CC n° 1

Mercredi 04 mars 2020 (1h30)

Aucun document (ni calculatrice, ni téléphone, etc.) n'est autorisé. On accordera un soin particulier à la rédaction.

Exercice 1. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer $f^{-1}(]a, +\infty[)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que f est une fonction borélienne sur $\mathbb{R}$ (muni de sa topologie usuelle).
3. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}$ (muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue λ) et calculer son intégrale.

<u>Correction :</u> **1.** Soit $a \in \mathbb{R}$. On a

$$f^{-1}(]a, +\infty[) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } a < 0, \\ \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+ & \text{si } a = 0, \\ \mathbb{Q} \cap [0, -\ln(a)[& \text{si } a \in]0, 1[, \\ \emptyset & \text{si } a \geqslant 1. \end{cases}$$

2. $\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont des boréliens de $\mathbb{R}$, de même que $\mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+$ et $\mathbb{Q} \cap [0, -\ln(a)[$ qui sont dénombrable (et donc unions dénombrables de singletons, qui sont fermés). Ainsi, $f^{-1}(]a, +\infty[)$ est un borélien de $\mathbb{R}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. Puisque la tribu borélienne est engendrée par les intervalles de la forme $]a, +\infty[$ pour $a \in \mathbb{R}$, on obtient que f est bien borélienne.
3. D'après la question précédente, f est mesurable. Comme $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$ (car $\mathbb{Q}$ est dénombrable), on obtient que f est en fait λ-presque partout nulle. Cela assure que f est intégrable d'intégrale nulle.

Exercice 2. Soient $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable et μ_1 et μ_2 deux mesures sur $(X, \mathcal{M})$. Pour $A \in \mathcal{M}$ on pose

$$\mu(A) = \mu_1(A) + \mu_2(A).$$

Montrer que cela définit une mesure μ sur $(X, \mathcal{M})$.

<u>Correction :</u> Pour tout $A \in \mathcal{M}$, on a $\mu_1(A) \in [0, +\infty]$ et $\mu_2(A) \in [0, +\infty]$, donc $\mu(A)$ est bien défini comme élément de $[0, +\infty]$. Comme μ_1 et μ_2 sont des mesures on a d'une part

$$\mu(\emptyset) = \mu_1(\emptyset) + \mu_2(\emptyset) = 0.$$

D'autre part, si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'élements mesurables deux à deux disjoints, on a

$$\mu\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \mu_1\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) + \mu_2\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_1(A) + \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_2(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A).$$

Cela prouve que μ est une mesure sur $(X, \mathcal{M})$.

Exercice 3. On munit $\mathbb{R}_+^*$ de sa tribu borélienne usuelle et de la mesure de Lebesgue λ. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note

$$I_n = \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{1}{e^x + x^n} \, d\lambda(x).$$

1. Montrer que l'intégrale I_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Étudier la limite éventuelle de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Correction : **1.** Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{e^x+x^n}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ (comme inverse d'une fonction continue ne s'annulant pas), et donc borélienne. Comme elle ne prend que des valeurs positives, l'intégrale I_n est bien définie comme élément de $[0, +\infty]$. Mais par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a

$$0 \leqslant \frac{1}{e^x + x^n} \leqslant \frac{1}{e^x},$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}+} \frac{1}{e^x + x^n} \, dx \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x} \, dx = \lim_{A \to +\infty} \int_0^A \frac{1}{e^x} \, dx = \lim_{A \to +\infty} (1 - e^{-A}) = 1 < +\infty.$$

Cela prouve que f est en fait intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (NB : ce dernier calcul est licite car on a déjà justifié que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}+} \frac{1}{e^x+x^n} \, dx$ a un sens).
2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a

$$f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x < 1, \\ e^{-1} + 1 & \text{si } x = 1, \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

On a vu à la question précédente que pour tous $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$ on a

$$0 \leqslant \frac{1}{e^x + x^n} \leqslant \frac{1}{e^x},$$

et que la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. D'après le théorème de convergence dominée on obtient alors

$$I_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 e^{-x} \, dx = 1 - e^{-1}.$$

