Examen Final

Vendredi 10 janvier 2020 (3 heures)

Exercice 1. **1.** Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

a. Montrer que la fonction f ainsi définie est localement intégrable sur $\mathbb{R}$.

b. Calculer la dérivée au sens des distributions de f (sans utiliser la formule des sauts).

2. **a**. Rappeler la définition de la convergence d'une suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans l'espace des fonctions test $C_0^\infty(\mathbb{R})$.

b. Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ égale à 1 sur $[-1,1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $\phi_n(x) = e^{-n}\chi(x-n)$. La suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet-elle une limite dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$?

3. Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

a. Rappeler la définition de la distribution fT et démontrer que c'est effectivement une distribution.

b. Montrer que

$$(fT)' = f'T + fT'.$$

4. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $T_n = \sum_{k=0}^n \delta_k$, où δ_k désigne la distribution de Dirac au point k. Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers une distribution que l'on notera T (on explicitera $\langle T, \phi\rangle$ pour tout $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$).

Correction :

1. **a**. Comme $\sin(0) = 0$, la fonction f est continue et donc localement intégrable sur $\mathbb{R}$.

b. Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. En utilisant à nouveau le fait que $\sin(0) = 0$, on obtient par intégration par parties

$$-\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi'(x)\,dx = -\int_0^{+\infty} \sin(x)\phi'(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \cos(x)\phi(x)\,dx.$$

Ainsi la dérivée au sens des distributions de f est la fonction de $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ donnée par

$$\begin{cases} \cos(x) & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

2. **a**. On dit que la suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ϕ dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$ s'il existe un compact K de $\mathbb{R}$ tel que ϕ_n est à support dans K pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si $\phi_n^{(k)}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $\phi^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction ϕ_n est égale à e^{-n} sur $[n-1, n+1]$. Il n'existe donc pas de compact de $\mathbb{R}$ contenant le support de ϕ_n pour tout n, donc la suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas être convergente dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$.

3. **a**. La distribution fT est définie par

$$\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad \langle fT, \phi\rangle = \langle T, f\phi\rangle\,.$$

Pour $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ on a $f\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et l'application $\phi \mapsto \langle T, f\phi\rangle$ est bien une application linéaire de $C_0^\infty(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{C}$. Soit K un compact de $\mathbb{R}$. Il existe $m \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que pour tout $\phi \in C_K^\infty(\mathbb{R})$ on a

$$|\langle T, \phi\rangle| \leqslant C \sum_{k=0}^{m} \sup_{x\in K} \left|\phi^{(k)}(x)\right|.$$

Par la formule de Leibniz on a alors

$$\begin{aligned}|\langle T, f\phi\rangle| &\leqslant C \sum_{k=0}^{m} \sup_{x\in K} \left|(f\phi)^{(k)}(x)\right| \\ &\leqslant C \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \sup_{x\in K} \left|f^{(k-j)}(x)\right|\left|\phi^{(j)}(x)\right|.\end{aligned}$$

Cela implique qu'il existe une constante $\tilde{C} > 0$ telle que pour tout $\phi \in C_K^\infty(\mathbb{R})$

$$|\langle T, f\phi\rangle| \leqslant \tilde{C} \sum_{k=0}^{m} \sup_{x\in K} \left|\phi^{(k)}(x)\right|$$

(on peut choisir par exemple $\tilde{C} = C \max_{0\leqslant j\leqslant m} \sum_{k=j}^{m} \binom{k}{j} \sup_{x\in K} \left|f^{(k-j)}(x)\right|$). Cela prouve que fT est bien une distribution sur $\mathbb{R}$.

b. Pour $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ on a

$$\begin{aligned}-\left\langle fT, \phi'\right\rangle &= -\left\langle T, f\phi'\right\rangle = -\left\langle T, (f\phi)'\right\rangle + \left\langle T, f'\phi\right\rangle = \left\langle T', f\phi\right\rangle + \left\langle T, f'\phi\right\rangle \\ &= \left\langle fT', \phi\right\rangle + \left\langle f'T, \phi\right\rangle.\end{aligned}$$

D'où $(fT)' = fT' + f'T$.

4. Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a

$$\left\langle \sum_{k=0}^{n} \delta_k, \phi \right\rangle = \sum_{k=0}^{n} \phi(k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=0}^{+\infty} \phi(k).$$

Cette dernière série est bien convergente car les termes sont tous nuls à partir d'un certain rang. Pour $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ on pose donc

$$\langle T, \phi\rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} \phi(k).$$

Cela définit une application linéaire sur $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Soit K un compact de $\mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset]-N, N[$. Alors pour $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ on a

$$|\langle T, \phi\rangle| = \left|\sum_{k=0}^{N-1} \phi(k)\right| \leqslant N \left\|\phi\right\|_\infty.$$

Cela prouve que T est continue sur $C_0^\infty(\mathbb{R})$ et définit bien une distribution sur $\mathbb{R}$. Et d'après ce qui précède, T_n tend vers T dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercice 2. **1.** Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \qquad \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)\,dx = \phi(0).$$

2. On considère $u \in H^1(\mathbb{R}_+^*)$. On rappelle qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que pour presque tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a

$$u(x) = \alpha + \int_0^x u'(s)\,ds.$$

Quitte à changer de représentant pour u, on suppose que l'égalité est en fait vraie pour tout $x > 0$. Montrer que u est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et admet une limite en 0 (qu'on notera $u(0)$).

3. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

a. Soit $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ décroissante, à support dans $[0, 2]$ et égale à 1 sur $[0, 1]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant 0$ on pose $\chi_n(x) = \chi(nx)$. Montrer que pour $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ on a

$$-\int_0^{+\infty} u(x)(\phi\chi_n)'(x)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} u(0)\phi(0).$$

b. Montrer que la dérivée $T'_{\tilde{u}}$ de la distribution associée à $\tilde{u}$ est égale à $u(0)\delta_0 + T_v$, où δ_0 est la distribution de Dirac en 0 et T_v est la distribution associée à une fonction $v \in L^2(\mathbb{R})$ à expliciter.

c. En déduire que $\tilde{u}$ est dans $H^1(\mathbb{R})$ si et seulement si $u(0) = 0$.

4. On suppose maintenant que $u(0) = 0$.

a. Soit $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}, [0, 1])$ à support dans $[1, 2]$ et telle que $\int_{\mathbb{R}} \rho(x)\,dx = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $\rho_n(x) = n\rho(nx)$. Montrer que la suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une approximation de l'unité.

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction $\rho_n * \tilde{u}$ est nulle sur $\left]-\infty, \frac{1}{n}\right[$.

c. Montrer qu'il existe une suite de fonctions dans $C_0^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ qui converge vers u dans $H^1(\mathbb{R}_+^*)$.

Correction :

1. On suppose par l'absurde qu'il existe $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)\,dx = \phi(0).$$

Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, [0, 1])$ à support dans $[-1, 1]$ et telle que $\phi(0) = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $\phi_n(x) = \phi(nx)$. Alors ϕ_n est à valeurs dans $[0, 1]$ et à support dans $\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a alors

$$1 = \phi_n(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(nx)\,dx \leqslant \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |f(x)|\,dx.$$

Comme f est intégrable sur $[-1, 1]$, on obtient par le théorème de convergence dominée que

$$1 \leqslant \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |f(x)|\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

D'où la contradiction.

2. Pour $x, y \geqslant 0$ on a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|u(y) - u(x)| \leqslant \left|\int_x^y |u'(x)|\,dx\right| \leqslant \sqrt{\left|\int_x^y 1\,dx\right|}\sqrt{\left|\int_x^y |u'(x)|^2\,dx\right|} \leqslant \sqrt{|x-y|}\,\|u'\|_{L^2(\mathbb{R}_+^*)}.$$

Cela assure que u est (uniformément) continue sur $\mathbb{R}_+$. En particulier, u admet alors une limite en 0, qui n'est autre que α. Ce qu'on peut également voir en observant comme précédemment que pour $x > 0$ on a

$$|u(x) - \alpha| \leqslant \left|\int_0^x |u'(x)|\,dx\right| \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

