Université Paul Sabatier - Toulouse 3

Année 2019 - 2020

Préparation à l'Agrégation

Fonctions d'une variable complexe

Rappels de cours

Julien Royer

(Version du 16 septembre 2019)

Table des matières

Notations

Tout au long de ces notes on utilisera les notations suivantes. Pour $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ on pose

$$\begin{aligned} D(z_0, r) &= \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| < r\}, \\ \overline{D}(z_0, r) &= \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| \leqslant r\}, \\ D^*(z_0, r) &= \{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < |z - z_0| < r\}. \end{aligned}$$

1 Fonctions dérivables au sens complexe

1.1 Limites et continuité

Les notions de limite et de continuité pour une fonction d'une variable complexe sont les analogues exacts des notions déjà connues pour une fonction d'une variable réelle. Bien évidemment, il faut adapter la distance utilisée, et la valeur absolue sera naturellement remplacée par le module.

Définition 1.1. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, f une fonction de Ω dans $\mathbb{C}$, $z_0 \in \overline{\Omega}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que f tend vers ℓ en z_0 et on note

$$f(z) \xrightarrow[z \to z_0]{} \ell$$

si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z \in \Omega, \quad |z - z_0| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(z) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Définition 1.2. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction de Ω dans $\mathbb{C}$.

- Soit $z_0 \in \Omega$. On dit que f est *continue en* z_0 si
$$f(x) \xrightarrow[z \to z_0]{} f(z_0).$$
- On dit que f est *continue sur* Ω si elle est continue en chaque point de Ω.

Proposition 1.3. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et f et g deux fonctions continues sur Ω. Alors les fonctions $f + g$, λf et fg sont continues sur g. En outre, si g ne s'annule pas sur Ω, alors le quotient f/g est continu sur Ω.*

Proposition 1.4. *Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts de $\mathbb{C}$, f une fonction continue de Ω_1 dans Ω_2 et g une fonction continue de Ω_2 dans $\mathbb{C}$. Alors $g \circ f$ est continue sur Ω_1.*

Les preuves des propositions 1.3 et 1.4 sont mot pour mot les mêmes que les résultats analogues pour une fonction d'une variable réelle et sont donc omises ici. On pourrait également énoncer les résultats concernant les opérations sur les limites ou la continuité en un point. Ils sont à nouveau parfaitement analogues au cas réel.

***Exercice* 1.** Montrer que les fonctions $z \mapsto z^2$, $z \mapsto \overline{z}$, $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$, $z \mapsto \mathrm{Im}(z)$ et $z \mapsto |z|^2$ sont continues sur $\mathbb{C}$.

1.2 Dérivabilité

On adapte maintenant aux fonctions d'une variable complexe la notion de dérivabilité. Comme pour la continuité, les définitions et opérations algébriques de base seront les parfaits analogues du cas réel. Ces propriétés seront donc à nouveau données sans démonstration.

Définition 1.5. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction de Ω dans $\mathbb{C}$.

- Soit $z_0 \in \Omega$. On dit que la fonction f est *dérivable* (ou $\mathbb{C}$-dérivable) au point z_0 si la fonction
$$z \mapsto \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$
(bien définie sur $\Omega \setminus \{z_0\}$) admet une limite en z_0. Dans ce cas cette limite est appelée *dérivée* de f au point z_0 et est notée $f'(z_0)$.

- On dit que f est *holomorphe* sur Ω si elle est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de Ω. Dans ce cas la fonction
$$f' : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ a & \mapsto & f'(a) \end{array} \right.$$
est appelée dérivée de f.
On appelle fonction *entière* une fonction holomorphe sur tout $\mathbb{C}$.
- On dit d'une fonction qu'elle est de classe C^1 si elle est $\mathbb{C}$-dérivable et si sa dérivée est continue. Par récurrence, on dit qu'une fonction est de classe C^k pour $k \geqslant 2$ si elle est $\mathbb{C}$-dérivable et si sa dérivée est de classe C^{k-1}. Une fonction de classe C^∞ est une fonction de classe C^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exemples 1.6.
- Une fonction constante sur Ω est dérivable de dérivée nulle.
- La fonction $z \mapsto z$ est dérivable sur $\mathbb{C}$ de dérivée constante égale à 1.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors la fonction $f : z \mapsto z^k$ est dérivable sur $\mathbb{C}$ de dérivée $f' : z \mapsto kz^{k-1}$.

Exemples 1.7.
- La fonction $z \mapsto \overline{z}$ n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{C}$. En effet, pour $z_0 \in \mathbb{C}$ et $h \in \mathbb{C}^*$ on a
$$\frac{\overline{z_0 + h} - \overline{z_0}}{h} = \frac{\overline{h}}{h}.$$
Or ce quotient n'a pas de limite quand h tend vers 0. En effet, si on note $u_n = 1/n$ et $v_n = i/n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors u_n et v_n tendent vers 0 mais
$$\frac{\overline{u_n}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad \frac{\overline{v_n}}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1.$$
- On considère sur $\mathbb{C}$ la fonction $f : z \mapsto |z|^2 = z\overline{z}$. Pour $z_0 \in \mathbb{C}$ et $h \in \mathbb{C}^*$ on a
$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \overline{z_0} + \overline{h} + z_0 \frac{\overline{h}}{h}.$$
On a vu que le quotient $\overline{h}/h$ n'a pas de limite quand h tend vers 0, donc f n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{C}^*$. Par contre elle est dérivable en 0 de dérivée nulle.

Proposition 1.8. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, f une fonction de Ω dans $\mathbb{C}$ et $z_0 \in \Omega$. Alors f est dérivable en z_0 de dérivée $f'(z_0)$ si et seulement si*
$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \underset{z\to z_0}{o}(|z - z_0|).$$

Proposition 1.9. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f et g deux fonctions holomorphes de Ω dans $\mathbb{C}$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.*
(i) La fonction $f + g$ est holomorphe de dérivée $f' + g'$.
(ii) La fonction λf est holomorphe de dérivée $\lambda f'$.
(iii) La fonction fg est holomorphe de dérivée $f'g + fg'$.
(iv) Si g ne s'annule pas, alors $\frac{f}{g}$ est holomorphe de dérivée $\frac{f'g-fg'}{f^2}$.

Exemple 1.10. Toute fonction polynomiale est entière. Toute fonction rationnelle est holomorphe sur tout ouvert où elle est bien définie.

Proposition 1.11. *Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts de $\mathbb{C}$. Soient f une fonction holomorphe de Ω_1 dans Ω_2 et g une fonction holomorphe de Ω_2 dans $\mathbb{C}$. Alors la composée $(g \circ f)$ est holomorphe sur Ω_1 de dérivée $(g \circ f)' = (g' \circ f)f'$.*

Définition 1.12. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction de Ω dans $\mathbb{C}$. On appelle *primitive* de f une fonction F holomorphe sur Ω telle que $F' = f$.

Exemple 1.13. Soit $m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$. Alors la fonction $z \mapsto z^m$ admet une primitive donnée par $z \mapsto \frac{z^{m+1}}{m+1}$.

Un résultat important dans le cas réel est que toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives. C'est peut-être un bon moment pour se remémorer la preuve de ce résultat, et se demander dans quelle mesure on pourrait l'adapter au cas complexe. On y reviendra ...

1.3 Dérivabilité complexe vs différentiabilité

Via l'identification $(x, y) \mapsto x + iy$ entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$, une fonction d'une variable complexe peut être vue comme une fonction de deux variables réelles, et inversement. Or la notion de dérivabilité a déjà été généralisée pour les fonctions de deux variables réelles par la différentiabilité. Il est donc naturel de comparer la différentiabité et la dérivabilité au sens complexe.

Soient donc Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction de Ω dans $\mathbb{C}$. On note

$$\tilde{\Omega} = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + iy \in \Omega\big\}$$

et on considère

$$\tilde{f} : \left\{ \begin{array}{ccc} \tilde{\Omega} & \to & \mathbb{C} \\ (x, y) & \mapsto & f(x + iy) \end{array} \right.$$

On commence par observer que f est continue sur Ω si et seulement si $\tilde{f}$ est continue sur $\tilde{\Omega}$. Plus généralement, pour toutes les propriétés de limites et de continuité, les points de vue complexe et réel sont complètement équivalents.

La comparaison entre différentiation sur $\mathbb{R}^2$ et dérivabilité sur $\mathbb{C}$ n'est pas aussi simple.

Proposition 1.14. *Soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$, avec $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Alors f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 si et seulement si $\tilde{f}$ est différentiable en (x_0, y_0) avec*

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x_0, y_0) = i\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0, y_0). \tag{1.1}$$

Dans ce cas on a

$$f'(z_0) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0, y_0) = -i\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Remarque 1.15. Si on note

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0, y_0) - i\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x_0, y_0)\right),$$

alors

$$f \text{ est dérivable en } z_0 \quad \iff \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0,$$

et dans ce cas on a

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0).$$

Démonstration de la Proposition 1.14. On suppose que f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0. Pour $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ on a alors

$$\tilde{f}(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = f\big(z_0 + (h_1 + ih_2)\big) = f(z_0) + f'(z_0)h_1 + if'(z_0)h_2 + \underset{h\to 0}{o}(\|h\|).$$

Cela prouve que f est différentiable en (x_0, y_0) avec

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0, y_0) = f'(z_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x_0, y_0) = if'(z_0).$$

Inversement, on suppose que f est différentiable en (x_0, y_0) et que (1.1) est vérifiée. On note $\alpha = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0, y_0)$. Pour $h = h_1 + ih_2 \in \mathbb{C}$ (avec $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$) on a

$$\begin{aligned} f(z_0 + h) &= \tilde{f}(x_0 + h_1, y_0 + h_2) \\ &= \tilde{f}(x_0, y_0) + \alpha h_1 + i\alpha h_2 + \underset{h\to 0}{o}\big(\|(h_1, h_2)\|\big) \\ &= f(z_0) + \alpha h + \underset{h\to 0}{o}(|h|). \end{aligned}$$

Cela prouve que f est dérivable en z_0 de dérivée α. $\square$

Pour comparer dérivabilité et différentiabilité, on a identifié f à une fonction d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{C}$. On aurait pu choisir d'identifier f à une fonction d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$. Notant P et Q les parties réelle et imaginaire de f on écrit alors

$$f(z) \simeq \big(P(x,y), Q(x,y)\big).$$

La relation (1.1) s'écrit alors

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0).$$

Ces deux égalités sont appelées *conditions de Cauchy-Riemann* et donnent un critère pratique pour montrer qu'une fonction définie via les variables réelles est dérivable au sens complexe.

D'après ces conditions de Cauchy-Riemann, la jacobienne de f (f étant vue comme application de $\tilde{\Omega}$ dans $\mathbb{R}^2$) est de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Cette matrice est celle d'une similitude directe du plan. Et c'est bien cohérent avec l'interprétation géométrique de la dérivée au sens complexe. En effet, avec les notations complexe, la partie linéaire est simplement l'application $h \mapsto f'(z_0)h$. Si la dérivée $f'(z_0)$ est non nulle on la note $\rho e^{i\theta}$ avec $\rho = |f'(z_0)| > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ (l'exponentielle sera réintroduite au Paragraphe 3.1). L'application $h \mapsto f'(z_0)$ est alors la composée de l'application $h \mapsto \rho h$ (dilatation de rapport ρ) avec l'application $h \mapsto e^{i\theta}h$ (rotation d'angle θ). Cette propriété assure qu'une application holomorphe *conserve les angles*. Cela signifie que si $\gamma_1 : I_1 \to \mathbb{C}$ et $\gamma_2 : I_2 \to \mathbb{C}$ (où I_1 et I_2 sont des voisinages de 0 dans $\mathbb{R}$) sont des applications de classe C^1 telles que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_0$ alors l'angle orienté entre $(f \circ \gamma_1)'(0)$ et $(f \circ \gamma_2)'(0)$ est le même que celui entre $\gamma_1'(0)$ et $\gamma_2'(0)$ (voir Figure 1). On dit que f est une application *conforme*.

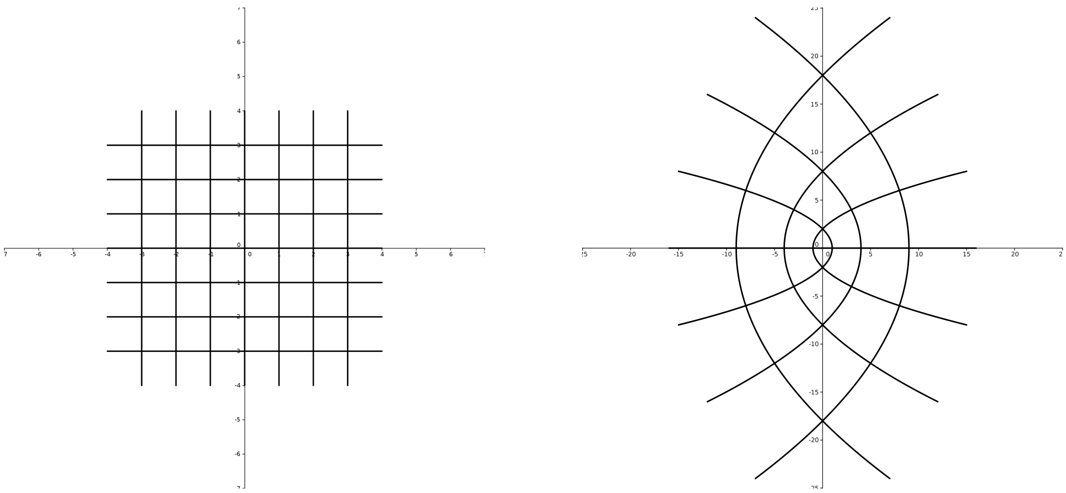

Figure 1 – Des droites horizontales et verticales, et leurs images par l'application $z \mapsto z^2$. On observe que les angles droits sont préservés.

Puisqu'une fonction holomorphe est en particulier $\mathbb{R}$-différentiable, elle hérite des propriétés vues en calcul différentiel. On commence par la suivante.

Proposition 1.16. *Soit Ω un ouvert connexe et f une fonction holomorphe sur Ω de dérivée nulle. Alors f est constante sur Ω.*

On rappelle que si Ω est convexe alors cela résulte par exemple de l'inégalité des accroissements finis. Sur un ouvert non convexe, la fonction f est au moins constante au voisinage de chaque point, et la propriété est globale par connexité : si on fixe $z_0 \in \Omega$, alors l'ensemble des $z \in \Omega$ tels que $f(z) = f(z_0)$ est fermé par continuité de f et ouvert par l'argument précédent. Puisqu'il est non vide (il contient z_0), c'est tout Ω. Évidemment, la propriété n'a aucune raison d'être vraie si Ω n'est pas connexe.

1.4 Inversion locale

Une autre conséquence du fait qu'une fonction holomorphe est différentiable (de différentielle inversible si la dérivée est non nulle) est le théorème de l'inversion locale :

Proposition 1.17 (Inversion locale holomorphe)**.** *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une application de classe C^1 sur Ω. Soit $z_0 \in \Omega$. On suppose que $f'(z_0) \neq 0$. Alors il existe un voisinage U de z_0 dans Ω tel que $f(U)$ est ouvert, f réalise une bijection de U dans $f(U)$ et sa réciproque est holomorphe sur $f(U)$.*

Corollaire 1.18 (Théorème de l'application ouverte)**.** *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une application de classe C^1 sur Ω. Si f' ne s'annule pas sur Ω alors f est une application ouverte.*

Remarque 1.19. On verra au Paragraphe 5.1 que la dérivée d'une application holomorphe est toujours continue. On pourra alors retirer cette hypothèse des deux résultats précédents.

2 Séries entières - Fonctions analytiques

2.1 Rayon de convergence

Au chapitre précédent, on a donné comme exemples de fonctions holomorphes les fonctions polynomiales, sommes finies de fonctions de la forme $z \mapsto a_n z^n$ avec $a_n \in \mathbb{C}$. On introduit maintenant les séries entières, sommes infinies de telles fonctions.

Définition 2.1. On appelle *série entière* une série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ où, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction de la forme $z \mapsto a_n z^n$ avec $a_n \in \mathbb{C}$. Le *domaine de convergence* de cette série est alors l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que la série (numérique) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge.

Exemple 2.2. Une fonction polynomiale est une série entière partout convergente.

Exemple 2.3. On considère la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n$. Pour z tel que $|z| \geqslant 1$, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n$ est grossièrement divergente. Pour $z \in D(0,1)$ on a

$$\sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1 - z^{N+1}}{1-z} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{1-z},$$

donc la série $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ converge et vaut $\frac{1}{1-z}$. Cela prouve que le domaine de convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n$ est $D(0,1)$.

