

Chapitre 2

Transformée de Fourier

La transformée de Fourier est un outil fondamental, en particulier pour l'étude des équations aux dérivées partielles. La raison est qu'elle « diagonalise » (en un sens qu'il faudra préciser) les opérateurs différentiels.

Commençons par rappeler la motivation de la réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$. Soient A un endomorphisme de E et $u_0 \in E$. On considère sur E le problème

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), & \forall t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

où l'inconnue u est une fonction (disons de classe C^1) de \mathbb{R} dans E . Le cas favorable est le cas où u_0 est un vecteur propre de A , associé à une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Dans ce cas, il est facile de voir qu'on obtient une solution en posant, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$u(t) = e^{t\lambda}u_0.$$

En effet, la fonction u ainsi définie est de classe C^∞ de \mathbb{R} dans E , on a $u(0) = u_0$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$u'(t) = e^{t\lambda}\lambda u_0 = e^{t\lambda}Au_0 = Au(t).$$

Comme l'équation $u' = Au$ est linéaire par rapport à u , on obtient que si u_0 est une combinaison linéaire de vecteurs propres, c'est-à-dire si

$$u_0 = \sum_{j=1}^k \alpha_j e_j,$$

où $k \leq n$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ et pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ le vecteur e_j est un vecteur propre de A associée à une valeur propre $\lambda_j \in \mathbb{C}$, alors une solution de (2.1) est donnée par

$$u(t) = \sum_{j=1}^k e^{t\lambda_j} \alpha_j e_j.$$

L'intérêt des résultats de réduction des endomorphismes est alors de donner des critères assurant que tout vecteur u_0 de E s'écrit comme combinaison linéaire de vecteurs propres de A . Ainsi, si A est un endomorphisme diagonalisable et si on peut déterminer ses valeurs propres et vecteurs propres, on pourra alors résoudre *facilement* le problème (2.1) pour n'importe quelle donnée initiale u_0 .

Il se trouve que beaucoup de modèles issus de problèmes concrets peuvent s'écrire sous la forme (2.1), mais avec un espace E qui est un espace de fonctions (typiquement $L^2(\mathbb{R}^d)$), et donc de dimension infinie, et une application linéaire A qui est un opérateur différentiel. Un exemple qui revient souvent (par exemple pour l'équation de la chaleur, mais aussi pour l'équation de Schrödinger ou encore l'équation des ondes) est l'opérateur Laplacien

$$A = \Delta = \sum_{k=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}.$$

L'équation de la chaleur sur \mathbb{R}^d s'écrit par exemple

$$\partial_t u(t, x) = \Delta u(t, x), \quad \forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

L'étude est évidemment plus compliquée qu'en dimension finie, raison de plus pour l'aborder du bon point de vue.

Pour simplifier la suite de la discussion, on suppose que $d = 1$. Considérons pour le moment l'exemple le plus simple d'opérateur différentiel sur \mathbb{R} :

$$Av(x) = v'(x).$$

On cherche des vecteurs propres pour l'opérateur A , c'est-à-dire des fonctions v telles que $v' = \lambda v$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$. Les candidats sont évidemment les fonctions exponentielles $x \mapsto e^{\lambda x}$. Ces fonctions apparaissent déjà dans la théorie des séries de Fourier, qui ont précisément été introduites pour résoudre l'équation de la chaleur, mais sur un intervalle borné. D'après la théorie des séries de Fourier, si on note

$$e_n : x \mapsto e^{\frac{2i\pi nx}{T}}, \quad \text{pour } n \in \mathbb{Z},$$

alors la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une *base hilbertienne* de l'espace de Hilbert $L_T^2(\mathbb{R})$ des fonctions f localement intégrables et T -périodiques de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , muni de la norme définie par

$$\|f\|_{L_T^2(\mathbb{R})}^2 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)|^2 dx.$$

Ainsi pour toute fonction $f \in L_T^2(\mathbb{R})$ on a dans $L_T^2(\mathbb{R})$

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n \quad \text{où} \quad c_n(f) = \langle f, e_n \rangle = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-\frac{2i\pi ny}{T}} f(y) dy.$$

En outre, chaque e_n est un vecteur propre pour l'opérateur de dérivation. Si f est régulière on a alors

$$f' = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n' = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{2i\pi n}{T} c_n(f) e_n.$$

Cela vaut pour les fonctions T -périodiques, quitte à périodiser, cela vaut donc également pour les fonctions définies sur un intervalle de longueur T .