Exercice 4. Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace probabilisé (espace mesuré avec μ mesure de probabilité). On dit que deux fonctions mesurables $f, g : X \to \mathbb{R}_+$ sont indépendantes si

$$\forall A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \quad \mu\big(f^{-1}(A) \cap g^{-1}(B)\big) = \mu\big(f^{-1}(A)\big) \, \mu\big(g^{-1}(B)\big).$$

1. Soient $f, g : X \to \mathbb{R}_+$ et $\varphi, \psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ des fonctions mesurables. Montrer que si f et g sont indépendantes, alors $\varphi \circ f$ et $\psi \circ g$ sont indépendantes.
2. Soient $f, g : X \to \mathbb{R}_+$ deux fonctions étagées et indépendantes. Montrer que

$$\int_X (fg) \, d\mu = \int_X f \, d\mu \int_X g \, d\mu.$$

3. Soient $f, g : X \to \mathbb{R}_+$ deux fonctions indépendantes. Montrer qu'il existe deux suites croissantes $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions étagées qui convergent simplement vers f et g respectivement et telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n et g_n sont indépendantes.
4. Soient $f, g : X \to \mathbb{R}_+$ deux fonctions indépendantes. Montrer que

$$\int_X (fg) \, d\mu = \int_X f \, d\mu \int_X g \, d\mu.$$

5. Pourquoi a-t-on supposé que μ est une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{M})$?

Correction : **1.** On suppose que f et g sont indépendantes. Soient $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$. On a

$$\mu\big((\varphi \circ f)^{-1}(A) \cap (\psi \circ g)^{-1}(B)\big) = \mu\big(f^{-1}(\varphi^{-1}(A)) \cap g^{-1}(\psi^{-1}(B))\big).$$

Puisque φ et ψ sont mesurables, $\varphi^{-1}(A)$ et $\psi^{-1}(B)$ sont des boréliens de $\mathbb{R}_+$. Et comme f et g sont indépendants on obtient

$$\begin{aligned}\mu\big((\varphi \circ f)^{-1}(A) \cap (\psi \circ g)^{-1}(B)\big) &= \mu\big(f^{-1}(\varphi^{-1}(A))\big) \times \mu\big(g^{-1}(\psi^{-1}(B))\big) \\ &= \mu\big((\varphi \circ f)^{-1}(A)\big) \times \mu\big((\psi \circ g)^{-1}(B)\big).\end{aligned}$$

Cela prouve que $(\varphi \circ f)$ et $(\psi \circ g)$ sont indépendantes.

2. On note $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geqslant 0$ (avec $n \in \mathbb{N}$) les valeurs prises par f et $\beta_1, \dots, \beta_m \geqslant 0$ (avec $m \in \mathbb{N}$) les valeurs prises par g. Pour $j \in [\![1, n]\!]$ on note $A_j = f^{-1}(\{\alpha_j\})$ et pour $k \in [\![1, m]\!]$ on note $B_k = g^{-1}(\{\beta_k\})$. Les A_j, $1 \leqslant j \leqslant n$ sont des parties mesurables de X deux à deux disjointes, de même que les B_k, $1 \leqslant k \leqslant m$. En outre on a

$$f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j} \quad \text{et} \quad g = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \mathbb{1}_{B_k}.$$

Avec ces notations on a alors

$$\int_X f\, d\mu = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j) \quad \text{et} \quad \int_X g\, d\mu = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \mu(B_k).$$

D'autre part on a

$$fg = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \alpha_j \beta_k \mathbb{1}_{A_j \cap B_k},$$

donc

$$\int_X (fg)\, d\mu = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \alpha_j \beta_k \mu(A_j \cap B_k).$$

Or, puisque f et g sont indépendantes,

$$\mu(A_j \cap B_k) = \mu\big(f^{-1}(\{\alpha_j\}) \cap g^{-1}(\{\beta_k\})\big) = \mu\big(f^{-1}(\{\alpha_j\})\big)\mu\big(g^{-1}(\{\beta_k\})\big) = \mu(A_j)\mu(B_k).$$