***Exercice* 2.** Déterminer les domaines de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} z^{n+1}, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^n z^n, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{n+1} z^n, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} z^{2n}, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} z^{n^2}.$$

Pour l'Exemple 2.3, on a utilisé le fait qu'on sait calculer explicitement la somme d'une série géométrique. De façon générale, puisque le terme général d'une série entière est essentiellement donné par les puissances successives de z, on en établira la convergence en la comparant à des séries géométriques. Pour cela, les critères de d'Alembert et de Cauchy pour les séries numériques sont particulièrement adaptés. On les rappelle maintenant.

Proposition 2.4 (Règle de Cauchy pour les séries numériques)**.** *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série numérique à termes positifs. On suppose que $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers une limite $\ell \in [0, +\infty]$ quand n tend vers $+\infty$. Alors*
- *si $\ell < 1$ alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge,*
- *si $\ell > 1$ alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge.*

Proposition 2.5 (Règle de d'Alembert pour les séries numériques)**.** *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série numérique à termes positifs telle que $u_n > 0$ pour n assez grand. On suppose que le quotient u_{n+1}/u_n tend vers une limite $\ell \in [0, +\infty]$ quand n tend vers $+\infty$. Alors*
- *si $\ell < 1$ alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge,*
- *si $\ell > 1$ alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge.*

On note que dans les deux cas on ne peut rien conclure si $\ell = 1$.

***Exercice* 3.** Prouver les Propositions 2.4 et 2.5. Dans les deux cas, donner des exemples de séries convergentes et divergentes pour lesquelles on a $\ell = 1$.

Avec l'aide de ces critères, on peut donner le domaine de convergence d'un certain nombre de séries entières.

Exemple 2.6. On considère la série exponentielle

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Pour $z \in \mathbb{C}$ on a

$$\frac{\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|z|^n}{n!}} = \frac{|z|}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

donc d'après le critère de d'Alembert la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$ converge. Ainsi, le domaine de convergence de la série exponentielle est $\mathbb{C}$.

Exemple 2.7. On considère la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$. On a

$$\frac{\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{|z|^n}{n^2}} = \frac{|z|\, n^2}{(n+1)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} |z|,$$

donc d'après le critère de d'Alembert, la série est divergente si $|z| > 1$ et convergente si $|z| < 1$. Plus généralement, pour $z \in \overline{D}(0,1)$ on a

$$\frac{|z|^2}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Puisque la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$ est normalement convergente sur $\overline{D}(0,1)$.

***Exercice* 4.** Déterminer le domaine de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{z^n}{n^3}, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} n^4 z^n, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln(n) z^n.$$

Dans tous ces exemples, le domaine de convergence est un disque (éventuellement infini). D'ailleurs, si $\sqrt[n]{a_n}$ ou a_{n+1}/a_n converge vers une limite ℓ, alors le domaine de convergence contient le disque ouvert de centre 0 et de rayon $1/\ell$ et est contenu dans l'adhérence de ce disque. Dans la suite de ce paragraphe on formalise cette observation et on montre que, de façon générale, le domaine de définition est toujours un disque. Ou presque.

On se donne une suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note $\mathcal{D}$ le domaine de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$.

Lemme 2.8. *Soit $z_0 \in \mathcal{D}$. Alors pour $r \in]0, |z_0|[$ la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge normalement sur $D(0,r)$. En particulier, $D(0,|z_0|) \subset \mathcal{D}$.*

Démonstration. Si $z_0 = 0$ alors la conclusion est vide. On suppose donc $z_0 \neq 0$. Puisque la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$ converge, il existe en particulier $M \geqslant 0$ tel que $|a_n| |z_0|^n \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit alors $r \in]0,|z_0|[$. Pour tout $z \in D(0,r)$ on a

$$|a_n z^n| \leqslant |a_n| r^n \leqslant |a_n| |z_0|^n \left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n \leqslant M \left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n.$$

Puisque la série $\sum_{n=0}^{+\infty} M\left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n$ est convergente, on obtient que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est normalement convergente (et donc simplement convergente) sur $D(0,r)$. □

Définition 2.9. Le *rayon de convergence* de la série entière $\sum a_n z^n$ est par définition

$$R = \sup\{|z|, z \in \mathcal{D}\} \quad \in [0,+\infty].$$

Proposition 2.10. *On a $D(0,R) \subset \mathcal{D} \subset \overline{D}(0,R)$. En outre la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge normalement sur $D(0,r)$ pour tout $r \in]0,R[$.*

Démonstration. Par définition de R, on a bien $\mathcal{D} \subset \overline{D}(0,R)$. On suppose maintenant que $R > 0$, sinon les autres conclusions sont vides. Soit $r \in]0,R[$. Par définition de R, il existe $z_0 \in \mathcal{D}$ tel que $|z_0| > r$. On obtient que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge normalement sur $D(0,r)$ par le Lemme 2.8. Et pour $z \in D(0,R)$ il suffit d'appliquer ce résultat avec $r \in]\,|z|\,,R[$ pour montrer que $z \in \mathcal{D}$. □

Remarque 2.11. Le rayon de convergence vérifie donc

$$R = \inf\{|z|\,, z \notin \mathcal{D}\}\,.$$

Par contre, il est important de noter que la proposition 2.10 ne dit rien de la convergence de la série pour z tel que $|z| = R$. Et on ne peut rien dire dans le cas général, car tous les cas peuvent se présenter (convergence pour aucun de ces z, pour tous, ou pour une partie seulement, voir les exemples).

Définition 2.12. On appelle *disque de convergence* d'une série entière le disque $D(0,R)$, où R est le rayon de convergence de la série.

Ainsi le disque de convergence est inclus dans le domaine de convergence, mais l'inclusion peut être stricte.

Exemples 2.13. (i) Le rayon de convergence d'une fonction polynômiale est $+\infty$.

(ii) Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n$ est 1.

(iii) Le rayon de convergence de la série exponentielle est $+\infty$.

(iv) On considère la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n+1}$. La série est divergente pour $z = 1$ (série harmonique) et convergente (vers $\ln(2)$) pour $z = -1$ (série harmonique alternée). On en déduit que son rayon de convergence vaut 1.

***Exercice* 5.** Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{z^n}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-z)^n}{\sqrt{n}}.$$

Dans la preuve du Lemme 2.8, on a utilisé une propriété plus faible que celle donnée en hypothèse. En effet, on a supposé que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z_0^n$ converge mais on a seulement utilisé le fait que la suite $(a_n |z_0|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. On aurait pu utiliser cette propriété pour définir le rayon de convergence (d'ailleurs beaucoup de cours sur les séries entières font ce choix), ou encore la propriété intermédiaire que $a_n r^n$ tend vers 0. Cela donne les définitions équivalentes suivantes.

Proposition 2.14. *On a*

$$R = \sup\left\{ r \geqslant 0 \,\middle|\, a_n r^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \right\} = \sup\left\{ r \geqslant 0 \,\middle|\, \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|\, r^n < +\infty \right\}.$$

En outre pour tout $r \in [0,R[$ on a $a_n r^n \to 0$ et $\sup |a_n|\, r^n < +\infty$.

Démonstration. On note

$$R_1 = \sup\left\{ r \geqslant 0 \,\middle|\, a_n r^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \right\} \quad \text{et} \quad R_2 = \left\{ r \geqslant 0 \,\middle|\, \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|\, r^n < +\infty \right\}.$$

Comme une suite qui tend vers 0 est bornée, on a nécessairement $R_1 \leqslant R_2$. On suppose que $R_2 > 0$ et on considère $r \in]0,R_2[$. Par le même argument que pour le Lemme 2.8 on obtient que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n r^n$ est convergente. D'où $R \geqslant r$. Par passage au supremum on obtient que $R \geqslant R_2$. On suppose maintenant que $R > 0$ et on considère $r \in]0,R[$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n r^n$ converge donc $a_n r^n$ tend vers 0. Cela prouve que $R_1 \geqslant r$. Par passage au supremum on obtient $R_1 \geqslant R$. Finalement on a bien $R = R_1 = R_2$. □

Les exemples 2.6 et 2.7 montrent que l'on peut utiliser les critères de d'Alembert et de Cauchy pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière. Cela donne les caractérisations suivantes.

Proposition 2.15. (i) *On a*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

(ii) *On suppose que $a_n \neq 0$ pour n assez grand et que le quotient $|a_{n+1}| / |a_n|$ admet une limite quand n tend vers $+\infty$. Alors*

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Démonstration. • On suppose que $R > 0$ et on considère $r \in]0, R[$. D'après la Proposition 2.14, la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on a

$$|a_n| \, r^n \leqslant 1,$$

soit

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \frac{1}{r},$$

et donc

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \frac{1}{r}.$$

Ceci étant valable pour tout $r < R$ on obtient que

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \frac{1}{R}.$$

On suppose maintenant que $R < +\infty$ et on considère $r > R$. Toujours d'après la Proposition 2.14, la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée. Il existe donc une suite croissante $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|a_{n_k}| \, r^{n_k} \geqslant 1,$$

soit

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \geqslant \frac{1}{r}.$$

On en déduit que

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \geqslant \frac{1}{r}.$$

Ceci étant valable pour tout $r > R$ on obtient

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \geqslant \frac{1}{R}.$$

Finalement on a bien

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}.$$

• On suppose que le quotient $|a_{n+1}| / |a_n|$ est bien défini et converge vers une limite $\ell \in [0, +\infty]$ quand n tend vers $+\infty$. Pour $z \in \mathbb{C}^*$ on a

$$\frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \, |z| \, .$$

Ainsi, d'après la Proposition 2.5 la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge si $|z| < 1/\ell$ et diverge si $|z| > 1/\ell$. Cela prouve que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est $1/\ell$. □

Après avoir discuté du domaine de convergence d'une série entière, on donne maintenant quelques propriétés de ces séries. Pour cela, on considère deux séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z_n$ de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

Proposition 2.16. *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Pour $z \in D(0, \min(R_a, R_b))$ on a*

$$\alpha \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n + \beta \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\alpha a_n + \beta b_n) z^n.$$

Cela définit une série entière de rayon R tel que $R \geqslant \min(R_a, R_b)$.

Démonstration. La première assertion n'est rien d'autre que la linéarité pour des séries convergentes. Le membre de droite est bien de la forme d'une série entière, et puisque la série converge pour tout $z \in D(0, \min(R_a, R_b))$, son rayon est bien au moins égal à $\min(R_a, R_b)$. □

On rappelle le résultat suivant sur le produit de deux séries numériques :

Proposition 2.17. *Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \beta_n$ deux séries numériques absolument convergentes. Alors on a*

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \beta_n\right) = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n\right),$$

où pour $n \in \mathbb{N}$ on a noté

$$\gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k}.$$

En particulier, la série du membre de droite est absolument convergente.

Démonstration. Pour $N \in \mathbb{N}$ on a

$$\sum_{n=0}^{N} |\gamma_n| \leqslant \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} |\alpha_k|\,|\beta_{n-k}| \leqslant \sum_{k=0}^{N} |\alpha_k| \sum_{n=k}^{N} |\beta_{n-k}| \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} |\beta_j|\right).$$

Cela prouve que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n$ converge absolument. En outre,

$$\left|\sum_{n=0}^{N} \gamma_n - \left(\sum_{k=0}^{N} \alpha_k\right)\left(\sum_{j=0}^{N} \beta_j\right)\right| \leqslant \sum_{\substack{0\leqslant j,k\leqslant N\\ j+k>N}} |\alpha_k|\,|\beta_j| \leqslant \sum_{\substack{0\leqslant j,k\leqslant +\infty\\ j+k>N}} |\alpha_k|\,|\beta_j| \leqslant \sum_{n>N} |\gamma_n|.$$

Par passage à la limite ($N \to +\infty$), on obtient bien que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \beta_n\right).$$ □

Exemple 2.18. Pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ on a

$$\exp(z_1)\exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2).$$

Proposition 2.19. *Pour $z \in D(0, \min(R_a, R_b))$ on a*

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n,$$

avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Cela définit une série entière de rayon R tel que $R \geqslant \min(R_a, R_b)$.

Démonstration. Pour $z \in D(0, \min(R_a, R_b))$ on applique la proposition précédente avec $\alpha_n = a_n z^n$ et $\beta_n = b_n z^n$. □

Remarque 2.20. Pour les propositions 2.16 et 2.19 il est tout à fait possible que le rayon de convergence de la série entière obtenue soit strictement supérieur à $\min(R_a, R_b)$. Par exemple, si $b_n = -a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors la somme des séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ est nulle (et donc le rayon de convergence correspondant est infini), quelle que soit la valeur commune de R_a et R_b. De même, pour tout $z \in D(0,1)$ on a

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n\right) \times (1-z) = \frac{1}{1-z} \times (1-z) = 1,$$

et la série entière de droite a un rayon de convergence infini alors que la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n$ a un rayon de convergence égal à 1.

2.2 Régularité d'une fonction définie par une série entière

On s'intéresse dans ce paragraphe à la fonction définie par une série entière sur son disque de convergence (que l'on supposera non vide). On s'intéresse en particulier aux propriétés de régularité.

Étant donnés $N \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_N \in \mathbb{C}$, on a vu que la fonction polynomiale

$$P : z \mapsto \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$$

est dérivable sur $\mathbb{C}$ de dérivée

$$P' : z \mapsto \sum_{n=1}^{N} n a_n z^{n-1}.$$

En itérant, on obtient qu'une fonction polynomiale est en fait de classe C^∞ et que pour tous $k \in [\![0, N]\!]$ et $z \in \mathbb{C}$ on a

$$P^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{N} n(n-1)\dots(n-k) a_n z^{n-k}$$

(et les dérivées d'ordres plus grands que N sont nulles). En particulier, en évaluant en 0 on obtient que pour tout $k \in [\![0, N]\!]$ on a

$$a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}.$$

Ainsi, P peut s'écrire comme sa somme de Taylor. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a

$$P(z) = \sum_{n=0}^{N} \frac{P^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

Le but de ce paragraphe est de voir dans quelles mesures ces résultats se généralisent à la somme d'une série entière quelconque.

Proposition 2.21. *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in [0, +\infty]$. On note f sa somme. Alors la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n a_n z^{n-1}$ a également un rayon de convergence égal à R et pour $z \in D(0,R)$ la fonction f est dérivable en z de dérivée*

$$f'(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} n a_n z^{n-1}.$$

Démonstration. • On note R' le rayon de convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n a_n z^{n-1}$. Montrons que $R' \geqslant R$. Il suffit de considérer le cas où $R > 0$. Soient alors $r \in]0, R[$ et $\tilde{r} \in]r, R[$. On a

$$n a_n r^{n-1} = \underbrace{\frac{n}{r}\left(\frac{r}{\tilde{r}}\right)^n}_{\to 0} \underbrace{a_n \tilde{r}^n}_{\to 0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

donc $R' \geqslant r$. Ceci étant valable pour tout $r \in]0, R[$, on obtient que $R' \geqslant R$. Inversement, on suppose que $R' > 0$ et considère $r \in]0, R'[$ et $\tilde{r} \in]r, \tilde{R}[$. On a alors

$$a_n r^n = \underbrace{n a_n \tilde{r}^{n-1}}_{\to 0} \underbrace{\frac{r}{n} \left(\frac{r}{\tilde{r}}\right)^{n-1}}_{\to 0} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Cela prouve que $R \geqslant R'$, et donc que $R = R'$.

• On suppose que $R > 0$ (sinon la deuxième conclusion de la proposition est vide). Soit $r \in]0, R[$. Pour $z \in D(0, r)$ et $h \in D^*(0, r - |z|)$ on a

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \frac{(z+h)^n - z^n}{h}. \tag{2.2}$$

En utilisant l'identité

$$\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \cdots + \alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1},$$

valable pour tous complexes distincts α et β, et sachant que $|z| < r$ et $|z+h| < r$, on obtient que

$$|a_n| \left| \frac{(z+h)^n - z^n}{h} \right| \leqslant |a_n| \, n r^{n-1}.$$

La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} n |a_n| r^n$ est convergente, donc d'après la Proposition **??** (ou par convergence dominée) on peut passer à la limite terme à terme dans (2.2) et on obtient

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} \sum_{n \in \mathbb{N}} n a_n z^{n-1}.$$

Cela prouve que f est dérivable en z de dérivée donnée par la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} n a_n z^{n-1}$. □

Ainsi la somme d'une série entière est dérivable et la dérivée s'obtient en dérivant terme à terme. En « primitivant » terme à terme on obtient encore une série entière. Et en appliquant la Proposition 2.21 à cette série on obtient qu'elle est dérivable de dérivée f :

Corollaire 2.22. *Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in]0, +\infty]$. On note f sa somme. Alors la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ a également un rayon de convergence égal à R et sa somme F est une primitive de f sur $D(0, R)$.*

D'autre part, en appliquant la Proposition 2.21 aux dérivées successives de f on obtient par récurrence que f est en fait de classe C^∞ :

Proposition 2.23. *Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in]0, +\infty]$. On note f sa somme. Alors f est de classe C^∞ au sens complexe et pour $k \in \mathbb{N}$ et $z \in D(0, R)$ on a*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n \geqslant k} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n z^{n-k},$$

où le terme de droite définit une série entière de rayon de convergence R.

