1, \beta_2) + x_{1,2}x_{2,1}\psi(\beta_2, \beta_1) + x_{1,2}x_{2,2}\psi(\beta_2, \beta_2)\\ &= (x_{1,1}x_{2,2} - x_{1,2}x_{2,1})\psi(\beta_1, \beta_2).\end{aligned}$$

Ainsi ψ est uniquement déterminée, et est donnée par

$$\psi(x_{1,1}\beta_1 + x_{1,2}\beta_2, x_{2,1}\beta_1 + x_{2,2}\beta_2) = (x_{1,1}x_{2,2} - x_{1,2}x_{2,1})\psi(\beta_1, \beta_2).$$

Inversement, on peut vérifier que ψ ainsi définie est bien une forme 2-linéaire alternée. Ainsi les formes 2-linéaires sur E de dimension 2 sont les applications de la forme

$$\psi : (x_1, x_2) \mapsto (x_{1,1}x_{2,2} - x_{1,2}x_{2,1})\psi(\beta_1, \beta_2).$$

En particulier, ψ est uniquement déterminée par sa valeur en (β_1, β_2) (et l'ensemble des formes 2-linéaires alternées sur E est un K-espace vectoriel de dimension 1).

Cas $n = 3$. On suppose que E est de dimension 3 et on considère une base $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ de E.

On suppose qu'il existe une forme 3-linéaire alternée ψ sur E. On considère $x_1, x_2, x_3 \in \mathsf{E}$. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$ on considère $x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3} \in \mathsf{K}$ tels que

$$x_i = x_{i,1}\beta_1 + x_{i,2}\beta_2 + x_{i,3}\beta_3.$$

On a alors

$$\begin{aligned}\psi(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{1 \leqslant j_1, j_2, j_3 \leqslant 3} x_{1,j_1}x_{2,j_2}x_{3,j_3}\psi(\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \beta_{j_3}) \\ &= \sum_{(j_1,j_2,j_3) \in P} x_{1,j_1}x_{2,j_2}x_{3,j_3}\psi(\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \beta_{j_3}),\end{aligned}$$

avec

$$P = \{(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1)\}.$$

On note qu'on a nécessairement

$$\begin{aligned}&\psi(\beta_1, \beta_3, \beta_2) = -\psi(\beta_1, \beta_2, \beta_3), \\ &\psi(\beta_2, \beta_1, \beta_3) = -\psi(\beta_1, \beta_2, \beta_3), \\ &\psi(\beta_2, \beta_3, \beta_1) = -\psi(\beta_1, \beta_3, \beta_2) = \psi(\beta_1, \beta_2, \beta_3), \\ &\psi(\beta_3, \beta_1, \beta_2) = -\psi(\beta_1, \beta_3, \beta_2) = \psi(\beta_1, \beta_2, \beta_3), \\ &\psi(\beta_3, \beta_2, \beta_1) = -\psi(\beta_1, \beta_2, \beta_3).\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\psi(x_1, x_2, x_3) = \psi(\beta_1, \beta_2, \beta_3)\big(&x_{1,1}x_{2,2}x_{3,3} + x_{1,2}x_{2,3}x_{3,1} + x_{1,3}x_{2,2}x_{3,1} \\ &- x_{1,1}x_{2,3}x_{3,2} - x_{1,2}x_{2,1}x_{3,3} - x_{1,3}x_{2,2}x_{3,1}\big).\end{aligned}$$

Inversement, on peut vérifier que les applications de cette forme sont bien des formes 3-linéaires alternées sur E, et en particulier l'ensemble des formes 3-linéaires alternées sur E est un K-espace vectoriel de dimension 1.

Définition 5.5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle permutation de $[\![1, n]\!]$ une bijection de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même. L'ensemble $\mathcal{S}_n$ des permutations de $[\![1, n]\!]$ est appelé groupe symétrique de degré n.