3. a. Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction $\phi\chi_n$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$ et $(\phi\chi_n)' = \phi'\chi_n + \phi\chi_n'$. Comme u est intégrable sur [0,2] on a par le théorème de convergence dominée

$$-\int_0^{+\infty} u(x)\phi'(x)\chi_n(x)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \qquad (*)$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que pour $x \in \left[0, \frac{2}{n}\right]$ on a $|u(x)\phi(x) - u(0)\phi(0)| \leqslant \varepsilon$. Puisque χ_n' est à support dans $\left[0, \frac{2}{n}\right]$ on a alors

$$\left|\int_0^{+\infty} u(x)\phi(x)\chi_n'(x)\,dx - \int_0^{+\infty} u(0)\phi(0)\chi_n'(x)\,dx\right| \leqslant \varepsilon \int_0^{+\infty} \left|\chi_n'(x)\right|\,dx.$$

Or $\chi_n' \leqslant 0$ et

$$\int_0^{+\infty} \chi_n'(x)\,dx = -1.$$

Cela prouve que

$$\left|\int_0^{+\infty} u(x)\phi(x)\chi_n'(x)\,dx - \int_0^{+\infty} u(0)\phi(0)\chi_n'(x)\,dx\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et

$$\int_0^{+\infty} u(0)\phi(0)\chi_n'(x)\,dx = -u(0)\phi(0).$$

D'où

$$\int_0^{+\infty} u(x)\phi(x)\chi_n'(x)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} u(0)\phi(0).$$

On obtient le résultat attendu en sommant avec $(*)$.

b. Pour $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$-\int_{\mathbb{R}} \tilde{u}(x)\phi'(x)\,dx = -\int_0^{+\infty} u(x)(\phi\chi_n)'(x)\,dx - \int_0^{+\infty} u(x)(\phi(1-\chi_n))'(x)\,dx.$$

On a vu que

$$\int_0^{+\infty} u(x)(\phi\chi_n)'(x)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} u(0)\phi(0).$$

D'autre part, la fonction $(1-\chi_n)\phi$ est dans $C_0^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ donc par définition de u' on a

$$-\int_0^{+\infty} u(x)(\phi(1-\chi_n))'(x)\,dx = \int_0^{+\infty} u'(x)\phi(x)(1-\chi_n)(x)\,dx.$$

Comme à la question précédente on a par le théorème de convergence dominée

$$\int_0^{+\infty} u'(x)\phi(x)\chi_n(x)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

D'où

$$-\int_0^{+\infty} u(x)(\phi(1-\chi_n))'(x)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} u'(x)\phi(x)\,dx.$$

Cela prouve que

$$-\int_{\mathbb{R}} \tilde{u}(x)\phi'(x)\,dx = u(0)\phi(0) + \int_0^{+\infty} u'(x)\phi(x)\,dx,$$

et donc que la dérivée de la distribution $T_{\tilde{u}}$ associée est

$$u(0)\delta_0 + T_v,$$

où v est la fonction

$$v : x \mapsto \begin{cases} u'(x) & \text{si } x > 0,\\ 0 & \text{si } x \leqslant 0.\end{cases}$$

c. On suppose que $u(0) = 0$. Dans ce cas $T'_{\tilde{u}} = T_v$. Or $v \in L^2(\mathbb{R})$, donc $\tilde{u} \in H^1(\mathbb{R})$. On suppose maintenant que $\tilde{u} \in H^1(\mathbb{R})$. Alors il existe $w \in L^2(\mathbb{R})$ telle que

$$T_w = T'_{\tilde{u}} = u(0)\delta_0 + T_v.$$

On suppose par l'aburde que $u(0) \neq 0$. Alors $\delta_0 = \frac{T_w - T_v}{u(0)} = T_{\frac{w-v}{u(0)}}$. Ainsi δ_0 est la distribution associée à la fonction $\frac{w-v}{u(0)} \in L^2(\mathbb{R})$, ce qui est impossible, donc $u(0) = 0$.

4. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\rho_n(x) = n\rho(nx) \geqslant 0$. D'autre part, en faisant le changement de variables $y = nx$, $dy = ndx$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} \rho_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \rho(nx)n\,dx = \int_{\mathbb{R}} \rho(y)\,dy = 1.$$

Enfin, pour $\varepsilon > 0$ on a par le même changement de variables

$$\int_{|x|\geqslant\varepsilon} \rho_n(x)\,dx = \int_{|y|\geqslant\varepsilon n} \rho(y)\,dy.$$

Comme ρ est à support dans $[1,2]$, cette quantité est nulle dès que $\varepsilon n > 2$. Ces trois propriétés assurent que la suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une approximation de l'unité.

b. On note que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction ρ_n est à support dans $\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$. Soit $x \in \left]-\infty, \frac{1}{n}\right[$. Soit $y \in \mathbb{R}$. Si $y \leqslant 0$ alors $\tilde{u}(y) = 0$. Si $y \geqslant 0$ alors $x - y < \frac{1}{n}$ et donc $\rho_n(x-y) = 0$. D'où

$$(\rho_n * \tilde{u})(x) = \int_{\mathbb{R}} \rho_n(x-y)\tilde{u}(y)\,dy = 0.$$

Cela prouve que $\rho_n * \tilde{u}$ est nulle sur $\left]-\infty, \frac{1}{n}\right[$.

c. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Soit $\tilde{\chi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ égale à 1 sur $[-1,1]$ et à support dans $[-2,2]$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$ on pose $\tilde{\chi}_k(x) = \tilde{\chi}\left(\frac{x}{k}\right)$. Alors par le théorème de convergence dominée on a

$$\|u - \tilde{\chi}_k u\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^*)} \leqslant \int_k^{+\infty} |u(x)|^2\,dx \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

De même, puisque $(\tilde{\chi}_k u)' = \tilde{\chi}_k u' + \tilde{\chi}'_k u$ on a

$$\|u' - (\tilde{\chi}_k u)'\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^*)} \leqslant \int_k^{+\infty} |u'(x)|^2\,dx + \frac{1}{k^2}\int_k^{2k} \tilde{\chi}'\left(\frac{x}{k}\right)^2 |u(x)|^2\,dx \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

Il existe donc $k \in \mathbb{N}^*$ tel que si on pose $v = \tilde{\chi}_k u$ on a

$$\|u - v\|_{H^1(\mathbb{R}_+^*)} \leqslant \frac{1}{2m}.$$

On prolonge v par 0 sur $\mathbb{R}_-^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose alors $v_n = \rho_n * v$. Alors v_n est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, elle est nulle sur $\left]-\infty, \frac{1}{n}\right[$ (on applique la question précédente à v) et on vérifie de même qu'elle est nulle sur $[2m+2, +\infty[$. Elle est donc à support compact. En outre on sait par propriété du produit de convolution que

$$\|\rho_n * v - v\|_{H^1(\mathbb{R})} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|v_n - v\|_{H^1(\mathbb{R})} \leqslant \frac{1}{2m}$. On pose alors u_m la restriction de v_n à $\mathbb{R}_+^*$. La suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ convient.

Exercice 3. Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, on définit la transformée de Fourier de f par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^2, \quad (\mathcal{F}f)(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,dx.$$

1. Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que l'application

$$T_f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) & \to & \mathbb{C} \\ \phi & \mapsto & \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\phi(x)\,dx \end{array} \right.$$

est une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$. Exprimer la transformée de Fourier de

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} - \frac{\partial^6 u}{\partial x_2^6} + u$$

en fonction de celle de u.
3. Soit $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$. Montrer que l'équation

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} - \frac{\partial^6 u}{\partial x_2^6} + u = f \tag{$*$}$$

admet une unique solution $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.
4. Montrer que si f est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^2$ alors la solution u de ($*$) est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Correction :
1. T_f est bien une forme linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. En outre pour $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ on a

$$|\langle T_f, \phi\rangle| \leqslant C \|\phi\|_\infty ,$$

avec $C = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$. Cela prouve que T_f est bien continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. C'est donc une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^2$.
2. Pour $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} + u\right)(\xi) = (i\xi_1)^4 \mathcal{F}u(\xi) - (i\xi_2)^6 \mathcal{F}u(\xi) + \mathcal{F}u(\xi) = (\xi_1^4 + \xi_2^6 + 1)\mathcal{F}u(\xi).$$