Ici, on s'intéresse à des fonctions qui ne sont pas périodiques et sont définies sur tout \mathbb{R} . Formellement, on a envie de voir ce qu'il se passe si on fait tendre T vers $+\infty$ dans les expressions précédentes. En observant que pour $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ on a

$$\frac{2\pi}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi\left(\frac{2\pi n}{T}\right) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi(\xi) d\xi \quad (2.2)$$

(c'est essentiellement une somme de Riemann), on a très envie d'écrire $f(x)$ comme

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-iy\xi} f(y) dy \right) e^{ix\xi} d\xi. \quad (2.3)$$

Si cette écriture a un sens, et qu'elle donne vraiment une expression de $f(x)$, alors on aura écrit f comme une intégrale (qui peut être vue comme la limite d'une série, voir (2.2), ou encore comme une « somme continue ») de fonctions de la forme $c_\xi(f)e^{ix\xi}$, qui sont bien des « vecteurs propres » (encore faudrait-il préciser l'espace dans lequel on travaille) associé à l'opérateur de dérivation. En outre le coefficient $c_\xi(f)$ correspondant s'écrit comme le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R})$ de f avec la fonction conjuguée $x \mapsto \overline{e^{ix\xi}} = e^{-ix\xi}$. Sauf que la fonction $x \mapsto e^{ix\xi}$ n'est pas du tout dans $L^2(\mathbb{R})$...

Ainsi, la définition de la transformée de Fourier sur \mathbb{R} (ou \mathbb{R}^d pour tout $d \in \mathbb{N}^*$) est motivée et guidée par les bonnes propriétés des séries de Fourier sur un intervalle borné, mais pour espérer obtenir des résultats analogues dans ce cadre, une analyse spécifique est nécessaire. C'est l'objet de ce chapitre.

2.1 Classe de Schwartz

Dans ce chapitre on sera amené à s'appuyer sur les fonctions de Schwartz.

Définition 2.1. On note $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et on appelle classe de Schwartz l'ensemble des fonctions ϕ de classe C^∞ sur \mathbb{R}^d telles que pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$ il existe $C_{\alpha, \beta} > 0$ pour laquelle

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \left| x^\alpha \partial^\beta \phi(x) \right| \leq C_{\alpha, \beta}.$$

On dit que toutes les dérivées de ϕ sont à décroissance rapide.

Exemples 2.2. — On a $C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

— L'application $x \mapsto e^{-|x|^2}$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ mais pas dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Définition 2.3. On dit que $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ est à croissance au plus polynomiale (à croissance lente) s'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad |f(x)| \leq C(1 + |x|)^N.$$

Proposition 2.4. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est un espace vectoriel, stable par produit usuel, par produit de convolution, par dérivation et par multiplication par une fonction de classe C^∞ dont toutes les dérivées sont à croissance lente.

Démonstration. Montrons que si f et g sont des fonctions de Schwartz alors leur produit de convolution ($f * g$) est également dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^d$. Soit $y \in \mathbb{R}^d$. Si $|x| \geq 2|y|$ on a

$$|x - y| \geq |x| - |y| \geq \frac{|x|}{2},$$

d'où

$$\begin{aligned} |x|^k |(f * g)(x)| &\leq |x|^k \int_{y \in \mathbb{R}^d} |f(x - y)| |g(y)| dy \\ &\leq \int_{|y| \leq \frac{|x|}{2}} 2^k |x - y|^k |f(x - y)| |g(y)| dy + \int_{|y| \geq \frac{|x|}{2}} |f(x - y)| 2^k |y|^k |g(y)| dy. \end{aligned}$$

Cela prouve que si f et g sont à décroissance rapide, alors $(f * g)$ l'est également.

Par dérivation sous l'intégrale, on voit que pour $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ le produit de convolution $(f * g)$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^d et pour $\beta \in \mathbb{N}^d$ on a $\partial^\beta(f * g) = (\partial^\beta f) * g$. Le résultat précédent appliqué à $\partial^\beta f$ et g assure que les dérivées de $(f * g)$ sont à décroissance rapide, et donc que $(f * g) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. \square

Puisqu'on travaillera également dans différents espaces de Lebesgue, on donne quelques liens utiles entre ces différents espaces.

Proposition 2.5. (i) Pour tout $p \in [1, +\infty]$ on a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d)$.