Définition 5.6. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. On note $\varepsilon(\sigma)$ la signature de σ définie par

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{sign}(\sigma(j) - \sigma(i)) \quad \in \{-1, +1\}.$$

Proposition 5.7. *Soit $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ une base de E. Alors les formes n-linéaire alternées sur E sont les applications de la forme*

$$(x_1, \ldots, x_n) \in \mathsf{E}^n \mapsto \lambda \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{1,\sigma(1)} x_{2,\sigma(2)} \ldots x_{n,\sigma(n)}.$$

Remarque 5.8. On a

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{1,\sigma(n)} x_{2,\sigma(2)} \ldots x_{n,\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1} x_{\sigma(2),2} \ldots x_{\sigma(n),n}$$

5.1.2 Déterminant d'une famille de vecteur dans une base

Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 5.9. Soit $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ une base de E. On appelle déterminant dans la base β et on note $\det_\beta$ l'unique forme linéaire alternée sur E telle que

$$\det_\beta(\beta) = 1.$$

Elle est donnée par

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathsf{E}^n, \quad \det_\beta(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{1,\sigma(n)} x_{2,\sigma(2)} \ldots x_{n,\sigma(n)},$$

où pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ on a noté

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{i,j} \beta_i.$$

Dans $\mathbb{R}^2$, où on a une notion d'aire, et en prenant pour β la base canonique, on peut interpréter la valeur absolue du déterminant de deux vecteurs comme étant l'aire du parallélogramme défini par ces deux vecteurs (voir `https://www.youtube.com/watch?v=zLYLGdpHxl4`). En particulier, on observe que $\det_\beta(x, y) = 0$ si et seulement si x et y sont colinéaires. Le signe du déterminant est liée à l'orientation de ces deux vecteurs (par exemple si x et y forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$, alors elle est directe si leur déterminant dans la base canonique est positif, et indirecte s'il est négatif.

Proposition 5.10. *Soient β et $\tilde{\beta}$ deux bases de E. Alors pour toute famille f de n vecteurs de E on a*

$$\det_{\tilde{\beta}}(f) = \det_{\tilde{\beta}}(\beta) \det_\beta(f).$$

Démonstration. Il existe $\lambda \in \mathsf{K}$ tel que $\det_{\tilde{\beta}} = \lambda \det_\beta$. En évaluant en β, on obtient que $\lambda = \det_{\tilde{\beta}}(\beta)$. □

Proposition 5.11. *Soit β une base de E et x une famille de n vecteurs de E. Alors x est une base de E si et seulement si $\det_\beta(x) \neq 0$.*

Démonstration. On note $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

- On suppose que la famille x est une base de E. Alors d'après la proposition 5.10 on a

$$1 = \det_\beta(\beta) = \det_\beta(x) \det_x(\beta).$$

Cela prouve que $\det_\beta(x) \neq 0$.

- On suppose que la famille x n'est pas une base. Comme elle est liée, il existe $k \in [\![1, n]\!]$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathsf{K}$ tels que

$$x_k = \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq k}} \lambda_j x_j.$$

On a alors

$$\det_\beta(x) = \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq k}} \lambda_j \det_\beta(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_j, x_{k+1}, \ldots, x_n) = 0.$$

□

5.1.3 Déterminant d'un endomorphisme

Proposition-Définition 5.12. Soit $u \in L(\mathsf{E})$. Il existe un unique scalaire, appelé déterminant de u et noté $\det(u)$, tel que pour toute base $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ de E et toute famille $(x_1, \ldots, x_n)$ de vecteurs de E on a

$$\det_\beta(u(x_1), \ldots, u(x_n)) = \det(u)\det_\beta(x_1, \ldots, x_n).$$

Remarque 5.13. En particulier on a

$$\det(u) = \det_\beta(u(\beta_1), \ldots, u(\beta_n)).$$

Démonstration. Soit β une base de E. L'application

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \det_\beta(u(x_1), \ldots, u(x_n))$$

est une forme n-linéaire alternée sur E, donc il existe un scalaire qu'on note $\det_\beta(u)$ tel que

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathsf{E}^n, \quad \det_\beta(u(x_1), \ldots, u(x_n)) = \det_\beta(u)\det_\beta(x_1, \ldots, x_n).$$

Il reste à montrer que ce scalaire $\det_\beta(u)$ ne dépend pas du choix de la base β. On considère une autre base $\tilde{\beta}$. On a

$$\det_{\tilde{\beta}}(u(\beta_1), \ldots, u(\beta_n)) = \det_{\tilde{\beta}}(u)\det_{\tilde{\beta}}(\beta)$$