3. u est solution si et seulement si

$$\mathcal{F}f(\xi) = \mathcal{F}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} + u\right)(\xi) = (\xi_1^4 + \xi_2^6 + 1)\mathcal{F}u(\xi).$$

Comme la fonction $\xi \mapsto \frac{1}{(\xi_1^4 + \xi_2^6 + 1)}$ est de classe C^∞ et que toutes ses dérivées sont bornées, on obtient que

$$\frac{\mathcal{F}f(\xi)}{(\xi_1^4 + \xi_2^6 + 1)}$$

définit une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^2$. En appliquant la transformée de Fourier inverse on obtient que u est solution si et seulement si

$$u = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\mathcal{F}f(\xi)}{(\xi_1^4 + \xi_2^6 + 1)}\right).$$

4. On suppose que $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Alors $\mathcal{F}f \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$. On en déduit que $\mathcal{F}u$ est dans $L^1(\mathbb{R}^2)$. Par la formule d'inversion on a alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^2$

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{ix\cdot\xi} \frac{\mathcal{F}f(\xi)}{1 + \xi_1^4 + \xi_2^6}\, d\xi.$$

Pour $x, \xi \in \mathbb{R}^2$ on note

$$f(x,\xi) = e^{ix\cdot\xi} \frac{\mathcal{F}f(\xi)}{1 + \xi_1^4 + \xi_2^6}\, d\xi.$$

f est de classe C^∞ par rapport à x et pour $x, \xi \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(x,\xi)\right| = \left|i\xi_1 e^{ix\cdot\xi} \frac{\mathcal{F}f(\xi)}{1 + \xi_1^4 + \xi_2^6}\right| \leqslant \frac{|\xi_1|}{1 + \xi_1^4 + \xi_2^6} \|\mathcal{F}f\|_{L^\infty}.$$

Or la fonction $\xi \mapsto \frac{|\xi_1|}{1 + \xi_1^4 + \xi_2^6} \|\mathcal{F}f\|_{L^\infty}$ est intégrable, donc par le théorème de dérivation sous l'intégrale on obtient que u est dérivable par rapport à x_1 et

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} i\xi_1 e^{ix\cdot\xi} \frac{\mathcal{F}f(\xi)}{1 + \xi_1^4 + \xi_2^6}\, d\xi.$$

Par le théorème de continuité sous l'intégrale, on obtient que cette dérivée partielle est continue sur $\mathbb{R}^2$. On obtient de la même façon que la dérivée partielle de u par rapport à x_2 est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4. On note $C_+^\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ à support inclus dans $[0,+\infty[$. On note également $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ l'ensemble des distributions sur $\mathbb{R}$ à support inclus dans $[0,+\infty[$.

Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R},[0,1])$ à support dans $[-2,2]$ et égale à 1 sur $[-1,1]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $\chi_n(x) = \chi\left(\frac{x}{n}\right)$.

1. Soit $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ et T_f la distribution associée. Montrer que $T_f \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ si et seulement si f est presque partout nulle sur $]-\infty,0[$.

2. Soient $T \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ et $\phi \in C_+^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ la limite

$$\lim_{n\to+\infty} \big(T * (\chi_n\phi)\big)(x)$$

existe. On notera $(T*\phi)(x)$ cette limite. *Indication : on pourra montrer que la suite considérée est en fait constante à partir d'un certain rang.*

3. Pour $\phi \in C_+^\infty(\mathbb{R})$, calculer $\delta * \phi$.

4. Soient $T \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ et $\phi \in C_+^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que $(T*\phi) \in C_+^\infty(\mathbb{R})$.