(ii) Pour $p \in [1, +\infty[$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. Plus précisément, pour $p, q \in [1, +\infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^q(\mathbb{R}^d)$ il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de Schwartz qui converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ et dans $L^q(\mathbb{R}^d)$.

Le premier point est facile, pour le deuxième on utilise le fait que ces propriétés de densité sont déjà valables pour $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, qui est inclus dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

On termine avec la propriété d'intégration par parties sur \mathbb{R}^d . La forte décroissance des fonctions de Schwartz à l'infini assure qu'il n'y a pas de difficulté avec les termes de bord pour montrer le résultat suivant.

Proposition 2.6. Soit $u \in C^1(\mathbb{R}^d)$ une fonction à croissance lente dont les dérivées partielles d'ordre 1 sont également à croissance lente. Soit $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors pour $j \in [1, d]$ les fonctions $(\partial_j u)v$ et $u(\partial_j v)$ sont intégrables sur \mathbb{R}^d et on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\partial_j u)v \, dx = - \int_{\mathbb{R}^d} u(\partial_j v) \, dx.$$

2.2 Transformée de Fourier dans L^1

On commence par définir ce qui jouera le rôle de « coefficient de Fourier » pour une fonction qui n'est pas périodique. C'est dans l'espace $L^1(\mathbb{R}^d)$ que la définition suivante a naturellement un sens.

Définition 2.7. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Pour $\xi \in \mathbb{R}^d$ on pose

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot \xi} f(x) \, dx. \quad (2.4)$$

La fonction \hat{f} ainsi définie sur \mathbb{R}^d est appelée *transformée de Fourier* de f . On la note également $\mathcal{F}f$.

Cette définition est bien licite car la fonction $x \mapsto e^{-ix \cdot \xi} f(x)$ est intégrable pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$. En outre, la définition de $\hat{f}(\xi)$ ne dépend pas du choix d'un représentant pour f (autrement dit, on ne change pas la définition si on remplace une fonction intégrable f par une fonction qui lui est égale presque partout). Dans la suite on ne discutera plus la distinction entre fonctions de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ ou classes d'équivalence modulo égalité presque partout dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.

On note que même si f n'est définie qu'à égalité presque partout près, \hat{f} est bien définie ponctuellement. On remarque en particulier que $\hat{f}(0)$ est simplement l'intégrale de f :

$$\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \, dx.$$

Exemple 2.8. Soit $a > 0$. On considère sur \mathbb{R} la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2a} \mathbf{1}_{[-a,a]}$. Alors $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}(0) = 1$ et pour $\xi \in \mathbb{R}^*$ on a

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{2a} \frac{e^{-ia\xi} - e^{ia\xi}}{-i\xi} = \frac{\sin(a\xi)}{a\xi}.$$

Exemple 2.9. Soit $a > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $f(x) = e^{-a|x|}$. Alors $f \in L^1(\mathbb{R})$ et pour $\xi \in \mathbb{R}$ on a (exercice)

$$\hat{f}(\xi) = \frac{2a}{a^2 + \xi^2}.$$

Remarque 2.10. Plusieurs conventions co-existent pour la définition de \hat{f} . On peut poser

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx.$$

L'avantage de cette définition est que l'expression de la transformée de Fourier et de sa transformée inverse (voir la Proposition 2.14) sont symétriques, et il n'y a pas de facteur 2π dans l'identité de Parseval (voir la Proposition 2.21). Par contre un facteur $(2\pi)^{\frac{d}{2}}$ apparaît par exemple pour le produit de convolution (voir la Proposition 2.13). Un autre convention est de poser

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2i\pi x \cdot \xi} f(x) dx.$$

Aucun de ces choix n'est meilleur que les autres, si on retire le facteur 2π à un endroit de la théorie il réapparaîtra ailleurs. Ainsi, quand on utilise la transformée de Fourier, il est préférable de toujours commencer par rappeler la définition utilisée et de bien être cohérent par la suite (même si le facteur $(2\pi)^d$ est en général inoffensif pour les propriétés étudiées).

On donne maintenant un certain nombre de propriétés de base pour la transformée de Fourier.

Proposition 2.11. (i) Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, \hat{f} est bornée et $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

(ii) L'application $f \mapsto \hat{f}$ est linéaire de $L^1(\mathbb{R}^d)$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

(iii) Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, \hat{f} est continue sur \mathbb{R}^d et tend vers 0 quand $|\xi|$ tend vers $+\infty$.