En évaluant en 0 toutes ces dérivées successives, on obtient que comme pour une fonction polynômiale la somme d'une série entière coïncide avec sa série de Taylor en 0.

Corollaire 2.24. *Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in]0, +\infty]$. On note f sa somme. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Ainsi, pour $z \in D(0, R)$ on a

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

2.3 Fonctions analytiques

On a vu au paragraphe précédent que les fonctions définies par une série entière ont de très bonnes propriétés de régularité, puisqu'elles sont automatiquement de classe C^∞, et sont même égales à leurs séries de Taylor en 0.

Cependant, la somme d'une série entière est nécessairement une fonction définie sur un disque centrée en 0, ce qui semble restreindre la portée des résultats obtenus. En outre, le corollaire 2.24 ne donne une écriture comme série de Taylor qu'en 0, alors que pour une fonction polynômiale, le résultat est valable en tout point.

On commence par observer que le choix de centrer les séries entières en 0 est purement arbitraire, et que la même analyse peut être faite autour de n'importe quel $z_0 \in \mathbb{C}$.

Définition 2.25. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On appelle *série entière centrée en* z_0 une série de fonctions de la forme

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(z-z_0)^n,$$

avec $a_n \in \mathbb{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par translation, toutes les propriétés des séries entières (centrées en 0) que l'on a montrées au paragraphe précédent s'étendent sans difficulté aux séries entières centrées en n'importe quel point de $\mathbb{C}$. Typiquement, le domaine de convergence $\mathcal{D}$ d'une série entière centrée en z_0 vérifie

$$D(z_0,R) \subset \mathcal{D} \subset \overline{D}(z_0,R)$$

pour un certain $R \in [0,+\infty]$, que l'on appelle toujours rayon de convergence.

On observe que les propriétés qui nous intéressent sont essentiellement des propriétés locales. Pour les obtenir, on n'a donc pas vraiment besoin d'avoir une fonction vraiment définie par une série entière, il suffit de considérer qui s'écrivent *au voisinage de chaque point* comme la somme d'une série entière.

Définition 2.26. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction de Ω dans $\mathbb{C}$.

- Soit $z_0 \in \Omega$. On dit que f est *développable en série entière en* z_0 s'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $r > 0$ tels que $D(0,r) \subset \Omega$, la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ a un rayon de convergence au moins égal à r, et

$$\forall z \in D(z_0,r), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

  Autrement dit, la fonction $h \mapsto f(z_0+h)$ coïncide avec la somme d'une série entière au voisinage de 0.
- On dit que f est *analytique sur* Ω si elle est développable en série entière en chaque point de Ω.

Exemple 2.27. Une fonction polynomiale est analytique sur $\mathbb{C}$. En effet, si $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $N \in \mathbb{N}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$, on sait que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a

$$P(z) = \sum_{k=0}^{N} \frac{P^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k. \tag{2.3}$$

***Exercice* 6.** Montrer que la fonction $z \mapsto 1/z$ est analytique sur $\mathbb{C}^*$.

On généralise maintenant l'Exemple 2.27 en montrant que la somme d'une série entière est analytique sur son disque de convergence. Attention, ce n'est pas une propriété évidente. Il est clair qu'une série entière de rayon de convergence non nul est développable en série entière en 0, mais il faut travailler un peu pour montrer que c'est aussi le cas en tous les autres points du disque.

Proposition 2.28. *Soit* $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$. *Alors* f *est analytique sur* $D(0,R)$. *Plus précisément, pour tout* $z_0 \in D(0,R)$ *la fonction* f *est développable en série entière en* z_0 *et le rayon de convergence de la série correspondante est au moins égal à* $R - |z_0|$.

Démonstration. Soient $z_0 \in D(0,R)$. Formellement, pour $h \in D(0, R - |z_0|)$ on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z_0+h)^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} C_n^k z_0^{n-k} h^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty} a_n C_n^k z_0^{n-k} h^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} a_{k+j} C_{k+j}^k z_0^j\right) h^k.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Soit alors $r \in]0, R-|z_0|[$. Le même calcul (justifié cette fois, car on ne manipule que des termes réels positifs) donne

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} |a_{k+j}|\, C_{k+j}^k \,|z_0|^j\, r^k = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \,(|z_0|+r)^n < +\infty.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$ on peut alors poser

$$b_k = \sum_{j=0}^{+\infty} a_{k+j} C_{k+j}^k z_0^j,$$

et le calcul précédent assure que la série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k h^k$ a un rayon de convergence au moins égal à $R - |z_0|$. En outre, le calcul (2.4) est désormais licite et prouve que pour tout $h \in D(0, R-|z_0|)$ on a

$$f(z_0+h) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k h^k.$$

Cela prouve la proposition. □

Corollaire 2.29. *Une fonction développable en série entière en un point est analytique au voisinage de ce point.*

Proposition 2.30. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Soient f et g deux fonctions analytiques sur Ω et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Alors les fonctions $\alpha f + \beta g$ et fg sont analytiques sur Ω.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer les Propositions 2.16 et 2.19 au voisinage de chaque point de Ω. □

Les résultats de régularité s'étendent alors sans difficulté aux fonctions analytiques. Il suffit d'écrire le développement en série entière au voisinage de chaque point du domaine de définition.

Proposition 2.31. *Soit f une fonction analytique sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Alors f est de classe C^∞ sur Ω. En outre, pour $z_0 \in \Omega$ il existe $r > 0$ tel que pour tout $z \in D(z_0, r)$ on a*

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

Un fonction analytique admet également une primitive au voisinage de tout point. Pour $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ comme à la proposition précédente, f admet une primitive F sur $D(z_0, r)$. Elle est donnée par

$$F(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(z_0)}{(n+1)!}(z-z_0)^{n+1}.$$

Par contre, prudence, l'existence d'une primitive n'est pas une propriété locale. Ce n'est pas parce que f admet une primitive au voisinage de tout point de Ω qu'elle admet une primitive sur tout Ω. On verra dans la suite des exemples pour lesquels le problème se pose effectivement.

2.4 Principe des zéros isolés

On discute dans ce paragraphe une propriété très importante des fonctions analytiques. On a vu au paragraphe précédent qu'une fonction analytique est de classe C^∞, ce qui est déjà une propriété de régularité importante. Mais les résultats de ce paragraphe montrent que l'analyticité est bien plus rigide. Alors que la régularité C^∞ est a priori une propriété locale, la connaissance d'une fonction analytique au voisinage d'un point permet de dire beaucoup de choses sur ce qui se passe même loin de ce point ...

On commence par donner le résultat pour une série entière.

Proposition 2.32. *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon $R > 0$.*

(i) On suppose que
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f^{(k)}(0) = 0.$$
Alors $f = 0$ sur tout $D(0, R)$.

(ii) On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(k)}(0) \neq 0$. Alors il existe $r \in]0, R[$ tel que
$$\forall z \in D^*(0, r), \quad f(z) \neq 0.$$

Démonstration. La première propriété est une conséquence immédiate du corollaire 2.24. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(k)}(0) \neq 0$. Il existe un plus petit entier vérifiant cette propriété, donc quitte à choisir k plus petit on peut donc supposer que $f^{(j)}(0) = 0$ pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$. D'après le corollaire 2.24, pour tout $z \in D(0, R)$ on a
$$f(z) = (z - z_0)^k g(z),$$
où on a posé
$$g(z) = \sum_{n\geqslant k} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(z - z_0)^{n-k}.$$
g est également la somme d'une série entière bien définie sur $D(0, R)$. En outre $g(0) = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \neq 0$, donc par continuité il existe $r > 0$ tel que $g(z) \neq 0$ pour tout $z \in D(0, r)$. Cela prouve que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in D^*(0, r)$. □

On observe que dans cette proposition l'hypothèse est locale (elle ne dépend que des valeurs de f au voisinage de 0), la deuxième conclusion est locale (on obtient une information au voisinage de 0), mais la première conclusion est globale (f est nulle partout). Pour une fonction analytique, ce résultat n'est valable qu'au voisinage du point z_0 où on fait l'hypothèse, mais elle se propage ensuite loin de z_0 par un argument de connexité.

Proposition 2.33. *Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction analytique sur Ω. On suppose qu'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que $f^{(n)}(z_0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors f est nulle sur Ω.*

Démonstration. On note $\mathcal{Z}$ l'ensemble des $z \in \Omega$ tels que $f^{(n)}(z) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. $\mathcal{Z}$ est fermé dans Ω comme intersection de fermés et non vide par hypothèse. En outre, si z est dans $\mathcal{Z}$ alors d'après la Proposition 2.31 f s'annule au voisinage de z. Cela prouve que $\mathcal{Z}$ est ouvert. Ainsi $\mathcal{Z}$ est ouvert, fermé et non vide. Puisque Ω est connexe, on obtient que $\mathcal{Z} = \Omega$, ce qui signifie que f est nulle. □

Définition 2.34. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ et f une fonction analytique sur Ω s'annulant en z_0. L'ordre de multiplicité de z_0 comme zéro de f est alors
$$m = \min\left\{j \in \mathbb{N} \,|\, f^{(j)}(z_0) \neq 0\right\} \quad \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}.$$
On dit alors que z_0 est un *zéro d'ordre m* de f (si f ne s'annule pas en z_0 on peut éventuellement dire que z_0 est un zéro d'ordre 0 de f).

Remarque 2.35. f admet en z_0 un zéro d'ordre $m \in \mathbb{N}$ si et seulement si la série entière avec laquelle f coïncide au voisinage de z_0 est de la forme
$$f(z) = \sum_{n\geqslant m} a_n (z - z_0)^n.$$

Le théorème suivant sera extrêmement important pour l'étude des fonctions analytiques :

Théorème 2.36 (Principe des zéros isolés)**.** *Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction analytique non identiquement nulle sur Ω. Alors l'ensemble des points où f s'annule est une partie discrète de Ω (tout zéro de f est isolé).*

Démonstration. Soit $z_0 \in \Omega$. On suppose que $f(z_0) = 0$. Puisque f n'est pas identiquement nulle, elle admet un zéro d'ordre fini $m \in \mathbb{N}^*$ en z_0 d'après la proposition 2.33. Comme pour la proposition 2.32, on montre alors qu'il existe $r > 0$ tel que f ne s'annule pas sur $D^*(z_0, r)$. Cela prouve que z_0 est un zéro isolé de f. □

Corollaire 2.37. *Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction analytique sur Ω. Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ l'ensemble $f^{-1}(\{\alpha\})$ est discret ou égal à Ω.*

Corollaire 2.38. *Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f et g deux fonctions analytiques sur Ω. Si l'ensemble des points où f et g coïncident admet un point d'accumulation dans Ω alors $f = g$.*

Remarque 2.39. On rappelle qu'une fonction polynômiale (somme finie de monômes) non constante s'annule au plus un nombre fini de fois (le nombre de zéros comptés avec ordres de multiplicité étant égal au degré du polynôme). On déduit du Théorème 2.36 qu'une série entière (somme dénombrable de monômes) non nulle admet au plus un nombre dénombrable de zéros (comptés avec multiplicité). C'est cohérent.

Le résultat qui suit est un simple cas particulier du Corollaire 2.38, mais il est d'une telle importance qu'on lui accordera le statut de théorème.

Théorème 2.40 (Principe du prolongement analytique)**.** *Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction analytique sur Ω. Soit $\tilde{\Omega}$ un ouvert contenant Ω. Alors f admet au plus un prolongement analytique de f sur $\tilde{\Omega}$.*

Démonstration. On suppose que les fonctions g_1 et g_2 sont deux fonctions analytiques sur $\tilde{\Omega}$ qui coïncident avec f sur Ω. Elles y sont en particulier égales. Puisque Ω n'est pas discret, on en déduit que $g_1 = g_2$. □

2.5 Fonctions analytiques réelles

Tout ce qui a été dit dans cette partie 2 concerne des fonctions d'une variable complexe. Cependant, tout est valable dans un cadre réel.

Commençons par les séries entières. Une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être vue comme une suite complexe. Ainsi le domaine de convergence de la série de fonctions (d'une variable réelle) $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ n'est rien d'autre que l'intersection avec $\mathbb{R}$ du domaine de convergence de cette même série entière vue comme série complexe. En particulier, il existe donc $R \in [0, +\infty]$ tel que le domaine de convergence $\mathcal{D}$ de la série vérifie $]-R, R[\subset \mathcal{D} \subset [-R, R]$.

On définit alors les fonctions analytiques sur $\mathbb{R}$ comme on l'a fait sur $\mathbb{C}$, et tous les résultats démontrés dans $\mathbb{C}$ le sont encore dans $\mathbb{R}$ avec les mêmes démonstrations. Une fonction analytique est de classe C^∞ et coïncide au voisinage de chacun des points du domaine de définition avec sa série de Taylor. Et on a le principe des zéros isolés et le principe du prolongement analytique. Ces propriétés sont beaucoup, beaucoup plus fortes que d'être simplement C^∞.

Il existe par exemple des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ dont la série de Taylor en 0 a un rayon de convergence nul. Une telle fonction n'a alors aucune chance de coïncider avec cette série de Taylor sur aucun voisinage de 0. En fait, d'après le Théorème de Borel (voir par exemple l'Exercice 116 du *Petit Guide de calcul différentiel* de F. Rouvière), pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou dans $\mathbb{C}$) il existe une fonction f de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ou dans $\mathbb{C}$) telle que $f^{(k)}(0) = a_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En prenant par exemple $a_k = (k!)^2$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ on obtient un exemple de fonction dont la série de Taylor en 0 a un rayon de convergence nul.

Un autre phénomène qui peut se produire est d'avoir une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ qui admet en 0 une série de Taylor qui a un rayon de convergence infini, mais telle que la fonction et sa série de Taylor en 0 ne coïncident sur aucun voisinage de 0. Par exemple, la fonction

$$x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et toutes ses dérivées sont nulles en 0. Sa série de Taylor est donc nulle en 0, alors qu'elle n'est elle-même identiquement nulle sur aucun voisinage de 0.

Et évidemment, une fonction de classe C^∞ n'a en général aucune raison de satisfaire le principe des zéros isolés ou le principe du prolongement analytique. Pour s'en convaincre il suffit de se rappeller qu'il existe des fonctions $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ égales à 0 sur $[-1,1]$ et égales à 1 (ou n'importe quoi d'autre) en dehors de [-2,2]. Et encore, on peut faire bien plus exotique (voir par exemple l'Exercice 115 du Rouvière).

Néanmoins, les versions globales de la formule de Taylor (Taylor-Lagrange ou Taylor avec reste intégrale), qui permette de contrôler la différence entre une fonction est les sommes partielles de sa série de Taylor, permettent de montrer que si la suite des dérivées en un point d'une fonction C^∞ ne grandit pas trop vite, alors cette fonction est bien analytique.

Proposition 2.41. *Soient $R > 0$ et f une fonction de classe C^∞ sur $]-R,R[$. On suppose qu'il existe $M > 0$ et $a > 0$ tels que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-R,R[$ on a*

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leqslant M a^n.$$

Alors f est analytique sur $]-R,R[$.

Démonstration. Soient $x \in]-R,R[$ et $N \in \mathbb{N}$. D'après la formule de Taylor-Lagrange on a

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right| \leqslant \frac{M a^{N+1}}{(N+1)!} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0.$$

Cela prouve que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge sur $]-R,R[$ et sa somme coïncide avec f. Ainsi, f est bien la somme d'une série entière (et donc une faction analytique) sur $]-R,R[$. □

3 Fonctions usuelles

3.1 Fonction exponentielle

La fonction exponentielle a été définie à l'Exemple 2.6 par la série entière

$$\exp(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}.$$

On décrit dans ce paragraphe les propriétés de cette fonction. On ne suppose connue aucune des propriétés de l'exponentielle, ni réelle, ni complexe. On ne suppose pas non plus avoir déjà connaissance du réel π, qui sera défini pour l'occasion.

Proposition 3.1. (i) *On a* $\exp(0) = 1$.

(ii) *La série exponentielle a un rayon de convergence infini. En particulier, la convergence de la série est normale sur tout compact de $\mathbb{C}$.*

(iii) *Pour $z \in \mathbb{C}$ on a $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$.*

(iv) *Pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ on a*

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2).$$

(v) *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $\exp(z) \in \mathbb{C}^*$ et*

$$\exp(z)^{-1} = \exp(-z).$$

(vi) *La fonction exponentielle est analytique sur $\mathbb{C}$. En particulier elle est holomorphe et pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a*
$$\exp'(z) = \exp(z).$$

(vii) *La restriction de l'exponentielle à $\mathbb{R}$ définit une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.*

(viii) *Pour $z \in \mathbb{C}$ on a*
$$|\exp(z)| = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad z \in i\mathbb{R}.$$

(ix) *L'image de l'application exponentielle est $\mathbb{C}^*$.*

(x) *Il existe un unique réel positif, noté π, tel que pour $z \in \mathbb{C}$ on a*
$$\exp(z) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad z \in 2i\pi\mathbb{Z}.$$

On a alors $\exp(i\pi) = -1$ et $\exp(i\pi/2) = i$.