Correction : **1.** On suppose que f est presque partout nulle sur $]-\infty,0[$. Alors pour tout $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ à support dans $]-\infty,0[$ on a

$$\langle T_f, \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)\,dx = 0.$$

Cela prouve que T_f est à support inclus dans $[0,+\infty[$. Inversement, on suppose que $T_f \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$. On note g la restriction de f à $]-\infty,0[$. Alors la restriction de T_f à $]-\infty,0[$ est T_g. Pour $\phi \in C_0^\infty(]-\infty,0[)$ on note $\tilde{\phi} \in C^\infty_{\mathbb{R}^*_-}(\mathbb{R})$ le prolongement de ϕ par 0 sur $\mathbb{R}$. On a alors

$$\langle T_g, \phi\rangle = \int_{-\infty}^0 g\phi = \int_{\mathbb{R}} f\tilde{\phi} = 0.$$

Cela prouve que $g = 0$ pour presque tout $x \in]-\infty,0[$, et donc que f est presque partout nulle sur $]-\infty,0[$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $m > x$. Soit $\nu \geqslant m$. On a

$$(T*(\chi_\nu\phi))(x) - (T*(\chi_m\phi))(x) = (T*((\chi_\nu-\chi_m)\phi))(x) = \langle T, ((\chi_\nu-\chi_m)\phi)(x-\cdot)\rangle$$

On note que $y \mapsto ((\chi_\nu-\chi_m)\phi)(x-y)$ est à support compact inclus dans $]-\infty,x-m[$, et donc $(T*(\chi_\nu\phi))(x) - (T*(\chi_m\phi))(x) = 0$. Cela prouve que $(T*(\chi_n\phi))(x)$ est constante pour $n > x$. En particulier, elle admet une limite.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n > x$ on a

$$(\delta*\phi)(x) = (\delta*(\chi_n\phi))(x) = \langle d, (\chi_n\phi)(x-\cdot)\rangle = (\chi_n\phi)(x) = \phi(x).$$

4. Soit $x < 0$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $y \mapsto (\chi_n\phi)(x-y)$ est à support dans $]-\infty,0[$, donc $(T*(\chi_n\phi))(x) = 0$. Cela prouve que $(T*\phi)(x) = 0$, et donc que $(T*\phi)$ est nulle sur $]-\infty,0[$. Soit $R > 0$. Soit $n \geqslant R$. Pour tout $x \in]-\infty,R]$ on a

$$(T*\phi)(x) = (T*(\chi_n\phi))(x).$$

Or $(T*(\chi_n\phi))$ est une fonction de classe C^∞. Donc $(T*\phi)$ est de classe C^∞ sur $]-\infty,R]$. Ceci étant valable pour tout $R > 0$, on obtient que $(T*\phi)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Examen Final

Vendredi 10 janvier 2020 (3 heures)

Exercice 1. **1.** For $x \in \mathbb{R}$ we set

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{if } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{if } x < 0. \end{cases}$$

a. Show that the function f defined this way is locally integrable on $\mathbb{R}$.

b. Compute the derivative in the sense of distributions of f (without using the jump formula).

2. **a**. Recall the definition of the convergence of a sequence $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in the space of test functions $C_0^\infty(\mathbb{R})$.

b. Let $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ be equal to 1 on $[-1,1]$. For $n \in \mathbb{N}$ and $x \in \mathbb{R}$ we set $\phi_n(x) = e^{-n}\chi(x-n)$. Does the sequence $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ have a limit in $C_0^\infty(\mathbb{R})$?

3. Let $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ and $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

a. Recall the definition of the distribution fT and prove that it is indeed a distrubution.

b. Prove that

$$(fT)' = f'T + fT'.$$

4. For $n \in \mathbb{N}$ we set $T_n = \sum_{k=0}^n \delta_k$, where δ_k is the Dirac distribution at point k. Prove that the sequence $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converges in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ to a distribution which we denote by T (write explicitly $\langle T, \phi\rangle$ for all $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$).