Comme $\det_{\tilde{\beta}}(\beta) = \det_\beta(\tilde{\beta})^{-1}$, cela donne

$$\det_{\tilde{\beta}}(u) = \det_\beta(\tilde{\beta})\det_{\tilde{\beta}}(u(\beta_1), \ldots, u(\beta_n)) = \det_\beta(u(\beta_1), \ldots, u(\beta_n)) = \det_\beta(u).$$

Ainsi $\det_\beta(u)$ ne dépend pas du choix de la base β. □

Proposition 5.14. (i) *Pour* $u, v \in L(\mathsf{E})$ *on a* $\det(u \circ v) = \det(u)\det(v)$.

(ii) *On a* $\det(\mathrm{Id}_\mathsf{E}) = 1$.

(iii) *Soit* $u \in L(\mathsf{E})$. *Alors* u *est inversible si et seulement si* $\det(u) \neq 0$, *et dans ce cas on a*

$$\det(u^{-1}) = \frac{1}{\det(u)}.$$

Démonstration. Soit $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ une base de E.

- Soient $u, v \in L(\mathsf{E})$. On a

$$\begin{aligned}\det(u \circ v) &= \det_\beta(u(v(\beta_1)), \dots, u(v(\beta_n)))\\ &= \det(u)\det_\beta(v(\beta_1), \dots, v(\beta_n))\\ &= \det(u)\det(v)\det_\beta(\beta_1, \dots, \beta_n)\\ &= \det(u)\det(v).\end{aligned}$$

- On a

$$\det(\mathrm{Id}_\mathsf{E}) = \det_\beta(\mathrm{Id}_\mathsf{E}(\beta_1), \dots, \mathrm{Id}_\mathsf{E}(\beta_n)) = \det_\beta(\beta_1, \dots, \beta_n) = 1.$$

- On a

$$\begin{aligned}u \in \mathrm{GL}(\mathsf{E}) &\iff (u(\beta_1), \dots, u(\beta_n)) \text{ est une base de } \mathsf{E}\\ &\iff \det_\beta(u(\beta_1), \dots, u(\beta_n)) \neq 0\\ &\iff \det(u) \neq 0,\end{aligned}$$

et dans ce cas on a

$$\det(u)\det(u^{-1}) = \det(u \circ u^{-1}) = \det(\mathrm{Id}_\mathsf{E}) = 1.$$

□

Remarque 5.15. Pour $u \in L(\mathsf{E})$ et $\alpha \in \mathsf{K}$ on a $\det(\alpha u) = \alpha^n \det(u)$. En particulier $\det(\alpha\,\mathrm{Id}_\mathsf{E}) = \alpha^n$.

5.1.4 Déterminant d'une matrice carrée

Définition 5.16. Soit $A \in M_n(\mathsf{K})$. On appelle déterminant de A et on note $\det(A)$ le déterminant de l'endomorphisme canoniquement associé à A. De façon équivalente, $\det(A)$ est le déterminant de la famille des n vecteurs colonnes de A dans la base canonique de K^n.

Démonstration. On vérifie que les deux définitions sont effectivement équivalentes. On note $e = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de K^n. Alors on a

$$\det(u_A) = \det_e(u_A(e_1), \dots, u_1(e_n)) = \det_e(Ae_1, \dots, Ae_n).$$ □

Pour $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ on note également

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n}\end{vmatrix}.$$

On note qu'on a

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(n)} a_{2,\sigma(2)} \dots a_{n,\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n}. \tag{5.2}$$

Proposition 5.17. (i) *Pour* $A, B \in M_n(\mathsf{K})$ *on a* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(ii) *On a* $\det(I_n) = 1$.

(iii) *Soit* $A \in M_n(\mathsf{K})$. *Alors* A *est inversible si et seulement si* $\det(A) \neq 0$, *et dans ce cas on a*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Démonstration. Cela résulte de la proposition 5.14 appliquée à l'endomorphisme u_A de K^n. □

Proposition 5.18. *Soit* $A \in M_n(\mathsf{K})$. *Alors on a* $\det(A^\mathsf{T}) = \det(A)$.