Démonstration. Les deux premières propriétés résultent de l'inégalité triangulaire et de la linéarité de l'intégrale. La continuité de \hat{f} est conséquence du théorème de continuité sous l'intégrale.

Montrons que \hat{f} tend vers 0 quand $|\xi|$ tend vers $+\infty$. On commence par supposer que f est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Soit $j \in \llbracket 1, d \rrbracket$. Soit $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^d$ tel que $\xi_j \neq 0$. En effectuant une intégration par parties on obtient

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{i\xi_j} \int_{\mathbb{R}^d} -\partial_{x_j} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx = \frac{1}{i\xi_j} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot \xi} \partial_{x_j} f(x) dx = \frac{1}{i\xi_j} \widehat{\partial_{x_j} f}(\xi).$$

Puisque $\partial_{x_j} f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ on a $\widehat{\partial_{x_j} f} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, et donc $\hat{f}(\xi)$ tend vers 0 quand $|\xi_j|$ tend vers $+\infty$. Ceci étant valable pour chaque j , on obtient le résultat pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

On considère maintenant le cas général. Soit donc $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, il existe $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\|f - g\|_{L^1} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. En outre il existe $R > 0$ tel que pour $|\xi| \geq R$ on a $|\hat{g}(\xi)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Pour $|\xi| \geq R$ on a alors

$$|\hat{f}(\xi)| \leq |\hat{f}(\xi) - \hat{g}(\xi)| + |\hat{g}(\xi)| \leq \|f - g\|_{L^1} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

Cela prouve que $\hat{f}(\xi)$ tend vers 0 quand $|\xi|$ tend vers $+\infty$. □

La démonstration des propriétés suivantes est laissée en exercice :

Proposition 2.12. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

- (i) Si f est paire (respectivement impaire), alors \hat{f} paire (respectivement impaire). Plus généralement, si on note \mathcal{P} l'opérateur qui à une fonction f associe $\mathcal{P}f : x \mapsto f(-x)$, alors pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\mathcal{P}\mathcal{F}f = \mathcal{F}\mathcal{P}f. \quad (2.5)$$

- (ii) Si f est à valeurs réelles alors $\hat{f}(-\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$.
(iii) Soient $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $g : x \mapsto f(x - x_0)$. Alors $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{-ix_0 \cdot \xi}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$. Soient $\xi_0 \in \mathbb{R}^d$ et $g : x \mapsto e^{ix \cdot \xi_0} f(x)$. Alors $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi - \xi_0)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$.
(iv) Soient $\alpha > 0$ et $g : x \mapsto f(\alpha x)$. Alors $\hat{g}(\xi) = \frac{1}{\alpha^d} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$.

Une propriété remarquable (et qui jouera un rôle important dans les applications) est que la transformée de Fourier d'un produit de convolution est le produit usuel des transformées de Fourier.

Proposition 2.13. Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors on a

$$\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}.$$

Démonstration. Soit $\xi \in \mathbb{R}^d$. L'application $(x, y) \mapsto e^{-ix \cdot \xi} f(x - y)g(y)$ est mesurable et d'après le théorème de Fubini-Tonelli et les propriétés du produit de convolution dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |e^{-ix \cdot \xi} f(x - y)g(y)| \, dx \, dy \leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x - y)| |g(y)| \, dy \right) dx \leq \|f\|_1 \|g\|_1 < +\infty.$$

D'après le théorème de Fubini-Lebesgue on a alors

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot \xi} (f * g)(\xi) \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot \xi} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x - y)g(y) \, dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-iy \cdot \xi} g(y) \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(x-y) \cdot \xi} f(x - y) \, dx \right) dy \\ &= \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi). \end{aligned} \quad \square$$

2.3 Formule d'inversion

La propriété qui fait que la transformée de Fourier est utilisable en pratique est qu'on peut retrouver la fonction de départ si on connaît sa transformée de Fourier.