Exercice 2. **1.** Prove that there is no function $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ such that

$$\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)\,dx = \phi(0).$$

2. We consider $u \in H^1(\mathbb{R}_+^*)$. We recall that there exists $\alpha \in \mathbb{C}$ such that for almost all $x \in \mathbb{R}_+^*$ we have

$$u(x) = \alpha + \int_0^x u'(s)\,ds.$$

After changing u on a set of measure 0 if necessary, we assume that the equality holds for all $x > 0$. Prove that u is continuous on $\mathbb{R}_+^*$ and has a limit at 0 (which we denote by $u(0)$).

3. For $x \in \mathbb{R}$ we set

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{if } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{if } x < 0. \end{cases}$$

a. Let $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ be non-increasing, supported in $[0,2]$ and equal to 1 on $[0,1]$. For $n \in \mathbb{N}^*$ and $x \geqslant 0$ we set $\chi_n(x) = \chi(nx)$. Prove that for $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ we have

$$-\int_0^{+\infty} u(x)(\phi\chi_n)'(x)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} u(0)\phi(0).$$

b. Prove that the derivative $T'_{\tilde{u}}$ of the distribution associated to $\tilde{u}$ is equal to $u(0)\delta_0 + T_v$, where δ_0 is the Dirac distribution at 0 and T_v is the distribution associated to some function $v \in L^2(\mathbb{R})$ to make explicit.

c. Deduce that $\tilde{u}$ belongs to $H^1(\mathbb{R})$ if and only if $u(0) = 0$.

4. Now we assume that $u(0) = 0$.

a. Let $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ be supported in $[1,2]$ and such that $\int_{\mathbb{R}} \rho(x)\,dx = 1$. For $n \in \mathbb{N}^*$ and $x \in \mathbb{R}$ we set $\rho_n(x) = n\rho(nx)$. Prove that the sequence $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ is an approximation of the identity.

b. Prove that for all $n \in \mathbb{N}^*$ the function $\rho_n * \tilde{u}$ vanishes on $\left(-\infty, \frac{1}{n}\right)$.

c. Prove that there exists a sequence of functions in $C_0^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ which converges to u in $H^1(\mathbb{R}_+^*)$.

Exercice 3. For $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, we define the Fourier transform of f by

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^2, \quad (\mathcal{F}f)(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,dx.$$

1. Let f be an integrable function on $\mathbb{R}^2$. Prove that the map

$$T_f : \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) & \to & \mathbb{C} \\ \phi & \mapsto & \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\phi(x)\,dx \end{cases}$$

is a temparate distribution on $\mathbb{R}^2$.

2. Let $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$. Express the Fourier transform of

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} - \frac{\partial^6 u}{\partial x_2^6} + u$$

with respect to that of u.

3. Let $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$. Prove that the equation

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} - \frac{\partial^6 u}{\partial x_2^6} + u = f \tag{$*$}$$

has a unique solution $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

4. Prove that if f is an integrable function on $\mathbb{R}^2$ then the solution u of $(*)$ is a function of class C^1 on $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4. We denote by $C_+^\infty(\mathbb{R})$ the set of functions of class C^∞ on $\mathbb{R}$ supported in $[0, +\infty[$. We also denote by $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ the set of distributions on $\mathbb{R}$ supported in $[0, +\infty[$.

Let $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ be supported in $[-2, 2]$ and equal to 1 on $[-1, 1]$. For $n \in \mathbb{N}^*$ and $x \in \mathbb{R}$ we set $\chi_n(x) = \chi\left(\frac{x}{n}\right)$.

1. Let $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ and T_f be the corresponding distribution. Prove that $T_f \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ if and only if f vanishes almost everywhere in $(-\infty, 0)$.

2. Let $T \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ and $\phi \in C_+^\infty(\mathbb{R})$. Prove that for all $x \in \mathbb{R}$ the limit

$$\lim_{n\to+\infty} \big(T * (\chi_n \phi)\big)(x)$$

exists. We denote by $(T * \phi)(x)$ this limit. *Indication : one can prove that this sequence is constant for large n.*

3. For $\phi \in C_+^\infty(\mathbb{R})$, compute $\delta * \phi$.

4. Let $T \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ and $\phi \in C_+^\infty(\mathbb{R})$. Prove that $(T * \phi) \in C_+^\infty(\mathbb{R})$.