Démonstration. • Le premier point est clair, le second a été vu au Paragraphe 2.1, le quatrième à l'Exemple 2.18, le cinquième suit en prenant $z_2 = -z_1$, et le sixième est conséquence des Propositions 2.28 et 2.21, et d'un simple calcul. Pour (iii), on utilise le fait que le conjugué d'une somme finie est la somme des conjugués, et le fait que la conjugaison définit une application continue sur $\mathbb{C}$.
• Montrons (vii). L'exponentielle d'un réel est bien réelle, comme somme d'une série à coefficients réels, et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2}\right)^2 > 0.$$

D'après (vi), l'exponentielle définit alors une application strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a alors $\exp(1) > \exp(0) = 1$ et donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\exp(n) = \exp(1)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

La croissance assure alors que
$$\exp(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty,$$
puis
$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$
La fonction exponentielle réalise donc bien une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.
• Soit $\theta \in \mathbb{R}$. D'après (iii) et (iv) on a

$$|\exp(i\theta)|^2 = \exp(i\theta)\overline{\exp(i\theta)} = \exp(i\theta)\exp(-i\theta) = 1.$$

Inversement on suppose que $z = x + iy \in \mathbb{C}$ (avec $x, y \in \mathbb{R}$) est tel que $|\exp(z)| = 1$. On a alors
$$1 = |\exp(z)| = |\exp(x)|\,|\exp(iy)| = \exp(x).$$
Puisque l'exponentielle réelle est injective, on a nécessairement $x = 0$. On obtient bien que $|\exp(z)| = 1$ si et seulement si z est imaginaire pur.
• Montrons (ix). On note $F = \exp(\mathbb{C})$. On a déjà vu que $F \subset \mathbb{C}^*$ et, d'après le théorème de l'application ouverte (Corollaire 1.18), F est un ouvert de $\mathbb{C}$ (et donc un ouvert de $\mathbb{C}^*$). En outre, F est un sous-groupe du groupe (multiplicatif) $\mathbb{C}^*$. Soit $a \in \mathbb{C}^*$. L'application $z \mapsto az$ est une bijection continue de $\mathbb{C}^*$, dont la réciproque $z \mapsto a^{-1}z$ est également continue. Ainsi, $aF = \{az, z \in F\}$, est un ouvert de $\mathbb{C}^*$. En outre, $aF \cap F \neq \emptyset$ si et seulement si $a \in F$ (auquel cas on a $aF = F$). Ainsi on a

$$\mathbb{C}^* = F \sqcup \left(\bigcup_{a\in\mathbb{C}^*\setminus F} aF\right).$$

Ainsi on a écrit $\mathbb{C}^*$ comme union disjointe de deux ouverts. Comme F n'est pas vide et que $\mathbb{C}^*$ est connexe, cela prouve que $F = \mathbb{C}^*$.
- Il reste à montrer (x). On a déjà vu que l'image réciproque de $\{1\}$ par l'exponentielle est contenue dans l'axe imaginaire. Il suffit donc d'étudier le noyau N du morphisme de groupes

$$\begin{cases} (\mathbb{R},+) & \to & (\mathbb{C},^*,\times) \\ \theta & \mapsto & \exp(i\theta). \end{cases}$$

Ce noyau est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$. On considère $\theta \in \mathbb{R}^*$ tel que $\exp(i\theta) = -1$ (un tel θ existe d'après (ix) et (viii)). Cela assure déjà que $N \neq \mathbb{R}$. D'autre part, $\exp(2i\theta) = \exp(i\theta)^2 = 1$, donc N n'est pas réduit à $\{0\}$. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que $N = \alpha\mathbb{Z}$. On note alors $\pi = \alpha/2$. On a alors $\exp(i\pi) \neq 1$ et $\exp(i\pi)^2 = \exp(2i\pi) = 1$ donc $\exp(i\pi) = -1$. Ainsi, pour $\theta \in \mathbb{R}$ on a $\exp(i\theta) = 1$ si et seulement si θ est un multiple de 2π et $\exp(i\theta) = -1$ si et seulement si $\theta - \pi$ est un multiple de 2π.

On s'intéresse finalement à $\exp(i\pi/2)$. C'est une racine de -1, soit i ou $-i$. On considère la fonction $s : t \mapsto \operatorname{Im}(\exp(i\theta))$. Elle est continue et ne s'annule que quand $\exp(i\theta)$ vaut 1 ou -1, soit quand t est un multiple de π. En particulier, s est de signe constant sur $]0,\pi[$. Mais $s'(0) = \operatorname{Im}(i) = 1$, donc s prend des valeurs strictement positives sur $]0,\pi[$. Cela assure que $\exp(i\pi/2) = i$. □

Définition 3.2. On note $e = \exp(1)$. Pour $z \in \mathbb{C}$ on pourra écrire e^z au lieu de $\exp(z)$.

Remarque 3.3. Attention à cette notation ! ! Elle est pratique, donc on l'utilise, mais ce n'est qu'une notation, et il ne faut pas lui faire dire ce qu'elle ne dit pas. On utilise cette notation parce que les propriétés (iv) et (v) sont vraies, et qu'en ce sens la fonction exponentielle ressemble à une fonction puissance. Évidemment, il n'est pas question de *déduire* (iv) et (v) d'un choix de notation. D'autre part, ce choix de notation est raisonnable car pour un entier n les deux nombres $\exp(n)$ et $e \times \cdots \times e$ (avec n facteurs) coïncident (d'après la propriété (iv)...), il n'y a donc pas d'ambiguïté à les noter de la même façon. De même, $\exp(-n)$ coïncide avec $1/(e \times \cdots \times e)$.

Définition 3.4. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On appelle argument de z un réel θ tel que $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$.

Proposition 3.5. *Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors z admet une infinité d'arguments. Plus précisément, si θ_0 est un argument de z, alors l'ensemble des arguments de z est*

$$\{\theta_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Démonstration. On note $u = z/|z|$. On a $|u| = 1$. D'après les propriété (ix) et (viii) de la Proposition 3.1 il existe $\theta_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\exp(i\theta_0) = u$. θ_0 est alors un argument de z. Soit maintenant $\theta \in \mathbb{R}$. On a

$$e^{i\theta} = \frac{z}{|z|} \iff e^{i\theta} = e^{i\theta_0} \iff e^{i(\theta-\theta_0)} = 1.$$

D'après la propriété (x) de la Proposition 3.1, θ est un argument de z si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $i(\theta - \theta_0) = 2ik\pi$, soit $\theta = \theta_0 + 2k\pi$. □

Exercice 7. Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ et $u_0 \in \mathbb{C}$. Déterminer l'ensemble des fonctions entières telles que

$$\begin{cases} u' = \alpha u, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

3.2 Fonctions hyperboliques et trigonométriques

On définit maintenant les fonctions *cosinus hyperbolique* et *sinus hyperbolique* par les séries entières

$$\cosh(z) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{z^{2k}}{(2k)!} \quad \text{et} \quad \sinh(z) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Proposition 3.6. (i) *Les séries cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique ont un rayon de convergence infini.*

(ii) *La fonction* cosh *est paire, la fonction* sinh *est impaire.*

(iii) *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *on a*

$$\exp(z) = \cosh(z) + \sinh(z), \quad \cosh(z) = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2}, \quad \sinh(z) = \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}.$$

(iv) *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *on a*

$$\cosh'(z) = \sinh(z) \quad \textit{et} \quad \sinh'(z) = \cosh(z).$$

(v) *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *on a*

$$\cosh(z)^2 - \sinh(z)^2 = 1.$$

Démonstration. On montre le dernier point. Pour $z \in \mathbb{C}$ on note $f(z) = \cosh(z)^2 - \sinh(z)^2 - 1$. Cela définit une fonction analytique sur $\mathbb{C}$ de dérivée partout nulle. Par conséquent, toutes les dérivées de f sont nulles. Comme par ailleurs f s'annule en 0, on obtient que $f = 0$. □

On définit maintenant les fonctions *cosinus* et *sinus* par les séries entières

$$\cos(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \quad \text{et} \quad \sin(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Proposition 3.7. (i) *Les séries cosinus et sinus ont un rayon de convergence infini.*

(ii) *La fonction* cos *est paire, la fonction* sin *est impaire.*

(iii) *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *on a*

$$\cos(z) = \cosh(iz) \quad \textit{et} \quad \sin(z) = -i \sinh(iz).$$

(iv) *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *on a*

$$\cos(z) = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}, \quad \sin(z) = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}.$$

(v) *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *on a*

$$\cos'(z) = -\sin(z) \quad \textit{et} \quad \sin'(z) = \cos(z).$$

(vi) *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *on a*

$$\cos(z)^2 + \sin(z)^2 = 1.$$

(vii) *Pour* θ *réel (et seulement dans ce cas !) on a*

$$\cos(\theta) = \mathrm{Re}(\exp(i\theta)) \quad \textit{et} \quad \sin(\theta) = \mathrm{Im}(\exp(i\theta)).$$

Lorsque cela a un sens on pose

$$\tanh(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)} \quad \text{et} \quad \tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}.$$

3.3 Logarithmes

Il y a deux façons naturelles d'introduire le logarithme népérien $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$. On peut le voir comme l'unique primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1, ou bien comme la réciproque de la fonction exponentielle, qui réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

On peut envisager à nouveau ces deux approches pour définir un logarithme complexe. On verra à la Proposition 3.15 que ces deux propriétés sont encore équivalentes... et présentent donc les mêmes difficultés.

A ce stade, on n'a pas de résultat d'existence de primitives (patience, ça viendra !) et l'exponentielle complexe n'est pas vraiment une bijection. Si on restreint l'ensemble d'arrivée à $\mathbb{C}^*$ on obtient une application surjective mais, contrairement à l'exponentielle réelle, l'exponentielle complexe n'est pas non plus injective. Il est donc nécessaire de restreindre également l'ensemble de départ.

Définition 3.8. On appelle *logarithme népérien* et on note ln la bijection réciproque de l'exponentielle réelle.

Lemme 3.9. *Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $\ell(z) \in \mathbb{C}$ est tel que $\exp(\ell(z)) = z$ alors on a*

$$\ell(z) = \ln(|z|) + i\theta,$$

où θ est un argument de z.

Démonstration. On note $\ell(z) = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. On a alors

$$z = \exp(x + iy) = \exp(x)\exp(iy).$$

Ainsi $|z| = \exp(x)$, soit $x = \ln(|z|)$, puis $\exp(iy) = z/|z|$, ce qui signifie que y est un argument de z. □

On a précisé le fait que l'exponentielle complexe n'est pas injective, et avec la Proposition 3.5 on obtient que chaque $z \in \mathbb{C}^*$ admet une infinité d'antécédents, tous différents d'un multiple de $2i\pi$.

Définition 3.10. Une *détermination continue du logarithme* sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est une fonction continue ℓ sur Ω telle que

$$\forall z \in \Omega, \quad \exp(\ell(z)) = z.$$

Ainsi, si la fonction exponentielle est injective sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, alors elle réalise une bijection de Ω dans l'ouvert $\tilde{\Omega} = f(\Omega)$ et sa réciproque est une détermination continue du logarithme sur $\tilde{\Omega}$.

Remarque 3.11. Il ne peut pas exister de détermination du logarithme sur un ouvert contenant 0.

Proposition 3.12. *Si ℓ_1 et ℓ_2 sont deux représentations continues du logarithme sur deux ouverts Ω_1 et Ω_2 d'intersection connexe et non vide, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\ell_1(z) - \ell_2(z) = 2ik\pi$ pour tout $z \in \Omega_1 \cap \Omega_2$.*

Démonstration. Puisque $\exp(\ell_1(z) - \ell_2(z)) = 1$ pour tout $z \in \Omega_1 \cap \Omega_2$, il existe une application $k : \Omega_1 \cap \Omega_2 \to \mathbb{Z}$ telle que $\ell_1(z) - \ell_2(z) = 2ik(z)\pi$ pour tout $z \in \Omega_1 \cap \Omega_2$. Mais k est continue, $\Omega_1 \cap \Omega_2$ est supposé connexe et $\mathbb{Z}$ est discret, donc k est constante. □

Proposition 3.13. *Il n'existe pas de détermination continue du logarithme sur un voisinage du cercle unité (en particulier sur $\mathbb{C}^*$).*

Démonstration. On suppose par l'absurde qu'il existe une détermination continue ℓ du logarithme sur un voisinage du cercle unité. Alors l'application $f : \theta \mapsto \ell(e^{i\theta}) - i\theta$ est continue sur $\mathbb{R}$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a

$$\exp(f(z)) = \exp(\ell(e^{i\theta}))\exp(-i\theta) = 1,$$

donc f est à valeurs dans $2i\pi\mathbb{Z}$. Comme $2i\pi\mathbb{Z}$ est discret, f est une application constante, et donc

$$\ell(1) = f(0) = f(2\pi) = \ell(1) - 2i\pi,$$

ce qui donne une contradiction. □

Remarque 3.14. L'application exponentielle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^* \times i]-\pi,\pi]$ dans $\mathbb{C}^*$ et sa réciproque ℓ est une application sur $\mathbb{C}^*$ telle que $\exp \circ \ell = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^*}$. Mais cette fonction ℓ n'est pas continue, et ce pour la même raison que celle utilisée pour la preuve de la proposition 3.13 : $\ell(e^{-i\pi+i\varepsilon})$ tend vers $-i\pi$ quand ε tend vers 0, alors que $\ell(e^{-i\pi}) = i\pi$.

Proposition 3.15. *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}^*$.*

(i) *On suppose qu'il existe détermination continue ℓ du logarithme sur Ω. Alors ℓ est holomorphe et pour tout $z \in \Omega$ on a $\ell'(z) = \frac{1}{z}$.*

(ii) *On suppose que la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ admet une primitive F sur Ω. Alors il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $F - \alpha$ est une détermination continue du logarithme sur Ω.*

Démonstration. On suppose que ℓ est une détermination continue du logarithme sur Ω. Soit $z \in \Omega$. Par continuité de ℓ on a

$$\ell(z+h) - \ell(z) \xrightarrow[h \to 0]{} 0,$$

puis, comme la fonction exp est dérivable de dérivée 1 en 0,

$$\frac{\exp(\ell(z+h) - \ell(z)) - 1}{\ell(z+h) - \ell(z)} \xrightarrow[h \to 0]{} 1$$

(on note que le dénominateur n'est pas nul si $h \neq 0$ car ℓ est injective). Or

$$\exp\big(\ell(z+h) - \ell(z)\big) - 1 = \frac{\exp(\ell(z+h))}{\exp(\ell(z))} - 1 = \frac{z+h}{z} - 1 = \frac{h}{z}.$$

Cela prouve que

$$\frac{\ell(z+h) - \ell(z)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} \frac{1}{z},$$

et donc que ℓ est dérivable en z de dérivée $\ell'(z) = \frac{1}{z}$.

Inversement, on suppose que $F : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe avec $F'(z) = \frac{1}{z}$ pour tout $z \in \Omega$. Pour $z \in \Omega$ on pose

$$h(z) = \frac{\exp(F(z))}{z}.$$

Cela définit une fonction h est holomorphe de dérivée nulle et donc constante sur Ω. On note $\beta \in \mathbb{C}$ cette constante. Nécessairement, $\beta \neq 0$. Soit alors $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $e^\alpha = \beta$. Pour tout $z \in \Omega$ cela donne

$$\exp(F(z)) = z \exp(\alpha).$$

Cela prouve que $F - \alpha$ est une détermination du logarithme. □

Définition 3.16. On appelle *détermination principale du logarithme* et on peut noter Log la réciproque de la bijection

$$\begin{cases} \mathbb{R} \times i]-\pi,\pi[& \to & \mathbb{C}^* \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\}) \\ z & \mapsto & \exp(z) \end{cases}$$

On remarque que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ il existe une détermination du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus e^{i\theta}\mathbb{R}_+$.

Proposition 3.17. *La détermination principale du logarithme est développable en série entière sur le disque $D(1,1)$. Plus précisément, pour tout $z \in D(1,1)$ on a*

$$\operatorname{Log}(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \frac{(z-1)^{n+1}}{n+1}. \tag{3.5}$$

Démonstration. D'après la Proposition 3.15 on a, pour tout $z \in D(1,1)$,

$$\operatorname{Log}'(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{1 + (z-1)} = \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n (z-1)^n.$$

Ainsi, d'après la Proposition 2.21, les deux membres de (3.5) sont deux fonctions holomorphes sur $D(1,1)$ qui ont même dérivée. Comme par ailleurs ces deux fonctions s'annulent en 1, on obtient qu'elles sont égales sur tout $D(1,1)$ par la Proposition 1.16. □

Définition 3.18. On appelle *détermination continue de l'argument* une application de la forme $\operatorname{Im}(\ell)$ où ℓ est une détermination continue du logarithme.