Proposition 2.14. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ on a

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi} \hat{f}(\xi) \, d\xi.$$

On observe que la formule donnant la transformée de Fourier inverse est quasiment la même que celle donnant la transformée de Fourier elle-même (seul le signe dans l'exponentielle change, et notre choix de convention pour \mathcal{F} fait qu'il y a un facteur $(2\pi)^{-d}$ qui diffère). Pour $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $x \in \mathbb{R}^d$ on pose

$$\overline{\mathcal{F}}g(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi} g(\xi) \, d\xi = \frac{1}{(2\pi)^d} (\mathcal{F}g)(-x).$$

Avec la notation \mathcal{P} introduite à la Proposition 2.12 cela s'écrit encore

$$\overline{\mathcal{F}} = \frac{1}{(2\pi)^d} \mathcal{P} \mathcal{F} = \frac{1}{(2\pi)^d} \mathcal{F} \mathcal{P}.$$

On peut alors écrire

$$f = \overline{\mathcal{F}} \mathcal{F} f = \frac{1}{(2\pi)^d} \mathcal{P} \mathcal{F} \mathcal{F} f = \frac{1}{(2\pi)^d} \mathcal{F} \mathcal{F} \mathcal{P} f = \mathcal{F} \overline{\mathcal{F}} f. \quad (2.6)$$

Démonstration. • Pour $\varepsilon > 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$ on pose

$$F(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi} \hat{f}(\xi) d\xi \quad \text{et} \quad F_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi} e^{-\varepsilon(|\xi_1| + \dots + |\xi_d|)} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

Par le théorème de continuité sous l'intégrale, ces deux fonctions sont continues sur \mathbb{R}^d . En outre, par le théorème de convergence dominée on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$F_\varepsilon(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} F(x).$$

• Soient $\varepsilon > 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$. La fonction

$$(y, \xi) \mapsto e^{i(x-y) \cdot \xi} e^{-\varepsilon(|\xi_1| + \dots + |\xi_d|)} f(y)$$

est intégrable sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, donc par le théorème de Fubini-Lebesgue on a

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(x) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi} e^{-\varepsilon(|\xi_1| + \dots + |\xi_d|)} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-iy \cdot \xi} f(y) dy \right) d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\prod_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}} e^{i(x_j - y_j) \xi_j} e^{-\varepsilon |\xi_j|} d\xi_j \right) f(y) dy. \end{aligned}$$

Soit $j \in \llbracket 1, d \rrbracket$. Le calcul de l'Exemple 2.9 donne

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i(x_j - y_j) \xi_j} e^{-\varepsilon |\xi_j|} d\xi_j = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 + (x_j - y_j)^2}.$$

Pour $s = (s_1, \dots, s_j) \in \mathbb{R}^d$ on note

$$\chi(s) = \prod_{j=1}^d \frac{1}{\pi(1 + s_j^2)} \quad \text{et} \quad \chi_\varepsilon(s) = \frac{1}{\varepsilon^d} \chi\left(\frac{s}{\varepsilon}\right).$$

On a alors

$$F_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(2\varepsilon)^d f(y)}{\prod_{j=1}^d (\varepsilon^2 + (x_j - y_j)^2)} dy = (\chi_\varepsilon * f)(x).$$

Comme $(\chi_\varepsilon)_{\varepsilon \in]0,1]}$ définit une approximation de l'unité, on a $F_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et

$$\|F_\varepsilon - f\|_{L^1} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

En particulier, il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers 0 et telle que F_{ε_n} tend vers f presque partout. Cela prouve que $F = f$ presque partout. \square

Ainsi on a montré que sous les hypothèses de la Proposition 2.14, l'expression obtenue formellement en (2.3) est bien valable pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$.

On observe que la Proposition 2.14 prouve par ailleurs l'injectivité de la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Corollaire 2.15. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est telle que $\hat{f} = 0$ presque partout, alors $f = 0$.*

Démonstration. Si $\hat{f} = 0$ alors en particulier $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. On peut donc appliquer la proposition 2.14, qui montre que $f(x) = 0$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$. \square

2.4 Dérivation et multiplication par un polynôme - Transformée de Fourier dans \mathcal{S}

On discute maintenant la propriété pour laquelle on a introduit la transformée de Fourier, à savoir le bon comportement vis-à-vis des opérateurs de dérivation. On travaille avec les fonctions $x \mapsto e^{ix \cdot \xi}$ car les dériver revient à les multiplier par un scalaire. Ainsi, si

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi} \hat{f}(\xi) d\xi,$$

on voudrait pouvoir écrire

$$\partial_{x_j} f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} i\xi_j e^{ix \cdot \xi} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

Le calcul effectué pour la preuve de la Proposition 2.11 donne la propriété suivante.