Démonstration. Cela résulte de (5.2). □

Proposition 5.19. *Soit* E *un* K*-espace vectoriel de dimension finie* $n \in \mathbb{N}^*$. *Soit* $u \in L(\mathsf{E})$. *Soit* β *une base de* E *et* $A = \mathrm{Mat}_\beta(u)$. *Alors on a* $\det(u) = \det(A)$.

Démonstration. On note $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, de sorte que pour $j \in [\![1, n]\!]$ on a

$$u(\beta_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \beta_i.$$

On a alors

$$\det(u) = \det{}_\beta(u(\beta_1), \ldots, u(\beta_n)) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(n)} a_{2,\sigma(2)} \ldots a_{n,\sigma(n)} = \det(A).$$

□

Proposition 5.20. *Deux matrices carrées semblables ont même déterminant.*

Preuve matricielle. Soient $A, B \in M_n(\mathsf{K})$ deux matrices semblables. Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathsf{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$. On a alors

$$\det(B) = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1}) \det(A) \det(P) = \det(P)^{-1} \det(A) \det(P) = \det(A).$$

□

Preuve géométrique. Soient $A, B \in M_n(\mathsf{K})$. D'après la remarque 4.56 il existe un K-espace vectoriel E de dimension n, $u \in L(\mathsf{E})$ et deux bases $\beta, \tilde{\beta}$ de E telles que $A = \mathrm{Mat}_\beta(u)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\tilde{\beta}}(u)$. On a alors

$$\det(A) = \det(u) = \det(B).$$ □

5.2 Calcul du déterminant d'une matrice

On continue dans cette section à donner des propriétés du déterminant, en vue d'être capable de le calculer plus ou moins explicitement. On rappelle qu'il est équivalent de parler du déterminant d'un endormorphisme ou d'une matrice.

5.2.1 Cas des petites dimensions

On a déjà discuté au paragraphe le déterminant en petites dimensions. On rappelle ici les expressions obtenues dans le cadre matriciel.

Proposition 5.21. (i) *Soit* $A = (a) \in M_1(\mathsf{K})$*. Alors on a*

$$\det(A) = \left|a\right| = a.$$

(ii) *Soit* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathsf{K})$*. Alors on a*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

(iii) *Soient* $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in M_3(\mathsf{K})$*. Alors on a*

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb.$$

On observe que les termes avec un signe « + » sont obtenus en suivant les « diagonales »allant dans la direction « $\searrow$ », tandis qu'on obtient les termes avec un signe « - »en suivant les « diagonales »allant dans la direction « $\nearrow$ »

$$+ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix} \qquad - \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}$$

5.2.2 Cas des matrices diagonales et triangulaires

Proposition 5.22. *Soient* $a_1, \dots, a_n \in \mathsf{K}$ *et*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_n \end{pmatrix}.$$

Alors on a

$$\det(A) = a_1 \dots a_n.$$

Proposition 5.23. *Soient* $a_1, \dots, a_n \in \mathsf{K}$ *et* $A \in M_n(\mathsf{K})$ *une matrice triangulaire supérieure de la forme*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_n \end{pmatrix}.$$

Alors on a

$$\det(A) = a_1 \dots a_n.$$

On a un résultat analogue pour une matrice triangulaire inférieure.

Démonstration. On note $A = (\alpha_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. S'il existe $j \in [\![1,n]\!]$ tel que $\sigma(j) > j$ alors on a

$$\alpha_{1,\sigma(n)}\alpha_{2,\sigma(2)}\dots\alpha_{n,\sigma(n)} = 0.$$

Or la seule permutation σ de $[\![1,n]\!]$ vériant $\sigma(j) \leqslant j$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$ est $\mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}$ (et sa signature est 1). On a alors

$$\det(A) = \alpha_{1,1}\alpha_{2,2}\dots\alpha_{n,n} = a_1a_2\dots a_n.$$ □

Proposition 5.24. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in M_n(\mathsf{K})$ une matrice de la forme*