La détermination principale de l'argument, que l'on peut noter Arg, est la partie imaginaire de la détermination principale du logarithme.

Proposition 3.19. *Soit θ une détermination continue de l'argument sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Alors θ est une fonction continue de Ω dans $\mathbb{R}$ et $\theta(z)$ est un argument de z pour tout $z \in \Omega$.*

3.4 Fonctions racines et puissances réelles

Définition 3.20. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On appelle détermination continue de la racine k-ième sur Ω une fonction continue f sur Ω telle que pour tout $z \in \Omega$ on a

$$f(z)^k = z.$$

Proposition 3.21. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. On suppose qu'il existe sur Ω une détermination continue ℓ du logarithme. Alors l'application*

$$z \mapsto \exp\left(\frac{\ell(z)}{k}\right).$$

est une détermination continue de la racine k-ième sur Ω.

Démonstration. La fonction proposée est continue comme composée de fonctions continue. En outre pour tout $z \in \Omega$ on a

$$\exp\left(\frac{\ell(z)}{k}\right)^k = \exp\big(\ell(z)\big) = z.$$

$\square$

Exemple 3.22. L'application qui à $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ associe son unique racine de partie réelle strictement positive est une détermination continue de la racine carrée sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Idem en associant à z son unique racine carrée de partie réelle strictement négative.

Remarque 3.23. Plus généralement, si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}^*$ sur lequel existe une détermination du logarithme, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ on peut définir une « détermination continue de la puissance α » en posant

$$f_\alpha(z) = \exp\big(\alpha\ell(z)\big).$$

Cela définit une fonction holomorphe sur Ω et pour $z \in \Omega$ on a

$$f'_\alpha(z) = \frac{\alpha}{z} f_\alpha(z).$$

On observe que pour $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $z \in \Omega$ on a aussi

$$f_\alpha(z) f_\beta(z) = f_{\alpha+\beta}(z).$$

En particulier, $f'_\alpha(z) = \alpha f_{\alpha-1}(z)$.

4 Intégration - Primitives - Formule de Cauchy

4.1 Intégration le long d'un chemin

Définition 4.1.
- On appelle *chemin* une application γ continue et C^1 par morceaux d'un segment $[a, b]$ (avec $a < b$) dans $\mathbb{C}$. Ainsi γ est continue sur $[a, b]$ et il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ de $[a, b]$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) tel que la restriction de γ à $[a_{k-1}, a_k]$ est de classe C^1 pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. L'*image* du chemin γ est $\mathrm{Im}(\gamma) = \gamma([a, b]) \subset \mathbb{C}$.
- Un *lacet* est un chemin fermé, c'est-à-dire un chemin $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ (avec $a < b$) tel que $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Exemples 4.2.
- Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. On considère le chemin

$$\sigma(z_1, z_2) : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & z_1 + t(z_2 - z_1) \end{array} \right.$$

Son image est le segment $[z_1, z_2]$. Il est parcouru dans le sens allant de z_1 vers z_2.

- Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. On considère le chemin

$$c(z_0, r) : \left\{ \begin{array}{ccc} [0, 2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ \theta & \mapsto & z_0 + re^{i\theta} \end{array} \right.$$

C'est un lacet, dont l'image est le cercle de centre z_0 et de rayon r. Il est parcouru dans le sens direct (sens trigonométrique).

Définition 4.3. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction continue de Ω dans $\mathbb{C}$. Soit $\gamma : [a, b] \to \Omega$ un chemin de classe C^1. L'*intégrale de f le long de γ* est

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt.$$

Pour le cas général, on considère une subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ de $[a, b]$ adaptée à γ et on définit

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt. \tag{4.6}$$

L'intégrale de f le long du chemin γ peut aussi être simplement notée $\int_\gamma f$.

Remarque 4.4. L'intégrale d'une fonction sur un chemin de $\mathbb{C}$ est en fait une simple intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment de $\mathbb{R}$.

Exemples 4.5. On considère les chemins suivants :

$$\gamma_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} [0, 2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ \theta & \mapsto & e^{i\theta} \end{array} \right. , \qquad \gamma_{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} [0, 2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ \theta & \mapsto & e^{-i\theta} \end{array} \right. ,$$

$$\gamma_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} [-2\pi, 2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ \theta & \mapsto & e^{i\theta} \end{array} \right. , \qquad \tilde{\gamma}_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} [0, 2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ \theta & \mapsto & e^{2i\theta} \end{array} \right. .$$

Tous ces chemins sont en fait à valeurs dans $\mathbb{C}^*$. On peut donc calculer :

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z}\, dz = \int_0^{2\pi} e^{-i\theta}\, ie^{i\theta}\, d\theta = 2i\pi,$$

$$\int_{\gamma_{-1}} \frac{1}{z}\, dz = \int_0^{2\pi} e^{i\theta}(-ie^{-i\theta})\, d\theta = -2i\pi,$$

$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{z}\, dz = \int_{-2\pi}^{2\pi} e^{-i\theta}\, ie^{i\theta}\, d\theta = 4i\pi,$$

$$\int_{\tilde{\gamma}_2} \frac{1}{z}\, dz = \int_0^{2\pi} e^{-2i\theta}\, 2ie^{2i\theta}\, d\theta = 4i\pi.$$

Définition 4.6. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \Omega$ et $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \Omega$ deux chemins.

- On dit que γ_1 et γ_2 sont *équivalents* s'il existe un C^1-difféomorphisme croissant $\varphi : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$ tel que $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$.
- On dit que γ_1 et γ_2 sont *opposés* s'il existe un C^1-difféomorphisme décroissant $\varphi : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$ tel que $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$.

Définition 4.7. Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ un chemin. On notera $-\gamma$ le chemin opposé à γ défini par

$$-\gamma : \left\{ \begin{array}{ccc} [a, b] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & f(a + b - t) \end{array} \right.$$

Proposition 4.8. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction continue de Ω dans $\mathbb{C}$. Soient $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \Omega$ et $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \Omega$ deux chemins.*

(i) *Si γ_1 et γ_2 sont équivalents alors*

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f.$$

(ii) *Si γ_1 et γ_2 sont opposés alors*

$$\int_{\gamma_1} f = -\int_{\gamma_2} f.$$

Il s'agit d'une simple application de la formule de changement de variables pour une fonction d'une variable réelle :

Démonstration. • On montre le cas où γ_1 et γ_2 sont de classe C^1. Soit φ comme à la définition 4.6. On a

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)\,dt = \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_2(\varphi(t)))\gamma_2'(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

On effectue le changement de variables $s = \varphi(t)$, $ds = \varphi'(t)\,dt$, ce qui donne

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\varphi(a_1)}^{\varphi(b_1)} f(\gamma_2(s))\gamma_2'(s)\,ds.$$

Si γ_1 et γ_2 sont équivalents alors $\varphi(a_1) = a_2$ et $\varphi(b_1) = b_2$, ce qui donne la première égalité. Si γ_1 et γ_2 sont opposés alors $\varphi(a_1) = b_2$ et $\varphi(b_1) = a_2$, ce qui donne alors la seconde. Cela prouve la proposition si γ_1 et γ_2 sont de classe C^1.
• Le cas général se montre de la même façon, en découpant l'intégrale. On suppose que γ_1 et γ_2 sont équivalents. Si $a_1 = \alpha_0 < \cdots < \alpha_n = b_1$ est une subdivision adaptée à γ_1 alors $a_2 = \varphi(\alpha_0) < \cdots < \varphi(\alpha_n) = b_2$ est une subdivision adaptée à γ_2. On vérifie alors que

$$\int_{\gamma_1} f = \sum_{k=1}^{n} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{\varphi(a_{k-1})}^{\varphi(a_k)} f(\gamma_2(s))\gamma_2'(s)\,ds = \int_{\gamma_2} f.$$

Le cas où γ_1 et γ_2 sont opposés se montre de la même façon. □

Remarque 4.9. Dans la preuve on a seulement utilisé le fait que φ est de classe C^1 avec $\varphi(a_1) = a_2$ et $\varphi(b_1) = b_2$ (respectivement $\varphi(a_1) = b_2$ et $\varphi(b_1) = a_2$)).

Exemples 4.10. On revient sur les Exemples 4.5. Les chemins γ_2 et $\tilde{\gamma}_2$ sont équivalents, tandis que les chemin γ_1 et γ_{-1} sont opposés. Par contre γ_1 et γ_2 ne sont pas équivalents.

La relation « être équivalent » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des chemins. On appelera *courbe* une classe d'équivalence pour cette relation, et si γ est dans une classe d'équivalence Γ, on dira que γ est une paramétrisation de Γ.

Si on voit un chemin γ au sens premier du terme, comme la description d'un chemin parcouru (on se trouve à la position $\gamma(t)$ à l'instant t, $\gamma'(t)$ étant alors la vitesse à l'instant t), alors la notion de courbe ne garde comme information que le chemin parcouru et le sens de parcours, mais ne tient pas compte de quand il a été parcouru, ni à quelle vitesse. Par exemple, les chemins γ_2 et $\tilde{\gamma}_2$ parcourent deux fois le cercle unité dans le sens direct, et c'est la seule information qui compte pour l'intégration. Le fait que $\tilde{\gamma}_2$ aille deux fois plus vite (et en deux fois moins de temps) ne joue aucun rôle ici. Il n'y a donc pas lieu de distinguer γ_2 et $\tilde{\gamma}_2$. Plutôt que de définir les intégrales le long de chemins, on peut donc choisir de les définir le long des courbes.

Étant donnée une courbe Γ et une paramétrisation γ de Γ, on définit alors l'intégrale d'une fonction f le long de Γ comme étant l'intégrale de f le long de γ (et d'après la Proposition 4.8 c'est bien indépendant du choix d'un paramétrage). On notera

$$\int_{\Gamma} f = \int_{\gamma} f.$$

Ainsi on peut parler de l'intégrale de la fonction $z \mapsto 1/z$ le long du cercle unité parcouru deux fois dans le sens direct, sans avoir besoin de préciser une paramétrisation particulière.

Ceci étant dit, il peut être plus commode de parler de chemin (vraie application d'un segment de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$) que d'une courbe (plus simple mais plus compliqué à apprivoiser dans un premier temps). C'est un choix, on peut tout à fait faire un cours d'analyse complexe en ne parlant que de chemins (mais, en général, même si on ne le mentionne pas explicitement, on a quand même tendance à ne pas toujours préciser de paramétrage, ce qui revient à parler de courbes...).

Par contre, **il sera extrêmement important de savoir donner un paramétrage d'une courbe simple**.

Remarque 4.11. Soient $\gamma_0 : [a_0, b_0] \to \mathbb{C}$ un chemin et $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ (avec $a_0 < b_0$ et $a < b$). Alors il existe un chemin $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ équivalent à γ_0. Il suffit de considérer

$$\gamma : t \in [a, b] \mapsto \gamma_0 \left(a_0 + (t - a)\frac{b_0 - a_0}{b - a} \right). \tag{4.7}$$

Ainsi, étant donnée une courbe Γ et un segment $[a, b]$, il existe toujours un paramétrage γ de Γ dont le domaine de définition est $[a, b]$.

Définition 4.12. Soient $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{C}$ et $\gamma_2 : [b, c] \to \mathbb{C}$ deux chemins tels que $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. On appelle *concaténation* de γ_1 et γ_2 le chemin γ obtenu en posant, pour $t \in [a, c]$,

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{si } t \in [a, b], \\ \gamma_2(t) & \text{si } t \in [b, c]. \end{cases}$$

On pourra noter $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2$.

Remarque 4.13. On note que cette définition se restreint aux chemins γ_1 et γ_2 tels que l'extrémité droite du domaine de définition de γ_1 coïncide avec l'extrémité gauche du domaine de définition de γ_2. C'est dommage, puisqu'on a vu que les domaines de définition des chemins n'avaient aucune importance. Ainsi, quand cette condition « technique » n'est pas vérifiée, on peut toujours reparamétrer l'un des chemins comme en (4.7). Cela revient, qu'on le dise explicitement ou non, à considérer des courbes plutôt que des chemins. Ainsi, étant données deux courbes Γ_1 et Γ_2, on appelle concaténation de Γ_1 et Γ_2 et on note $\Gamma_1 * \Gamma_2$ la courbe Γ dont l'un des paramétrages est le chemin γ défini comme à la définition 4.12, où γ_1 et γ_2 sont des paramétrages de Γ_1 et Γ_2 définis sur $[0, 1]$ et $[1, 2]$, respectivement.

On observe qu'un chemin peut toujours être vu comme concaténation d'un nombre fini de chemins de classe C^1.

Exemple 4.14. On utilisera au paragraphe suivant des lacets triangulaires. Pour $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ on note

$$T(z_1, z_2, z_3) = S(z_1, z_2) * S(z_2, z_3) * S(z_3, z_1),$$

où $S(z_j, z_k)$ est la courbe correspondant au chemin $\sigma(z_j, z_k)$. On est déjà dans un cas où la Définition 4.12 ne s'applique pas stricto sensu avec les chemins $\sigma(z_i, z_j)$. Il faut donc considérer les segments à reparamétrage près, c'est-à-dire les courbes correspondantes. Ainsi, un paramétrage possible de $T(z_1, z_2, z_3)$ est $\tau(z_1, z_2, z_3) : [0, 3] \to \mathbb{C}$ tel que

$$\tau(z_1, z_2, z_3)(s) = \begin{cases} z_1 + s(z_2 - z_1) & \text{si } s \in [0, 1], \\ z_2 + (s - 1)(z_3 - z_2) & \text{si } s \in [1, 2], \\ z_3 + (s - 2)(z_1 - z_3) & \text{si } s \in [2, 3]. \end{cases}$$

Proposition 4.15. *Soient γ_1, γ_2 et γ comme à la définition 4.12. Alors pour toute fonction f continue sur un voisinage de* $\mathrm{Im}(\gamma)$ *on a*

$$\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f.$$

Démonstration. C'est une simple application de la relation de Chasles pour les intégrales sur un segment de $\mathbb{R}$. □

Exemple 4.16. On considère le chemin $\gamma_{\boxdot}$ défini par

$$\gamma_{\boxdot} = \sigma(1 - i, 1 + i) * \sigma(1 + i, -1 + i) * \sigma(-1 + i, -1 - i) * \sigma(-1 - i, 1 - i).$$

Son image est le carré reliant (dans cet ordre) les points $1-i$, $1+i$, $-1+i$ et $-1-i$. On a alors

$$\int_{\gamma_\boxdot} \frac{dz}{z} = \int_{\sigma(1-i,1+i)} \frac{dz}{z} + \int_{\sigma(1+i,-1+i)} \frac{dz}{z} + \int_{\sigma(-1+i,-1-i)} \frac{dz}{z} + \int_{\sigma(-1-i,1-i)} \frac{dz}{z}. \tag{4.8}$$

Le calcul de la première intégrale donne

$$\begin{aligned}\int_{\sigma(1-i,1+i)} \frac{dz}{z} &= 2i\int_0^1 \frac{1}{1-i+2it}\,dt = \int_0^1 \frac{2i+2(2t-1)}{1+(2t-1)^2}\,dt\\ &= i\int_{-1}^1 \frac{1}{1+s^2}ds + \int_0^1 \frac{2(2t-1)}{1+(2t-1)^2}\,dt\\ &= [i\arctan(s)]_{-1}^1 + \left[\ln(1+(2t-1)^2)\right]_0^1\\ &= \frac{i\pi}{2}.\end{aligned}$$

On peut vérifier que les trois autres termes de (4.8) valent également $\frac{i\pi}{2}$, de sorte que

$$\int_{\gamma_\boxdot} \frac{dz}{z} = 2i\pi.$$

Définition 4.17. La *longueur* d'un chemin $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}^1$ de classe C^1 est

$$\mathsf{Long}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt.$$

En général, avec les notations de la Définition 4.1 on pose

$$\mathsf{Long}(\gamma) = \sum_{k=1}^n \int_{a_{k-1}}^{a_k} |\gamma'(t)|\,dt.$$

Proposition 4.18. (i) *Deux chemins équivalents ou opposés ont même longueur.*

(ii) *Soient γ_1 et γ_2 deux chemins comme à la Définition 4.12. Alors on a*

$$\mathsf{Long}(\gamma) = \mathsf{Long}(\gamma_1) + \mathsf{Long}(\gamma_1).$$

Démonstration. La seconde propriété est à nouveau une simple application de la relation de Chasles. On montre la première. Soient γ_1, γ_2 et φ comme à la Définition 4.6. On a

$$\mathsf{Long}(\gamma_1) = \mathsf{Long}(\gamma_2\circ\varphi) = \int_{a_1}^{b_1} |\gamma_2'(\varphi(t))|\,|\varphi'(t)|\,dt.$$

Si φ est croissante on a

$$\mathsf{Long}(\gamma_1) = \int_{a_1}^{b_1} |\gamma_2'(\varphi(t))|\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a_1)}^{\varphi(b_1)} |\gamma_2'(s)|\,ds = \int_{a_2}^{b_2} |\gamma_2'(s)|\,ds = \mathsf{Long}(\gamma_2).$$

Et si φ est décroissante on a

$$\mathsf{Long}(\gamma_1) = -\int_{a_1}^{b_1} |\gamma_2'(\varphi(t))|\,\varphi'(t)\,dt = -\int_{\varphi(a_1)}^{\varphi(b_1)} |\gamma_2'(s)|\,ds = -\int_{b_2}^{a_2} |\gamma_2'(s)|\,ds = \mathsf{Long}(\gamma_2).$$

□

Puisque la longueur d'un chemin ne dépend pas du choix du paramétrage, on peut donc parler sans ambiguïté de la longueur d'un courbe.