Proposition 2.16. *Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Soit $j \in \llbracket 1, d \rrbracket$. Alors pour $\xi \in \mathbb{R}^d$ on a*

$$\widehat{\partial_{x_j} f}(\xi) = i\xi_j \hat{f}(\xi)$$

En particulier, l'application $\xi \mapsto \xi_j \hat{f}(\xi)$ est dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Cette propriété peut en fait être étendue à toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap C^1(\mathbb{R}^d)$ telle que la dérivée partielle $\partial_{x_j} f$ est encore dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Du fait que la transformée de Fourier inverse a une expression analogue à la transformée de Fourier elle-même, il n'est pas surprenant de constater qu'on a en fait une propriété analogue dans l'autre sens. C'est-à-dire que la transformée de Fourier change la multiplication par la variable x_j en une dérivation par rapport à ξ_j :

Proposition 2.17. *Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Soit $j \in \llbracket 1, d \rrbracket$. Alors \hat{f} est dérivable par rapport à ξ_j et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ on a*

$$\widehat{x_j f}(\xi) = i\partial_{\xi_j} \hat{f}(\xi).$$

Démonstration. Pour $(x, \xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ on note $\varphi(x, \xi) = e^{-ix \cdot \xi} f(x)$. Alors φ est dérivable par rapport à ξ et pour tout $(x, \xi) \in (\mathbb{R}^d)^2$ on a

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_j}(x, \xi) \right| = \left| -ix_j e^{-ix \cdot \xi} f(x) \right| = |x_j f(x)|.$$

Comme la fonction $x \mapsto |x_j f(x)|$ est intégrable sur \mathbb{R}^d , on obtient par le théorème de dérivation sous l'intégrale que \hat{f} est dérivable par rapport à ξ_j sur \mathbb{R}^d et, pour $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$i\partial_{\xi_j} \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot \xi} x_j f(x) dx = \widehat{x_j f}(\xi). \quad \square$$

On remarque que la preuve est en fait valable pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $x \mapsto x_j f(x)$ est intégrable.

L'espace de Schwartz est l'espace des fonctions pour lesquelles on peut dériver et multiplier par la variable autant de fois que l'on veut. En outre, ces deux opérations jouent des rôles symétriques vis-à-vis de la transformée de Fourier. Avec les deux propositions précédentes, tout indique que c'est un espace dans lequel la transformée de Fourier est particulièrement agréable.

Proposition 2.18. *La transformée de Fourier \mathcal{F} réalise une bijection de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même, et sa réciproque est la restriction de $\overline{\mathcal{F}}$ à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. En outre, pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$ et $\xi \in \mathbb{R}^d$ on a*

$$\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \mathcal{F}f(\xi) = (-i)^{|\alpha|+|\beta|} \mathcal{F}(\partial_x^\alpha x^\beta f)(\xi). \quad (2.7)$$

Démonstration. Soient $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$. En appliquant $|\beta|$ fois la proposition 2.17, on obtient que la dérivée partielle $\partial_\xi^\beta \widehat{f}$ existe et

$$\widehat{x^\beta f}(\xi) = i^{|\beta|} \partial_\xi^\beta \widehat{f}(\xi).$$

En appliquant maintenant la proposition 2.16 aux dérivées successives de $x^\beta f$ on obtient

$$\widehat{\partial_x^\alpha x^\beta f}(\xi) = i^{|\alpha|+|\beta|} \xi^\alpha \partial_\xi^\beta \widehat{f}(\xi).$$

En particulier, la fonction $\xi \mapsto \xi^\alpha \partial_\xi^\beta \widehat{f}(\xi)$ est bornée. Cela assure que $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et prouve (2.7). La restriction $\mathcal{F}_\mathcal{S}$ de \mathcal{F} à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est alors injective par le Corollaire 2.15. Enfin, d'après (2.6) on a $f = \frac{1}{(2\pi)^{2d}} \mathcal{F}\mathcal{F}\mathcal{P}f$, donc $\mathcal{F}_\mathcal{S}$ est surjective. Ainsi $\mathcal{F}_\mathcal{S}$ est une bijection de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, et sa réciproque est la restriction de $\overline{\mathcal{F}}$ à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. \square

Exemple 2.19. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors la transformée de Fourier de $-\Delta f$ est $\xi \mapsto |\xi|^2 \widehat{f}(\xi)$.