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-r\times r} & C \end{pmatrix}$$

avec $A \in M_r(\mathsf{K})$, $B \in M_{r,n-r}(\mathsf{K})$ et $C \in M_{n-r}(\mathsf{K})$. Alors on a

$$\det(M) = \det(A)\det(C).$$

Exemple 5.25. On a

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & -1 & 6 & -9 \\ -1 & 3 & 5 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \times \left|-1\right| \times \begin{vmatrix} -2 & -6 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} \times \left|-2\right| = 3 \times (-1) \times 2 \times (-2) = 12.$$

Démonstration. *(à compléter)* □

5.2.3 Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes

Proposition 5.26. *Soit $A \in M_n(\mathsf{K})$. Soit $\lambda \in \mathsf{K}$.*

(i) $\det(A)$ *est inchangé si on ajoute λ fois une colonne de A à une autre.*

(ii) $\det(A)$ *est changé en $-\det(A)$ si on échange deux colonnes de A.*

(iii) $\det(A)$ *est changé en $\lambda\det(A)$ si on multiplie une (et une seule) colonne de A par λ.*

On a des propriétés analogues en remplaçant partout « colonne » par « ligne ».

Démonstration. On note $e = (e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de K^n. On rappelle que

$$\det(A) = \det_e(Ae_1,\dots,Ae_n),$$

où $Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n$ sont les colonnes de A. La dernières propriétés est due à la linéarité par rapport à chacune des variables, tandis que la deuxième se montre comme en (5.1). Enfin pour montrer la première propriété on suppose qu'on ajoute λ fois la première colonne à la deuxième. On a alors

$$\det(Ae_1, Ae_2 + \lambda Ae_1, Ae_3, \dots, Ae_n)$$
$$= \det(Ae_1, Ae_2, Ae_3, \dots, Ae_n) + \lambda\det(Ae_1, Ae_1, Ae_3, \dots, Ae_n) = \det(A).$$

Enfin on obtient les résultats sur les lignes en appliquant ces résultats aux colonnes de A^{T} et en appliquant la proposition 5.18. □

Avec ces opérations, on peut calculer un déterminant par l'algorithme du pivot de Gauss.

Exemple 5.27. On considère

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \\ 5 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors on a

$$\begin{aligned} \det(A) &= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \\ 5 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & -4 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \end{vmatrix} \\ &= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 60. \end{aligned}$$

5.2.4 Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Proposition 5.28. *Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathsf{K})$. Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]$ on note $\tilde{A}_{i,j} \in M_{n-1}(\mathsf{K})$ la matrice obtenue à partir de A en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne.*

(i) *Soit $j \in [\![1,n]\!]$. Alors on a*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(\tilde{A}_{i,j}).$$

(ii) *Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Alors on a*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(\tilde{A}_{i,j}).$$

Démonstration. On montre la formule de développement par rapport à une colonne. La formule de développement par rapport à une ligne s'obtient de façon analogue ou en utilisant l'invariance du déterminant par transposition. Soit $j \in [\![1,n]\!]$. On note $e = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de K^n. On a alors

$$Ae_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i.$$

On a

$$\det(A) = \det_e(Ae_1, \dots, Ae_j, \dots Ae_n).$$

On échange la colonne Ae_j avec Ae_{j-1}, puis avec Ae_{j-2}, et ainsi de suite jusqu'à échanger avec Ae_1. On a alors fait $(j-1)$ changements, donc

$$\det(A) = (-1)^{j-1} \det_e(Ae_j, Ae_1, \dots, Ae_{j-1}, Ae_{j+1}, \dots, Ae_n).$$

Par linéarité du déterminant par rapport à la première colonne on a alors

$$\det(A) = (-1)^{j-1}\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} 0 & a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i,j} & a_{i,1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Pour chaque terme, on fait maintenant remonter la i-ème ligne en première position (cela fait $(i-1)$ échanges de lignes. Cela donne

$$\det(A) = (-1)^{j-1}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\begin{vmatrix} a_{i,j} & a_{i,1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n} \\ 0 & a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

D'après la proposition 5.24 on a alors

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{i,j}\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Ce dernier déterminant étant précisément celui de la matrice $\tilde{A}_{i,j}$, cela conclut la démonstration. □

Exemples 5.29. En guise de premiers exemples, on peut retrouver l'expression du déterminant pour une matrice de $M_2(\mathsf{K})$, puis celui d'une matrice de $M_3(\mathsf{K})$.