Exemple 4.19. Soit $\theta \in]0,2\pi[$. La longueur de l'arc de cercle unité joignant 1 à $e^{i\theta}$ (que l'on peut paramétrer par e^{is} pour $s\in[0,\theta]$) est

$$\int_0^\theta \left|ie^{is}\right|\,ds = \theta.$$

Cet exemple est important car on a (ré)introduit la notion d'argument (c'est-à-dire d'angle) d'un point de vue purement analytique, mais on voit ici que c'est bien cohérent avec la définition géométrique d'origine.

Proposition 4.20. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, f une fonction continue sur Ω, et $\gamma : [a,b] \to \Omega$ un chemin. Alors on a*

$$\left| \int_\gamma f \right| \leqslant \mathsf{Long}(\gamma) \sup_{\mathrm{Im}(\gamma)} |f| .$$

Démonstration. On a

$$\left| \int_\gamma f \right| \leqslant \int_a^b |f(\gamma(t))| \, |\gamma'(t)| \, dt \leqslant \sup_{\mathrm{Im}(\gamma)} |f| \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt = \sup_{\mathrm{Im}(\gamma)} |f| \, \mathsf{Long}(\gamma).$$

□

Proposition 4.21. *Soient $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $\mathrm{Im}(\gamma)$ qui converge uniformément vers une fonction f. Alors f est continue sur $\mathrm{Im}(\gamma)$ et on a*

$$\int_\gamma f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_\gamma f.$$

Remarque 4.22. Toutes les définitions et résultats de ce paragraphe sont évidemment les mêmes que pour les intégrales curvilignes de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

***Exercice* 8.** On note T le triangle reliant points 0, 1 et i, orienté dans le sens direct. Calculer

$$\int_T z \, dz \quad \text{et} \quad \int_T \overline{z} \, dz.$$

4.2 Intégrales et primitives

Le but de ce paragraphe est de faire le lien entre primitives et intégrales. On rappelle que pour une fonction f continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$:

- on prouve que f admet une primitive en considérant, pour n'importe quel $x_0 \in I$, la fonction
$$x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) \, dt, \tag{4.9}$$
- inversement, si on connait une primitive F de f sur I, alors on peut l'utiliser pour calculer des intégrales de f : pour tous $a, b \in I$ le théorème fondamental de l'analyse s'écrit
$$\int_a^b f(t) \, dt = F(b) - F(a). \tag{4.10}$$

Puisque les intégrales le long de chemins de $\mathbb{C}$ ne sont rien d'autre que des intégrales sur des segments de $\mathbb{R}$, on peut espérer généraliser ces deux idées. La seconde est vraie et ne posera aucune difficulté. Par contre la construction d'une primitive est plus subtile et fera intervenir la topologie du domaine Ω sur lequel on cherche une primitive, problème qui ne se pose pas sur un intervalle de $\mathbb{R}$.

Proposition 4.23. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction continue de Ω dans $\mathbb{C}$. On suppose que f admet une primitive F sur Ω. Alors pour tout chemin $\gamma : [a,b] \to \Omega$ on a*

$$\int_\gamma f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

En particulier, l'intégrale sur un lacet d'une fonction continue admettant une primitive est nulle.

Démonstration. Dans le cas où γ est de classe C^1 on écrit simplement

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) \, dt = \int_a^b \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) \, dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Le cas général s'obtient en découpant l'intégrale comme en (4.6) et en appliquant cette égalité à chaque terme. □

Remarque 4.24. D'après les Exemples 4.5, la fonction $z \mapsto 1/z$ n'admet une primitive sur aucun ouvert contenant le cercle unité.

On a motivé la Proposition 4.23 comme moyen pratique de calculer une intégrale si on connait une primitive de la fonction intégrée. Mais ce résultat va bien au delà. Car même si on ne connaît pas la primitive de f, il dit déjà que l'intégrale de f le long d'un chemin ne dépend que des points de départ et d'arrivée. En particulier, le fait que l'intégrale d'une fonction qui admet une primitive soit automatiquement nulle sur un lacet (sans que l'on ne sache rien sur cette primitive) sera crucial dans les discussions qui vont suivre.

Cela motive la suite du paragraphe, où l'on cherche à montrer qu'une fonction admet une primitive. On se contente ici de considérer des fonctions sur des ouverts étoilés de $\mathbb{C}$. L'intérêt est d'avoir un point z_0 à partir duquel on peut atteindre n'importe quel point de Ω par un segment, et ce afin de définir l'analogue de (4.9).

Proposition 4.25 (Critère d'existence d'une primitive dans un ouvert étoilé)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ étoilé par rapport à un point z_0. Soit f une fonction continue de Ω dans $\mathbb{C}$. On suppose que l'intégrale de f le long de tout chemin triangulaire inclus dans Ω et dont z_0 est un sommet est nulle. Alors f admet une primitive. En particulier, l'intégrale de f sur tout lacet de Ω est nulle.*

Démonstration. Pour $z \in \Omega$ on pose

$$F(z) = \int_{\sigma(z_0,z)} f(\zeta)\,d\zeta.$$

Cette intégrale est bien définie car le segment $[z_0, z]$ est inclus dans Ω pour tout $z \in \Omega$. On fixe $z \in \Omega$. Pour $h \in \mathbb{C}^*$ assez petit on a $z + h \in \Omega$. L'hypothèse sur f assure alors que

$$\begin{aligned}
\frac{F(z+h)-F(z)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int_{\sigma(z_0,z+h)} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{\sigma(z_0,z)} f(\zeta)\,d\zeta\right)\\
&= \frac{1}{h}\int_{\sigma(z,z+h)} f(\zeta)\,d\zeta\\
&= \int_0^1 f(z+th)\,dt.
\end{aligned}$$

Par continuité de f en z on obtient en passant à la limite sous l'intégrale

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f(z).$$

Cela prouve que f est dérivable en z de dérivée $F'(z) = f(z)$. □

Remarque 4.26. Souvent, pour simplifier l'énoncé, on suppose que l'intégrale de f est nulle sur tout chemin triangulaire entourant un domaine inclus dans Ω, voire que Ω est convexe.

4.3 Théorème de Cauchy

On cherche dans ce paragraphe une condition suffisante pour qu'une fonction holomorphe admette une primitive. Cela donnera aux fonctions holomorphes toutes les bonnes propriétés évoquées au paragraphe précédent. Mais pas seulement. Voir une fonction holomorphe comme la dérivée d'une autre fonction aura des conséquences inattendues mais cruciales par la suite.

La Proposition 4.25 motive le résultat suivant (on rappelle que les chemins triangulaires ont été introduits à l'Exemple 4.14) :

Lemme 4.27 (Lemme de Goursat)**.** *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur Ω. Alors pour tous $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que le triangle plein de sommets a, b et c est inclus dans Ω on a*

$$\int_{\tau(a,b,c)} f = 0.$$

Par triangle plein on n'entend pas seulement les trois segments joignant a, b et c, mais également la région qu'ils délimitent.

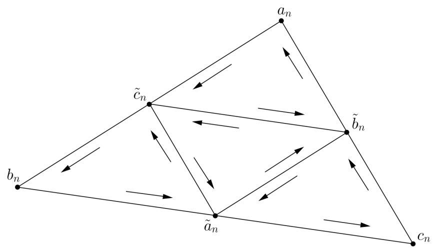

Figure 2 – Chemins triangulaires pour le Lemme de Goursat

Démonstration. On note $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $c_0 = c$ et on construit une suite de chemins triangulaires $\tau_n = \tau(a_n, b_n, c_n)$ de la façon suivante. On suppose avoir construit τ_n. On note alors $\tilde{a}_n = (b_n + c_n)/2$, $\tilde{b}_n = (c_n + a_n)/2$ et $\tilde{c}_n = (a_n + b_n)/2$ (voir Figure 2). On a alors

$$\int_{\tau(a_n,b_n,c_n)} f(z)\,dz = \int_{\tau(a_n,\tilde{c}_n,\tilde{b}_n)} f(z)\,dz + \int_{\tau(b_n,\tilde{a}_n,\tilde{c}_n)} f(z)\,dz + \int_{\tau(c_n,\tilde{b}_n,\tilde{a}_n)} f(z)\,dz + \int_{\tau(\tilde{a}_n,\tilde{b}_n,\tilde{c}_n)} f(z)\,dz.$$

D'après l'inégalité triangulaire, parmi les quatre triplets $(a_n, \tilde{c}_n, \tilde{b}_n)$, $(\tilde{c}_n, b_n, \tilde{a}_n)$, $(\tilde{b}_n, \tilde{a}_n, c_n)$ et $(\tilde{b}_n, \tilde{c}_n, \tilde{a}_n)$ il en existe au moins un, que l'on notera $(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1})$, tel que si on note $\tau_{n+1} = \tau(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1})$ on a

$$\left|\int_{\tau_n} f(z)\,dz\right| \leqslant 4\left|\int_{\tau_{n+1}} f(z)\,dz\right|.$$

D'autre part, le bon vieux Théorème de Thalès (ou un calcul direct facile mais pénible) assure que

$$\mathsf{Long}(\tau_{n+1}) = \frac{\mathsf{Long}(\tau_n)}{2}.$$

En outre, puisque a_{n+1} est égal à a_n, $\tilde{b}_n$ ou $\tilde{c}_n$, on a

$$|a_{n+1} - a_n| \leqslant \frac{1}{2}\max(|b-a|, |c-a|) \leqslant \mathsf{Long}(\tau_{n+1}). \tag{4.11}$$

Par récurrence on obtient alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\left|\int_{\tau_0} f(z)\,dz\right| \leqslant 4^n\left|\int_{\tau_n} f(z)\,dz\right| \tag{4.12}$$

et

$$\mathsf{Long}(\tau_n) = \frac{\mathsf{Long}(\tau_0)}{2^n}. \tag{4.13}$$

Avec (4.11) et (4.13) on obtient que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Puisque $\mathbb{C}$ est complet, elle converge donc vers une limite qu'on note z_0. D'après (4.13), b_n et c_n convergent également vers z_0 quand n tend vers $+\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est holomorphe en z_0, il existe $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset \Omega$ et pour tout $z \in D(z_0, r)$ on a

$$|f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)| \leqslant \varepsilon\,|z - z_0|.$$

On fixe alors $n \in \mathbb{N}$ tel que a_n, b_n et c_n sont dans $D(z_0, r)$. Puisque la fonction $z \mapsto f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0)$ admet une primitive sur Ω on a

$$\left|\int_{\tau_n} f(z)\,dz\right| = \left|\int_{\tau_n} \big(f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)\big)\,dz\right| \leqslant \varepsilon\,\mathsf{Long}(\tau_n) \sup_{z\in\mathrm{Im}(\tau_n)} |z - z_0|.$$

On rappelle que le diamètre d'un triangle est inférieur ou égal à son demi-périmètre . En effet, si $T \subset \mathbb{C}$ est un triangle, alors pour tout $a, b \in T$ il existe $\tilde{a}, \tilde{b} \in \partial T$ tels que $|a-b| \leqslant |\tilde{a}-\tilde{b}|$, et par l'inégalité triangulaire, la distance entre $\tilde{a}$ et $\tilde{b}$ est inférieure ou égale au demi-périmètre de T (il y a deux chemins qui joignent $\tilde{a}$ à $\tilde{b}$ en suivant le bord, et la somme des longueurs de ces deux chemins est égale au périmètre, donc l'un des deux au moins à une longueur inférieure ou égale au demi-périmètre). Cela donne

$$\left|\int_{\tau_n} f(z)\,dz\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\mathsf{Long}(\tau_n)^2,$$

et donc, avec (4.12) et (4.13),

$$\left|\int_{\tau_0} f(z)\,dz\right| \leqslant 4^n \left|\int_{\tau_n} f(z)\,dz\right| \leqslant \frac{4^n\varepsilon}{2}\mathsf{Long}(\tau_n)^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\mathsf{Long}(\tau_0)^2.$$

Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien

$$\int_{\tau_0} f(z)\,dz = 0.$$

□

On a maintenant tous les ingrédients pour montrer le théorème suivant :

Théorème 4.28 (Théorème de Cauchy dans un ouvert étoilé)**.** *Soient Ω un ouvert étoilé de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur Ω. Alors f admet une primitive sur Ω et pour tout lacet γ de Ω on a*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Démonstration. Soit $z_0 \in \Omega$ tel que Ω est étoilé par rapport à z_0. D'après le Lemme de Goursat, l'intégrale de f le long de tout chemin triangulaire est nulle. D'après la Proposition 4.25, on en déduit que f admet une primitive sur Ω. La deuxième assertion est alors conséquence de la Proposition 4.23. □

4.4 Indice d'un chemin fermé

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On considère sur $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ une fonction holomorphe f définie par

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{N} a_n (z-z_0)^n,$$

avec $N \in \mathbb{N}$ et $a_{-N}, \dots, a_N \in \mathbb{C}$. On s'intéresse à l'intégrale de f sur un lacet γ (dont l'image est incluse dans $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. On a vu à l'Exemple 1.13 (que l'on peut adapter facilement au cas $z_0 \neq 0$) que pour $n \neq -1$ le terme $a_n(z-z_0)^n$ admet une primitive sur $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, donc d'après la Proposition 4.23 ces termes sont d'intégrales nulles le long du lacet γ. Par linéarité de l'intégrale on a alors

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{n=-N}^{N} a_n \int_\gamma (z-z_0)^n\,dz = a_{-1}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0}.$$

Même si cette discussion porte a priori sur un cas très particulier de fonction holomorphe, cela suggère que l'intégrale de $(z-z_0)^{-1}$ le long d'un lacet aura un rôle particulier à jouer. Cela suggère la définition suivante :

Définition 4.29. Soient γ un lacet et z_0 un complexe qui n'est pas dans l'image de γ. On définit l'*indice* de z_0 par rapport à γ par

$$\mathsf{Ind}(\gamma, z_0) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0}.$$

Pour comprendre le choix de diviser l'intégrale de $(z-z_0)^{-1}$ par $2i\pi$ dans cette définition, on revient sur les Exemples 4.5 et 4.16, où l'on avait calculé cette intégrale sur des cas particuliers (avec $z_0 = 0$). On observe que pour ces quelques exemples l'intégrale est égale à $2i\pi$ fois le nombre de tours que fait le lacet autour de 0 (comptés positivement dans le sens direct et négativement dans le sens indirect). Ainsi l'indice correspondrait au nombre de tours que fait le lacet autour de z_0. Cette hypothèse est renforcée par le calcul suivant :

Exemple 4.30. On considère un lacet $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}^*$. On suppose que pour tout $t \in [a,b]$ on a $\gamma(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)}$ où $\rho : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$ et $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ sont de classe C^1. Puisque $\gamma(b) = \gamma(a)$ on a nécessairement $\rho(b) = \rho(a)$ et $\theta(b) - \theta(a) = 2k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. On a alors

$$\begin{aligned}\mathsf{Ind}(\gamma, 0) &= \frac{1}{2i\pi}\int_a^b \frac{(\rho'(t) + i\theta'(t)\rho(t))e^{i\theta(t)}}{\rho(t)e^{i\theta(t)}}\,dt\\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_a^b \left(\frac{\rho'(t)}{\rho(t)} + i\theta'(t)\right)dt\\ &= \frac{1}{2i\pi}\left[\ln\big(\rho(t)\big) + i\theta(t)\right]_a^b\\ &= k.\end{aligned}$$

En particulier, on retrouve bien les résultats calculés aux Exemples 4.5.

Revenons au cas $z_0 = 0$. Le lien entre l'intégrale de $1/z$ le long d'un chemin et la rotation de ce chemin autour de 0 n'est évidemment pas un hasard. Si l'image d'un chemin est incluse dans un domaine sur lequel il existe une détermination du logarithme (qui sera alors une primitive de $1/z$), alors d'après la Proposition 4.23 l'intégrale est la variation du logarithme entre les points de départ et d'arrivée du chemin. La partie imaginaire donne donc les variations de l'argument.