Exemple 2.20. On cherche à calculer sur \mathbb{R} la transformée de Fourier de la Gaussienne $f : x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$. On note que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. En particulier $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Puisque $f'(x) = -xf(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a pour $\xi \in \mathbb{R}$

$$\widehat{f'}(\xi) = -i\xi \widehat{f}(\xi) = i\widehat{f'}(\xi) = -\xi \widehat{f}(\xi).$$

Cela prouve que

$$\widehat{f}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}} \widehat{f}(0).$$

Or on sait que

$$\widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi},$$

donc pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ on a

$$\widehat{f}(\xi) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

Plus généralement, pour $\sigma > 0$, si on considère $f_\sigma : x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ alors pour $\xi \in \mathbb{R}$ on a

$$\widehat{f_\sigma}(\xi) = \sigma \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\sigma^2 \xi^2}{2}}.$$

2.5 Transformée de Fourier dans L^2

Jusqu'ici on a discuté les propriétés de la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ (car c'est l'espace dans lequel la définition a naturellement un sens) ou de sa restriction à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (car c'est l'espace le plus confortable). Mais ce ne sera pas suffisant. Notre espace préféré en analyse des équations aux dérivées partielles sera l'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$, qui a le bon goût d'être un espace de Hilbert. On a donc besoin de savoir manipuler la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Problème, une fonction dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ n'est pas forcément intégrable, et la transformée de Fourier telle que définie en (2.4) n'a même pas de sens dans ce cas.

On commence par pousser un peu plus loin l'analyse de la transformée de Fourier pour les fonctions de Schwartz. Puisque $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est inclus dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, on peut le munir de la norme correspondante. La transformée de Fourier de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est alors (quasiment) une isométrie pour cette norme :

Proposition 2.21. Soient $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi = (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

En particulier,

$$\|\hat{f}\|_{L^2} = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \|f\|_{L^2}.$$

Démonstration. L'application $(x, \xi) \mapsto e^{-ix \cdot \xi} f(x) \overline{\hat{g}(\xi)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, donc par le théorème de Fubini-Lebesgue on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx \right) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot \xi} \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{\left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi} \hat{g}(\xi) d\xi \right)} dx \\ &= (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{g(x)} dx. \end{aligned}$$

La deuxième propriété suit en prenant $g = f$. □

En prenant $g = \widehat{\hat{\phi}}$ on peut ré-écrire l'égalité précédente comme suit.

Corollaire 2.22. Pour $f, \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f} \phi dy = \int_{\mathbb{R}^d} f \hat{\phi} dy.$$

On utilise maintenant le fait que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ pour étendre la transformée de Fourier de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ en une (quasi) isométrie de $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 2.23. Il existe un unique isomorphisme \mathcal{F} de $L^2(\mathbb{R}^d)$ coïncidant sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ avec la transformée de Fourier et tel que

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad \|\mathcal{F}f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \quad (2.8)$$

Démonstration. • On suppose que deux isomorphismes de $L^2(\mathbb{R}^d)$ vérifient les conditions du théorème. Ce sont en particulier deux applications continues sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ qui coïncident sur la partie dense $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Elles coïncident donc partout, ce qui assure l'unicité.

• Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de Schwartz qui converge vers f dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. D'après la Proposition 2.21, la suite $(\widehat{f_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Comme $L^2(\mathbb{R}^d)$ est complet, $\widehat{f_n}$ admet une limite, qu'on note $\mathcal{F}f$. On peut alors vérifier que cette définition de $\mathcal{F}f$ ne dépend pas du choix de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et que pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ la limite ainsi obtenue coïncide bien la transformée de Fourier de f . Par linéarité de la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et la Proposition 2.21, l'application \mathcal{F} est linéaire et vérifie (2.8). Par continuité, l'égalité (2.6) est encore valable dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, ce qui assure que \mathcal{F} est surjective. □

Remarque 2.24. Pour $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}f \overline{\mathcal{F}g} d\xi = (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} f \overline{g} dx.$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\mathcal{F}f)g dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathcal{F}g) dy.$$

Proposition 2.25. *L'isomorphisme du Théorème 2.23 coïncide avec la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$. Pour cette démonstration on note \hat{f} la transformée de Fourier de f au sens de (2.4), et $\mathcal{F}f$ la fonction dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ donnée par le Théorème 2.23. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de Schwartz qui converge vers f dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ et dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Avec la même convention que pour f , on a $\hat{f}_n = \mathcal{F}f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme \mathcal{F} est continue sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\|\mathcal{F}f_n - \mathcal{F}f\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