Définition 5.30. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in M_n(\mathsf{K})$. Pour $i, j \in [\![1, n]\!]$ on appelle cofacteur d'indice (i, j) de A le scalaire

$$\mathrm{Cof}_{i,j}(A) = (-1)^{i+j}\det(\tilde{A}_{i,j}),$$

où $\tilde{A}_{i,j}$ est comme à la proposition précédente. On appelle commatrice de A la matrice des cofacteurs de A :

$$\mathrm{Com}(A) = (\mathrm{Cof}_{i,j}(A))_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

Proposition 5.31 (Formule de la commatrice)**.** *Soit $A \in M_n(\mathsf{K})$. Alors on a*

$$A(\mathrm{Com}(A))^{\mathsf{T}} = (\mathrm{Com}(A))^{\mathsf{T}}A = \det(A)I_n.$$

En particulier, si A est inversible alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\mathrm{Com}(A))^{\mathsf{T}}$$

Démonstration. On note $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = A(\mathrm{Com}(A))^{\mathsf{T}}$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]$. On a

$$b_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\mathrm{Cof}_{j,k}(A).$$

En particulier pour $i \in [\![1,n]\!]$ on a par la formule du développement par rapport à la i-ème ligne de A :

$$b_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\mathrm{Cof}_{i,k}(A) = \det(A).$$

On suppose maintenant que $i \neq j$. On note $C = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la j-ième ligne par la i-ème. En particulier C a deux lignes égales, donc $\det(C) = 0$. On a

$$b_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\mathrm{Cof}_{j,k}(A) = \sum_{k=1}^{n} c_{j,k}\mathrm{Cof}_{j,k}(C) = \det(C) = 0.$$

Ainsi dans tous les cas on a $b_{i,j} = \delta_{i,j}\det(A)$, donc $B = \det(A)I_n$. On procède de la même façon pour montrer que $(\mathrm{Com}(A))^{\mathsf{T}}A = \det(A)I_n$. □

5.3 Exercices

(voir la feuille d'exercices plus complète disponible sur Moodle)

***Exercice* 39.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$. On peut voir A comme une matrice à coefficients complexes. Le déterminant de la matrice A est-il le même si on la considère comme une matrice réelle ou une matrice complexe ?

***Exercice* 40.** Soit $n \geqslant 2$. Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & & (0) \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & (0) & & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

***Exercice* 41.** Soit $n \geqslant 2$. Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & (0) \\ & 1 & \ddots & \\ & (0) & \ddots & 1 \\ 1 & & & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

***Exercice* 42** (Déterminant de Vandermonde)**.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathsf{K}$. On considère la matrice

$$V(a_1,\dots,a_n) = (a_j^{i-1})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

On cherche à calculer le déterminant de cette matrice (déterminant de Vandermonde).
1. Montrer que si les a_j, $1 \leqslant j \leqslant n$ ne sont pas deux à deux distincts, alors ce déterminant est nul. On suppose pour la suite que les a_j, $1 \leqslant j \leqslant n$ sont bien deux à deux distincts.
2. Calculer le déterminant de Vandermonde pour $n = 1$ et $n = 2$.
3. On considère le polynôme

$$P(X) = \det(V(a_1, \ldots, a_{n-1}, X)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & X \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & X^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \ldots & X^{n-1} \end{vmatrix} \in \mathsf{K}[X].$$

Donner le degré de P, une expression de son coefficient dominant, et $n-1$ de ses racines.
4. Montrer que

$$\det(V(a_1, \ldots, a_n)) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

***Exercice* 43.** On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Pour quelles valeurs de λ (réelles / complexes) la matrice $(A - \lambda I_3)$ est-elle inversible ?
2. Dans tous les cas, calculer $\ker(A - \lambda I_3)$.
3. Mêmes questions avec les matrices

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

***Exercice* 44.** Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit β une base de E. Soit $u \in L(\mathsf{E})$. Pour $x_1, \ldots, x_n \in \mathsf{E}$ on pose

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \det_\beta(x_1, \ldots, x_{i-1}, u(x_i), x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Déterminer l'application φ (on pourra commencer par vérifier que φ est une forme n-linéaire alternée sur E.

(À suivre...)