CC 2

Lundi 26 avril 2021 (1h30)

Aucun document (ni calculatrice, ni téléphone, etc.) n'est autorisé. On accordera un soin particulier à la rédaction.

Dans tous les exercices, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ sont munis de leurs tribus boréliennes et de la mesure de Lebesgue.

Exercice 1. On note

$$D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x-1)^2 + (y-2)^2 < 4\big\}.$$

Montrer que la fonction $f : (x,y) \mapsto x^2$ est intégrable sur D et donner la valeur de son intégrale.

Exercice 2. Soit $P : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction polynomiale. Pour $x > 0$ on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} P(t)e^{-tx}\, dt.$$

Montrer que F est bien définie et dérivable sur $]0, +\infty[$.

Exercice 3. **1.** Soit $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction intégrable, d'intégrale égale à 1. Pour $\varepsilon > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

a. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ la fonction ρ_ε est intégrable d'intégrale 1.
b. Soit $\eta > 0$. Étudier la limite éventuelle de

$$\int_{\mathbb{R}\setminus[-\eta,\eta]} \rho_\varepsilon(x)\, dx$$

quand ε tend vers 0.
2. Montrer qu'il existe une fonction ρ comme à la question précédente telle que pour tous $\varepsilon > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}e^{-\varepsilon|\xi|}\, d\xi = \rho_\varepsilon(x).$$

3. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Pour $\xi \in \mathbb{R}$ on pose

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)\, dx.$$

Justifier que cette définition a bien un sens (on commencera par remplacer f par un représentant puis on justifiera le passage au quotient).

4. Pour la suite de l'exercice on suppose que $\hat{f}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour $\varepsilon > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi \quad \text{et} \quad F_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} e^{-\varepsilon|\xi|} \hat{f}(\xi)\, d\xi.$$

a. Montrer que cela définit une fonction F continue sur $\mathbb{R}$. On admettra que c'est également le cas pour F_ε, quel que soit $\varepsilon > 0$.

b. Montrer que F_ε converge simplement vers F quand ε tend vers 0.

5. a. Soit $\tilde{f}$ un représentant de f. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$F_\varepsilon(x) - \tilde{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} \big(\tilde{f}(x-y) - \tilde{f}(x)\big) \rho_\varepsilon(y)\, dy,$$

où ρ_ε est comme à la question 2.

b. Montrer que

$$\|F_\varepsilon - f\|_1 \leqslant \int_{\mathbb{R}} \|\tau_y f - f\|_1 \, \rho_\varepsilon(y)\, dy,$$

où on a noté $\tau_y f : x \mapsto f(x-y)$.

c. En déduire que F_ε tend vers f dans $L^1(\mathbb{R})$ quand ε tend vers 0.

6. En déduire que $F = f$ presque partout (plus précisément, la fonction F est dans la classe d'équivalence f).