Si le chemin n'est pas inclus dans un ouvert sur lequel existe une détermination du logarithme, on peut toujours le diviser et le voir comme la concaténation de plusieurs chemins qui vérifient eux cette propriété. En sommant les différentes variations de l'argument, on retrouve alors la variation totale de l'argument sur l'ensemble du chemin. En prenant la partie réelle de l'intégrale, on obtient de la même façon les variations (du logarithme népérien) du module le long du chemin.

Pour un lacet, puisque les points de départ et d'arrivée coïncident, les variations du module s'annulent. Ce n'est pas le cas pour l'argument. La variation de l'argument le long d'un lacet doit être un multiple de 2π, mais elle n'est pas forcément nulle. On remarque en particulier que l'argument d'un complexe est défini modulo 2π, mais les variations continues de l'argument le long d'un chemin sont bien déterminées (le multiple arbitraire de 2π disparait quand on soustrait les valeurs à l'arrivée et au départ).

Toute cette discussion est formalisée dans ce qui suit :

Proposition 4.31. *Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ un chemin. Pour $t \in [a,b]$ on note γ_t la restriction de γ à $[a,t]$. Soit $\ell_a \in \mathbb{C}$ tel que $\gamma(a) - z_0 = e^{\ell_a}$. Pour $t \in [a,b]$ on note*

$$\ell(t) = \ell_a + \int_{\gamma_t} \frac{1}{z - z_0}\,dz = \ell_a + \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0}\,ds.$$

Cela définit une fonction continue et C^1 par morceaux telle que pour tout $t \in [a,b]$ on a

$$\gamma(t) - z_0 = \exp(\ell(t)). \tag{4.14}$$

Si pour $t \in [a,b]$ on note $\theta(t) = \mathrm{Im}(\ell(t))$ alors θ est continue et C^1 par morceaux et pour tout $t \in [a,b]$ on a

$$\gamma(t) - z_0 = |\gamma(t) - z_0|\, e^{i\theta(t)}. \tag{4.15}$$

Démonstration. On note X l'ensemble (fini) des points de $[a,b]$ où γ n'est pas dérivable. Puisque γ' est continue par morceaux (en lui ayant donné une valeur arbitraire sur X), la fonction ℓ est bien continue et C^1 par morceaux sur $[a,b]$. En outre pour $t \in [a,b] \setminus X$ on a

$$\frac{d}{dt}\big((\gamma(t) - z_0)e^{-\ell(t)}\big) = 0.$$

Puisque cette fonction est par ailleurs continue, elle est constante, et donc égale à sa valeur en a, c'est-à-dire 1. Cela prouve (4.14). En prenant le module dans cette égalité on obtient que

$$|\gamma(t) - z_0| = \exp(\mathrm{Re}(\ell(t))),$$

ce qui donne (4.15). □

Remarque 4.32. On note que la fonction ℓ de la Proposition 4.31 fournit en quelque sorte une détermination du logarithme le long du chemin γ. Mais cela ne donne pas forcément une détermination du logarithme sur l'image de γ. En effet, il se peut que le chemin γ passe deux fois par le même point mais que ℓ y prenne deux valeurs différentes. Par exemple, il n'y a pas de détermination du logarithme sur un ouvert contenant le cercle unité. Par contre, si on considère le chemin $\gamma : t \in [0, 2\pi] \mapsto e^{it}$, alors la fonction $\ell : t \mapsto it$ vérifie bien que $\gamma(t) = \exp(\ell(t))$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$.

La variation totale est bien égale à 2π fois le nombre de tours que fait γ autour de z_0, et c'est bien ce nombre de tours que représente l'indice. Cette interprétation permettra de connaître immédiatement l'indice d'un lacet par rapport à un point dans tous les cas simples. On donne maintenant les principales propriétés de cet indice :

Proposition 4.33. (i) *Pour tout* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$ *on a* $\mathsf{Ind}(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$.

(ii) *La fonction* $z \mapsto \mathsf{Ind}(\gamma, z)$ *est constante sur chaque composante connexe de* $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$.

(iii) *Pour tout* z *dans la composante connexe non bornée de* $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$ *on a* $\mathsf{Ind}(\gamma, z) = 0$.

Démonstration. On reprend les notations de la Proposition 4.31 et de sa preuve. On a $\ell(b) - \ell(a) = 2i\pi \mathsf{Ind}(\gamma, z_0)$. Mais $e^{\ell(a)} = \gamma(a) = \gamma(b) = e^{\ell(b)}$, donc $\ell(b) - \ell(a)$ est un multiple de $2i\pi$, et donc $\mathsf{Ind}(\gamma, z_0)$ est entier.

Par continuité sous l'intégrale (pour une intégrale sur un segment de $\mathbb{R}$), on obtient que la fonction $z \mapsto \mathsf{Ind}(\gamma, z)$ est continue. Puisqu'elle est à valeurs dans un ensemble discret, elle est constante sur chaque composante connexe de son domaine de définition.

Enfin, par passage à la limite sous l'intégrale on obtient que

$$\mathsf{Ind}(\gamma, z) \xrightarrow[|z| \to +\infty]{} 0.$$

Cela implique que l'indice de γ s'annule sur toute la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$. □

4.5 Formule de Cauchy dans un ouvert étoilé

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On considère la somme f d'une série entière centrée en z_0, de rayon de convergence $R > 0$:

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n.$$

Soit γ un lacet dont l'image est incluse dans $D(z_0, R)$. Comme l'image de γ est un compact de $D(z_0, R)$, la convergence de cette série y est uniforme. On peut donc calculer

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz = \int_\gamma \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (z - z_0)^{n-1} \, dz = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \int_\gamma (z - z_0)^{n-1} \, dz = 2i\pi \, a_0 \mathsf{Ind}(\gamma, z_0),$$

soit

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz = f(z_0) \, \mathsf{Ind}(\gamma, z_0). \tag{4.16}$$

Le but de ce paragraphe est de généraliser cette égalité à toute fonction holomorphe. Pour cela, on pourrait imaginer montrer que toute fonction holomorphe est analytique. La progression est en fait inverse. On va d'abord généraliser cette formule à toute fonction holomorphe, puis en déduire qu'une fonction holomorphe est analytique.

Lemme 4.34 (Lemme de Goursat, version évoluée)**.** *Soient* Ω *un ouvert de* $\mathbb{C}$ *et* f *une fonction continue sur* Ω *et holomorphe sur* $\Omega \setminus \{\omega_0\}$ *pour un certain* $\omega_0 \in \Omega$*. Alors pour tous* a, b, c *tel que le triangle plein de sommets* a*,* b *et* c *est inclus dans* Ω *on a*

$$\int_{\tau(a,b,c)} f = 0.$$

Démonstration. On note T le triangle de sommets a, b et c. Si ω_0 n'est pas dans T alors f est holomorphe sur un voisinage ouvert de T et le résultat est conséquence du Lemme 4.27. On suppose maintenant que ω_0 est l'un des sommets du triangle, par exemple $\omega_0 = a$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note

$$b_n = a + \frac{b-a}{n} \quad \text{et} \quad c_n = a + \frac{c-a}{n}.$$

On a alors

$$\int_{\tau(a,b,c)} f(z)\,dz = \int_{\tau(a,b_n,c_n)} f(z)\,dz + \int_{\tau(b_n,b,c_n)} f(z)\,dz + \int_{\tau(c_n,b,c)} f(z)\,dz.$$

On peut appliquer le Lemme 4.27 aux deux derniers termes qui sont donc nuls. D'autre part, la fonction f est continue en a, donc il existe $r > 0$ et $M \geqslant 0$ tels que $D(a,r) \subset \Omega$ et $|f(z)| \leqslant M$ pour tout $z \in D(a,r)$. Pour n assez grand on a $\operatorname{Im}(\tau(a,b_n,c_n)) \subset D(a,r)$ donc d'après la proposition 4.20 on a

$$\left| \int_{\tau(a,b,c)} f(z)\,dz \right| = \left| \int_{\tau(a,b_n,c_n)} f(z)\,dz \right| \leqslant M\,|\tau(a,b_n,c_n)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Cela prouve le lemme dans le cas où ω_0 est un sommet du triangle. Dans le cas général on écrit que

$$\int_{\tau(a,b,c)} f(z)\,dz = \int_{\tau(a,b,\omega_0)} f(z)\,dz + \int_{\tau(b,c,\omega_0)} f(z)\,dz + \int_{\tau(c,a,\omega_0)} f(z)\,dz$$

et on applique le cas précédent à chacun des termes du membre de droite pour conclure. □

On peut maintenant généraliser (4.16) :

Théorème 4.35 (Formule de Cauchy dans un ouvert étoilé). *Soient Ω un ouvert étoilé de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur Ω. Soient γ un lacet de Ω et $z_0 \in \Omega \setminus \operatorname{Im}(\gamma)$. Alors on a*

$$f(z_0)\,\mathsf{Ind}(\gamma, z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz.$$

Démonstration. Pour $z \in \Omega$ on pose

$$h(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & \text{si } z \neq z_0, \\ f'(z_0) & \text{si } z = z_0. \end{cases}$$

Cela définit une fonction continue sur Ω et holomorphe sur $\Omega \setminus \{z_0\}$. D'après le Lemme 4.34, la Proposition 4.25 et la Proposition 4.23, l'intégrale de h sur tout lacet de Ω est nulle. On a alors

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z_0)}{z - z_0}\,dz = f(z_0)\,\mathsf{Ind}(\gamma, z_0).$$ □

Ce résultat est extrêment fort. En effet, si γ décrit le bord d'un ouvert $\tilde{\Omega}$, ce théorème dit que l'on connait la valeur de f dans tout $\tilde{\Omega}$ si on connait sa valeur au bord. Dans le cas où $\tilde{\Omega}$ est un disque centré en z_0 cela donne l'égalité suivante :

Corollaire 4.36 (Formule de la moyenne). *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur Ω. Soient $z_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$. On a*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\,d\theta.$$

Démonstration. On applique la formule de Cauchy en z_0 en prenant comme lacet le cercle de centre z_0, de rayon r, et orienté dans le sens trigonométrique. □

Remarque 4.37. La formule de la moyenne n'explicite que la valeur de f au centre du disque $D(z_0, r)$, mais le Théorème de Cauchy donne bien la valeur de f en tout point du disque à partir des valeurs qu'elle prend sur le bord $C(z_0, r)$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{z_0 + re^{i\theta} - z} re^{i\theta}\,d\theta.$$

4.6 Principe du maximum

Dans ce paragraphe on déduit de la formule de la moyenne une autre propriété surprenante des fonctions holomorphes (et c'est loin d'être fini !).

Théorème 4.38 (Principe du maximum)**.** *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur Ω. Soient $z_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tels que $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$. Alors on a*

$$|f(z_0)| \leqslant \sup_{z \in C(z_0,r)} |f(z)|,$$

avec égalité si et seulement si f est constante sur $\overline{D}(z_0, r)$. En particulier, la fonction $|f|$ n'admet pas de maximum local strict, et pas de minimum local strict non nul.

Démonstration. L'inégalité se déduit directement de la formule de la moyenne (Corollaire 4.36) et de l'inégalité triangulaire pour une intégrale. On suppose maintenant qu'il y a égalité.

Montrons que $f(z_0 + re^{i\theta}) = f(z_0)$ pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$. Si $f(z_0) = 0$ c'est clair. Sinon, quitte à diviser f par $f(z_0)$, on peut supposer que $f(z_0) = 1$, et donc que $f(z_0+re^{i\theta}) \in \overline{D}(0, 1)$ pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$. On a alors, toujours par la formule de la moyenne,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\big(f(z_0 + re^{i\theta}) - 1\big)\, d\theta = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta\right) - 1 = f(z_0) - 1 = 0.$$

Puisque f est continue et que $\operatorname{Re}\big(f(z_0 + re^{i\theta}) - 1\big) \leqslant 0$ pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, cela implique que $\operatorname{Re} f(z_0 + re^{i\theta}) = 1$ et donc $f(z_0 + re^{i\theta}) = 1$ pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$.

Soit maintenant $z \in D(z_0, r)$. D'après la formule de Cauchy appliqué sur le disque $C(z_0, r)$ orienté dans le sens direct on a

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{c(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{f(z_0)}{2i\pi}\int_{c(z_0,r)} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = f(z_0).$$

D'où f est constante sur $D(z_0, r)$.

On déduit que $|f|$ ne peut pas avoir de maximum local strict. Par ailleurs, si $f(z_0) \neq 0$ alors f ne s'annule pas au voisinage de z_0 et $1/f$ est holomorphe sur ce voisinage. D'après ce qui précède, $1/|f|$ n'admet pas de maximum local strict en z_0, donc $|f|$ n'admet pas de minimum local strict en z_0. □

En guise de corrolaire, on donne une autre version (version « globale ») du principe du maximum :

Théorème 4.39 (Principe du maximum)**.** *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}$. Soit f une fonction continue sur $\overline{\Omega}$ holomorphe sur Ω. Alors on a*

$$\max_{z \in \overline{\Omega}} |f(z)| = \max_{x \in \partial\Omega} |f(z)|.$$

Démonstration. On commence par observer que ces deux maximums sont bien définis car f est continue sur le compact $\overline{\Omega}$ et donc sur le compact $\partial\Omega$. Soit $z_0 \in \overline{\Omega}$ tel que

$$|f(z_0)| = \max_{z \in \overline{\Omega}} |f(z)|.$$

Si $z_0 \in \partial_\Omega$ alors le résultat est vrai. On suppose que $z_0 \in \Omega$. En particulier $|f|$ admet un maximum local en z_0, donc d'après le Théorème 4.38 la fonction f est constante. Dans ce cas le résultat est également vrai. □

5 Analycité des fonctions holomorphes - Applications

5.1 Analycité des fonctions holomorphes

Jusqu'à présent on a étudié séparément les fonctions analytiques et les fonctions holomorphes. L'analyticité est a priori une propriété beaucoup plus forte que la dérivabilité, et en particulier une fonction analytique est holomorphe. On a déjà démontré un certain nombre de propriétés qui montrent que dans le cas complexe la dérivabilité est déjà une propriété très rigide. On montre maintenant que toutes les fonctions holomorphes sont en fait analytiques.

Théorème 5.1. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur Ω. Alors f est analytique sur Ω. Plus précisément, pour $z_0 \in \Omega$ et $R = \mathsf{dist}(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega)$ (rayon du plus grand disque ouvert centré en z_0 et inclus dans Ω), la série entière*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

a un rayon de convergence au moins égal à R et sa somme vaut $f(z)$ sur $D(z_0, R)$. En outre pour $n \in \mathbb{N}$ et $r \in]0, R[$ on a

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-in\theta}\, d\theta.$$

Démonstration. Soit $r \in]0, R[$. Le disque fermé $\overline{D}(z_0, r)$ est inclus dans Ω et pour tout $z \in D(z_0, r)$ on a, par la formule de Cauchy (voir Remarque 4.37),

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{(z_0 + re^{i\theta}) - z} re^{i\theta}\, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{1 - \frac{z - z_0}{re^{i\theta}}}\, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} (z - z_0)^n r^{-n} e^{-in\theta} \right) d\theta. \end{aligned}$$

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (z - z_0)^n r^{-n} e^{-in\theta}$ converge uniformément sur $[0, 2\pi]$ et la fonction $\theta \mapsto f(z_0 + re^{i\theta})$ est continue et donc bornée sur ce segment. On peut donc échanger l'intégrale et la somme, ce qui donne

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(r)(z - z_0)^n,$$

où pour $n \in \mathbb{N}$ on a noté

$$a_n(r) = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-in\theta}\, d\theta.$$

L'unicité du développement en série entière et la Proposition 2.31 assurent que $a_n(r)$ ne dépend pas de r et vaut $f^{(n)}(z_0)/(n!)$, ce qui conclut la démonstration. □

Dérivabilité et analycité sont donc deux notions équivalentes pour les fonctions d'une variable complexe.

Une fonction dérivable hérite donc de toutes les proprétés de régularité des fonctions analytiques. D'après la proposition 2.31, elles sont donc en particulier indéfiniment dérivables :

Corollaire 5.2. *Une fonction dérivable au sens complexe est de classe C^∞.*

La différence avec le cas réel, où l'ensemble des fonctions dérivables est beaucoup, beaucoup plus grand que l'ensemble des fonctions analytiques (voir Paragraphe 2.5), est évidemment spectaculaire.

Dans la suite il n'y aura plus lieu de distinguer les fonctions holomorphes et les fonctions analytiques. On parlera plutôt de fonctions holomorphes, mais les deux termes sont interchangeables.

Il reste beaucoup de propriétés surprenantes à montrer pour cette classe de fonctions.