En particulier, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $\mathcal{F}f_n$ tend vers $\mathcal{F}f$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$. D'autre part on a

$$\|\hat{f}_n - \hat{f}\|_\infty \leq \|f - f_n\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Cela implique que $\mathcal{F}f = \hat{f}$ presque partout. □

On rappelle que pour une fonction qui n'est pas intégrable, on ne peut pas utiliser l'expression de $\mathcal{F}f$ donnée par (2.4). On a tout de même la propriété suivante, où \tilde{f}_n est une sorte de transformée de Fourier tronquée pour des fonctions localement intégrables.

Proposition 2.26. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\xi \in \mathbb{R}^d$ on note*

$$\tilde{f}_n(\xi) = \int_{B(n)} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx,$$

où $B(n)$ désigne la boule de rayon n centrée en 0. Alors on a

$$\|\tilde{f}_n - \mathcal{F}f\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Démonstration. Par le théorème de convergence dominée on a

$$\|\mathbf{1}_{B(n)}f - f\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Comme $\mathbf{1}_{B(n)}f \in L^1 \cap L^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient par la proposition 2.25

$$\|\tilde{f}_n - \mathcal{F}f\|_2 = \|\mathcal{F}(\mathbf{1}_{B(n)}f) - \mathcal{F}f\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad \square$$

2.6 Exemple d'application

Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on considère l'équation

$$-\Delta u + u = f, \tag{2.9}$$

d'inconnue $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. En prenant la transformée de Fourier, on obtient que u est solution si et seulement si pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ on a

$$(|\xi|^2 + 1)\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi),$$

soit

$$\hat{u}(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi)}{1 + |\xi|^2}.$$

On considère la fonction \tilde{f} qui à $\xi \in \mathbb{R}^d$ associe $\frac{\hat{f}(\xi)}{1+|\xi|^2}$. Cela définit une fonction $\tilde{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et on a

$$\|\tilde{f}\|_{L^2} \leq \|\hat{f}\|_{L^2} = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \|f\|_{L^2}.$$

On pose alors $Rf = \mathcal{F}^{-1}\tilde{f}$. Cela définit également une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et on a

$$\|Rf\|_{L^2} = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \|\tilde{f}\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}.$$

Il n'est pas difficile de vérifier que l'application $f \mapsto Rf$ est linéaire. Ainsi R définit une application linéaire de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même, continue pour la norme L^2 . Elle s'étend donc par continuité en une application linéaire continue sur $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on a alors

$$(-\Delta + 1)Rf = f.$$

On peut ensuite vérifier que pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on a

$$R(-\Delta + 1)u = u.$$

Ainsi R est sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ la bijection réciproque de $(-\Delta + 1)$ (par contre, attention, R n'est pas une bijection sur $L^2(\mathbb{R}^d)$).

Une dernière question à propos de cet exemple. Étant donnée $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, peut-on donner une expression un peu plus explicite pour la solution Rf du problème (2.9) ? On doit calculer la transformée de Fourier inverse du produit de deux fonctions. C'est là qu'intervient le produit de convolution (voir la proposition 2.13). Ainsi, si G est une fonction dont la transformée de Fourier est donnée par

$$\hat{G}(\xi) = \frac{1}{1 + |\xi|^2},$$

alors on aura

$$\widehat{Rf}(\xi) = \hat{G}(\xi)\hat{f}(\xi),$$

et donc

$$Rf(x) = (G * f)(x).$$

Reste à déterminer G . Au moins pour la dimension $d = 1$, on a déjà fait le calcul à l'Exemple 2.9 et on obtient

$$G(x) = \frac{e^{-|x|}}{2}.$$

Cela donne

$$Rf(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-|x-y|}}{2} f(y) dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-|y|}}{2} f(x-y) dy.$$

On peut alors vérifier par un calcul explicite (le faire en exercice) que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a bien

$$-(Rf)''(x) + Rf(x) = f(x).$$

En dimension 1, le résultat n'est pas très spectaculaire, car il s'agit simplement d'une équation différentielle ordinaire à coefficients constants, et on aurait pu obtenir le même résultat avec une double variation de la constante, mais la méthode illustrée sur cet exemple simple sera utile pour des problèmes plus subtiles...