D'où

$$\int_X (fg)\, d\mu = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \alpha_j \beta_k \mu(A_j)\mu(B_k) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j) \sum_{k=1}^{m} \beta_k \mu(B_k) = \int_X f\, d\mu \int_X g\, d\mu.$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on définit la fonction $\varphi_n : [0, +\infty] \to [0, +\infty]$ par

$$\forall t \in [0, +\infty], \quad \varphi_n(t) = \begin{cases} 2^{-n} E(2^n t) & \text{si } t \leqslant n, \\ n & t \geqslant n. \end{cases}$$

On note alors $f_n = \varphi_n \circ f$ et $g_n = \varphi_n \circ g$. La suite (f_n) (respectivement (g_n)) est une suite croissante de fonctions étagées qui converge simplement vers f (respectivement g). En outre, d'après la question 1, les fonctions f_n et g_n sont indépendantes pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. D'après la question 2 on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\int_X (f_n g_n)\, d\mu = \int_X f_n\, d\mu \int_X g_n\, d\mu,$$

où les fonctions f_n et g_n sont comme introduites à la question précédente. La suite $(f_n g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions simples qui converge simplement vers fg. D'après le théorème de convergence monotone on obtient alors par passage à la limite que

$$\int_X (fg)\, d\mu = \int_X f\, d\mu \int_X g\, d\mu.$$

5. La définition d'indépendance pour les fonctions f et g appliquée avec $B = \mathbb{R}_+$ donne pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$

$$\mu(f^{-1}(A)) = \mu(f^{-1}(A))\mu(X).$$

Cela prouve que $\mu(X) = 1$ ou que μ est la mesure nulle. Ainsi, si μ est une mesure non nulle qui n'est pas une mesure de probabilité, il n'y a pas de couple de fonctions indépendantes.

Exercice 5. On munit $\mathbb{R}$ de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et on considère une mesure μ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer qu'il existe un plus grand ouvert de $\mathbb{R}$ de mesure nulle (c'est-à-dire qu'il existe un ouvert $\mathcal{O}$ de mesure nulle qui contient tous les ouverts de mesures nulles).

Correction : On note Ω l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ de mesures nulles, puis on pose

$$\mathcal{O} = \bigcup_{O \in \Omega} O.$$

$\mathcal{O}$ est alors un ouvert (et en particulier borélien) de $\mathbb{R}$ comme union d'ouverts. Il suffit de montrer que $\mu(\mathcal{O}) = 0$. Pour cela on montre que $\mathcal{O}$ s'écrit comme une union dénombrable d'éléments de Ω. On note

$$\mathcal{I} = \left\{(x,r) \in \mathbb{Q} \times (\mathbb{Q} \cap]0, +\infty[) \mid]x-r, x+r[\in \Omega\right\} \subset \mathbb{Q} \times (\mathbb{Q} \cap]0, +\infty[),$$

Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable, $\mathbb{Q} \times (\mathbb{Q} \cap]0, +\infty[)$ puis $\mathcal{I}$ sont dénombrables. On note

$$\mathcal{B} = \bigcup_{(x,r) \in \mathcal{I}}]x-r, x+r[.$$

Ainsi, $\mathcal{B}$ est une union dénombrable d'intervalles ouverts. En outre, par définition, on a $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$. Soit $y \in \mathcal{O}$. Il existe $O \in \Omega$ tel que $y \in O \subset \mathcal{O}$. Comme O est ouvert, il existe $\rho > 0$ tel que $]y-\rho, y+\rho[\subset O$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe $x \in \mathbb{Q}$ tel que $|x-y| < \frac{\rho}{3}$ et on peut considérer $r \in \mathbb{Q} \cap \left]\frac{\rho}{3}, \frac{2\rho}{3}\right[$. Pour $s \in]x-r, x+r[$ on a

$$|s-y| \leqslant |s-x| + |x-y| < \frac{2\rho}{3} + \frac{\rho}{3} < \rho,$$

d'où

$$y \in]x-r, x+r[\subset]y-\rho, y+\rho[\subset O.$$

En particulier $\mu(]x-r, x+r[) = 0$, donc $(x,r) \in \mathcal{I}$. Ainsi $y \in \mathcal{B}$. Cela prouve que $\mathcal{O} = \mathcal{B}$, et donc $\mathcal{O}$ est une union dénombrable d'ouverts de mesures nulles. Finalement, $\mathcal{O}$ est bien un ouvert de mesure nulle.