5.2 Zéros des fonctions holomorphes

Puisqu'une fonction holomorphe est analytique, elle vérifie toutes les propriétés déjà démontrées pour les fonctions analytiques, et en particulier le principe des zéros isolés vu au Paragraphe 2.4. Ainsi, les théorèmes 2.36 et 2.40 peuvent être énoncés en remplaçant l'hypothèse d'analycité par l'hypothèse équivalente d'holomorphie :

Théorème 5.3 (Principe des zéros isolés). *Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe non identiquement nulle sur Ω. Alors l'ensemble des points où f s'annule est discret (tout zéro de f est isolé).*

Théorème 5.4 (Principe du prolongement holomorphe). *Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur Ω. Soit $\tilde{\Omega}$ un ouvert contenant Ω. Alors f admet au plus un prolongement holomorphe sur $\tilde{\Omega}$.*

On a défini l'ordre de multiplicité d'un zéro d'une fonction analytique, et donc d'une fonction holomorphe. Cette définition peut se ré-écrire de la façon suivante.

Proposition 5.5. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, f une fonction holomorphe sur Ω et $z_0 \in \Omega$. Alors f admet en z_0 un zéro d'ordre $m \in \mathbb{N}^*$ si et seulement s'il existe une fonction $\tilde{f}$ holomorphe sur Ω et ne s'annulant pas en z_0 telle que pour tout $z \in \Omega$ on a*

$$f(z) = (z - z_0)^m \tilde{f}(z).$$

Démonstration. On considère $R > 0$ tel que $D(z_0, R) \subset \Omega$. On suppose qu'il existe une fonction $\tilde{f}$ comme dans l'énoncé. Comme $\tilde{f}$ est analytique, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $z \in D(z_0, R)$ on a

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n (z - z_0)^n.$$

En outre $a_0 = \tilde{f}(z_0) \neq 0$. On a alors

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n (z - z_0)^{m+n}.$$

On en déduit que z_0 est un zéro d'ordre m de f.

Inversement, on suppose que z_0 est un zéro d'ordre m de f. Pour $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$ on pose

$$\tilde{f}_1(z) = \frac{f(z)}{(z - z_0)^m}.$$

Cela définit bien une fonction holomorphe sur $\Omega \setminus \{z_0\}$. D'autre part il existe une suite $(b_n)_{n\geqslant m}$ telle que pour $z \in D(z_0, R)$ on a

$$f(z) = \sum_{n\geqslant m} b_n (z - z_0)^n.$$

On note alors

$$\tilde{f}_0(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_{n+m} (z - z_0)^n.$$

Cela définit une fonction holomorphe $\tilde{f}_0$ sur $D(z_0, R)$ telle que

$$\tilde{f}_0(z) = \frac{f(z)}{(z - z_0)^m},$$

pour tout $z \in D^*(z_0, R)$. Les fonctions $\tilde{f}_0$ et $\tilde{f}_1$ coïncident donc sur l'intersection des ouverts sur lesquels elles sont définies. On considère alors sur Ω la fonction $\tilde{f}$ telle que

$$\tilde{f} = \begin{cases} \tilde{f}_0(z) & \text{si } z \in D(z_0, R), \\ \tilde{f}_1(z) & \text{si } z \in \Omega \setminus \{z_0\}. \end{cases}$$

Cela définit bien une fonction holomorphe sur Ω telle que $f(z) = (z - z_0)^m \tilde{f}(z)$ pour tout $z \in \Omega$. □

5.3 Estimées de Cauchy - Théorème de Liouville

On poursuit dans ce paragraphe la description des propriétés étonnantes des fonctions holomorphes.

Théorème 5.6. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, f une fonction holomorphe sur Ω, $z_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$. Alors on a*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(z_0 + re^{i\theta}) \right|^2 dt.$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\left| f^{(n)}(z_0) \right| \leqslant \frac{n!}{r^n} \sup_{C(z_0,r)} |f| .$$

Démonstration. Pour $\theta \in [0, 2\pi]$ on a

$$f(z_0 + re^{i\theta}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} r^n e^{in\theta}.$$

L'égalité annoncée résulte donc de l'inégalité de Parseval. L'estimée de $f^{(n)}(z_0)$ suit facilement. □

Théorème 5.7 (Théorème de Liouville)**.** *Une fonction entière bornée est constante.*

Démonstration. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. On suppose qu'il existe $M \geqslant 0$ tel que $|f(z)| \leqslant M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après le théorème 5.6 on a pour tout $r > 0$:

$$\left| f^{(n)}(0) \right| \leqslant \frac{M\, n!}{r^n}.$$

En faisant tendre r vers $+\infty$ on obtient que $f^{(n)}(0) = 0$. Ainsi f est égale sur $\mathbb{C}$ à la somme d'une série entière dont seul le terme constant est éventuellement non nul, ce qui signifie que f est constante. □

Corollaire 5.8 (Théorème de d'Alembert-Gauss)**.** *Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet une racine.*

Démonstration. Soit $P(X) = \sum_{n=0}^{N} a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant, avec $N \in \mathbb{N}^*$, $a_0, \dots, a_{N-1} \in \mathbb{C}$ et $a_N \in \mathbb{C}^*$. On a

$$|P(z)| = |a_N|\, |z|^N \left| 1 + \frac{a_{N-1}}{a_N z} + \cdots + \frac{a_0}{a_N z^N} \right| \xrightarrow[|z|\to+\infty]{} +\infty.$$

On suppose par l'absurde que P ne s'annule pas. Alors $1/P$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ qui tend vers 0 à l'infini. Elle est donc bornée et donc constante d'après le Théorème 5.7. Cela implique que P est constant. D'où la contradiction. □

***Exercice* 9.** Soit f une fonction entière. On suppose qu'il existe $M \geqslant 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a

$$|f(z)| \leqslant M(1 + |z|)^k.$$

Montrer que f est une fonction polynomiale de degré au plus k.

5.4 Étude locale d'une fonction holomorphe

Dans ce paragraphe on étudie le comportement d'une fonction holomorphe au voisinage d'un point. On a déjà vu à la proposition 1.17 que si $f'(z_0) \neq 0$ alors f réalise au voisinage de z_0 une bijection de réciproque holomorphe.

À ce stade on avait supposé que la fonction était de classe C^1 mais, d'après le Corollaire 5.2, la dérivée d'une fonction holomorphe est automatiquement continue. Ainsi on peut réécrire la Proposition 1.17 de la façon suivante :

Proposition 5.9 (Inversion locale holomorphe)**.** *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une application holomorphe sur Ω. Soit $z_0 \in \Omega$. On suppose que $f'(z_0) \neq 0$. Alors il existe un voisinage U de z_0 dans Ω tel que $f(U)$ est ouvert, f réalise une bijection de U dans $f(U)$ et sa réciproque est holomorphe sur $f(U)$.*

On s'intéresse maintenant au cas où f' s'annule en 0. D'après la Proposition 2.31, si toutes les dérivées de f sont nulles en z_0, alors f est constante sur un voisinage de z_0. Le cas qu'il reste à comprendre est celui où un nombre non nul mais fini de dérivées de f s'annulent en z_0. C'est typiquement le cas de la fonction $\pi_m : z \mapsto z^m$ (pour $m \geqslant 2$) en 0. Dans ce cas on sait que pour $r > 0$ la fonction π_m envoie $D(0,r)$ dans $D(0,r^m)$ et que tout $w \in D^*(0,r^m)$ admet exactement m antécédents dans $D^*(0,r)$. On montre que le cas général est une perturbation de ce cas modèle :

Proposition 5.10. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur Ω. Soit $z_0 \in \Omega$. On suppose que $f - f(z_0)$ admet un zéro d'ordre $m \geqslant 2$ en z_0. Alors il existe un voisinage U de z_0 inclus dans Ω et une fonction φ holomorphe sur U tels que φ réalise une bijection de U dans un disque $D(0,r)$ (pour un certain $r > 0$) et*

$$\forall z \in U, \quad f(z) = f(z_0) + \varphi(z)^m. \tag{5.17}$$

En particulier, tout w dans $D(f(z_0), r^m)$ admet exactement m antécédents par f dans U.

Démonstration. Il existe $R > 0$ et une fonction g holomorphe et ne s'annulant pas sur $D(z_0,R)$ telle que pour tout $z \in D(z_0,R)$ on a

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^m g(z).$$

Quitte à réduire r on peut supposer que l'image de g est incluse dans un disque lui-même inclus dans $\mathbb{C}^*$. D'après le Théorème 4.28 et la Proposition 3.15, il existe donc une fonction $\tilde{g}$ holomorphe sur $D(z_0,r)$ telle que pour tout $z \in D(z_0,r)$ on a

$$g(z) = \exp\big(\tilde{g}(z)\big).$$

Pour $z \in D(z_0,r)$ on pose alors

$$\varphi(z) = (z - z_0)\exp\left(\frac{\tilde{g}(z)}{m}\right).$$

Cela définit bien une fonction φ holomorphe vérifiant (5.17) sur $D(z_0,R)$. En outre on a $\varphi'(z_0) \neq 0$. Quitte à réduire encore R, on obtient par la Proposition 5.9 que φ réalise une bijection de $D(z_0,R)$ sur son image. Comme cette image est un voisinage de $\varphi(z_0) = 0$, il existe $r > 0$ tel que $D(0,r) \subset \varphi(D(z_0,R))$. On note alors U l'image réciproque de $D(0,r)$ par φ. Tout $w \in D(0,r^m)$ admet alors exactement m antécédents par π_m dans $D(0,r)$ et donc m antécédents par $\pi_m \circ \varphi$ dans U. Ainsi, tout $w \in D(f(z_0),r^m)$ admet bien exactement m antécédents par f dans U. □

Au Paragraphe 1.4 on a déduit du Théorème de l'inversion locale que si la dérivée de f ne s'annule pas alors f est une application ouverte. Mais on vient de voir à la proposition 5.10 que si $f - f(z_0)$ est un zéro d'ordre plus élevé alors l'image d'un voisinage de z_0 est encore un voisinage de $f(z_0)$. On a donc finalement le résultat suivant :

Proposition 5.11 (Théorème de l'application ouverte)**.** *Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f une application holomorphe non constante sur Ω. Alors f est une application ouverte.*

5.5 Suites de fonctions holomorphes - Fonctions définies par une intégrale

On considère maintenant les fonctions définies comme limites, séries ou intégrale de fonctions holomorphes. On rappelle que les propriétés de régularité sont en général très mal conservées par limites et intégration (dans le cas réel, il faut en général passer par les différents avatars du théorème de convergence dominée pour obtenir des informations sur les fonctions définies de cette façon). On va voir qu'à nouveau les choses sont beaucoup plus simples dans le cas complexe.

On commence par montrer une réciproque au Lemme de Goursat (Lemme 4.27) :

Proposition 5.12 (Condition de Morera)**.** *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction continue sur Ω. On suppose que pour tous $a, b, c \in \Omega$ tels que le triangle plein de sommets a, b et c est inclus dans Ω on a*

$$\int_{\tau(a,b,c)} f(z)\,dz = 0.$$

Alors f est holomorphe sur Ω.

Démonstration. Soit $z \in \Omega$. Il existe $r > 0$ tel que $D(z, r) \subset \Omega$. Puisque $D(z, r)$ est convexe, on obtient par la proposition 4.25 que f admet une primitive F sur $D(z, r)$. Comme F est analytique sur $D(z, r)$, $f = F'$ l'est également, et en particulier f est $\mathbb{C}$-dérivable en z. Ceci étant valable pour tout $z \in \mathbb{C}$, on obtient que f est holomorphe sur Ω. □

Remarque 5.13. Attention, on n'a jamais affirmé que f admet une primitive sur Ω. Mais comme l'holomorphie est une propriété locale, cela a suffit de construire une primitive de f au voisinage de chaque point de Ω.

Théorème 5.14. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω. On suppose que f_n converge vers une fonction f uniformément sur tous les compacts de Ω. Alors f est holomorphe et pour tout $k \in \mathbb{N}$ la dérivée $f_n^{(k)}$ converge vers $f^{(k)}$ uniformément sur tous les compacts.*

Démonstration. • Soit $z_0 \in \Omega$. Soit $r > 0$ tel que $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$. Comme la fonction f est limite uniforme sur le compact $\overline{D}(z_0, r)$ des fonctions continues f_n, $n \in \mathbb{N}$, elle est elle-même continue sur $\overline{D}(z_0, r)$ (voir le Corollaire **??**). Soient maintenant $a, b, c \in D(z_0, r)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a d'après le Lemme de Goursat

$$\int_{\tau(a,b,c)} f_n(z)\,dz = 0.$$

Par passage à la limite sous l'intégrale (pour une intégrale sur un segment de $\mathbb{R}$) on obtient

$$\int_{\tau(a,b,c)} f(z)\,dz = 0.$$

D'après le critère de Morera (Proposition 5.12), on obtient que f est holomorphe sur $D(z_0, r)$. Ceci étant valable pour tout $z_0 \in \Omega$, on en déduit que f est holomorphe sur Ω.
• Soit $m \in \mathbb{N}$. Soit K un compact de Ω. Pour tout $\zeta \in K$ il existe $r_\zeta > 0$ tel que $\overline{D}(\zeta, 2r_\zeta) \subset \Omega$. Puisque $\bigcup_{\zeta\in K} D(\zeta, r_\zeta)$ est un recouvrement ouvert du compact K, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $\zeta_1, \dots, \zeta_k \in K$ tels que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{k} D(\zeta_k, r_k),$$

où on a noté $r_k = r_{\zeta_k}$. On note

$$\tilde{K} = \bigcup_{j=1}^{k} \overline{D}(\zeta_k, 2r_k).$$

C'est un compact de Ω. On note également $r = \min_{1\leqslant j\leqslant k} r_j$. Soit maintenant $z \in K$. Il existe $j \in [\![1, k]\!]$ tel que $z \in D(\zeta_j, r_j)$. On a alors $C(z, r) \subset D(\zeta_j, 2r) \subset \tilde{K}$, donc par les estimées de Cauchy on a

$$\left|(f_n^{(m)} - f^{(m)})(z)\right| \leqslant \frac{m!}{r^m} \sup_{C(z,r)} |f_n - f| \leqslant \frac{m!}{r^m} \sup_{\tilde{K}} |f_n - f|\,.$$

Cette dernière inégalité ne dépend plus de $z \in K$, cela prouve donc que $f_n^{(m)}$ converge uniformément vers $f^{(m)}$ sur K. □

Corollaire 5.15. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω. On suppose que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur tous les compacts de Ω. Alors sa somme f est holomorphe et pour tout $k \in \mathbb{N}$ la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n^{(k)}$ converge vers $f^{(k)}$ uniformément sur tous les compacts.*

Théorème 5.16. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit f une fonction continue de $[a,b]\times\Omega$ dans $\mathbb{C}$ telle que pour tout $t \in [a,b]$ la fonction $z \mapsto f(t,z)$ est holomorphe sur Ω. Alors la fonction F définie sur Ω par*

$$F(z) = \int_a^b f(t,z)\,dt$$

est holomorphe et pour tout $z \in \Omega$ on a

$$F'(z) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(t,z)\,dt.$$

Démonstration. Soient $z_0 \in \Omega$ et $R > 0$ tel que $\overline{D}(z_0,R) \subset \Omega$. La fonction f est continue et donc bornée sur $[a,b] \times \overline{D}(z_0,R)$. D'après le théorème de continuité sous l'intégrale on obtient que F est continue sur $D(z_0,R)$. Soient maintenant $\alpha, \beta, \gamma \in D(z_0,R)$. On note $\tau = \tau(\alpha,\beta,\gamma)$. Quitte à reparamétrer, on peut considérer que τ est un chemin de $[0,1]$ dans $D(z_0,R)$. On attribue une valeur arbitraire à la dérivée τ' aux deux points où elle n'est pas définie. On a alors

$$\int_\tau F(z)\,dz = \int_0^1 \left(\int_a^b f(t,\tau(s))\,dt \right) \tau'(s)\,ds.$$

Puisque la fonction $(t,s) \mapsto f(t,\tau(s))\tau'(s)$ est bornée sur $[a,b] \times [0,1]$ on obtient par le théorème de Fubini

$$\int_\tau F(z)\,dz = \int_a^b \left(\int_0^1 f(t,\tau(s))\tau'(s)\,ds \right) dt = \int_a^b \left(\int_\tau f(t,z)\,dz \right) dt.$$

Comme la fonction $z \mapsto f(t,z)$ est holomorphe on a

$$\int_\tau f(t,z)\,dz = 0$$

pour tout $t \in [a,b]$, et donc

$$\int_\tau F(z)\,dz = 0.$$

D'après le critère de Morera on obtient que F est holomorphe sur $D(z_0,R)$. On calcule maintenant $F'(z_0)$. D'après le Théorème 5.1 et à nouveau le Théorème de Fubini on a

$$\begin{aligned}
F'(z_0) &= \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} F(z_0 + Re^{i\theta}) e^{-i\theta}\,d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \int_a^b f(t, z_0 + Re^{i\theta}) e^{-i\theta}\,dt\,d\theta \\
&= \int_a^b \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} f(t, z_0 + Re^{i\theta}) e^{-i\theta}\,d\theta\,dt \\
&= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(t, z_0)\,dt.
\end{aligned}$$

Tous ces résultats étant valables pour tout $z_0 \in \Omega$, on obtient bien tous les résultats annoncés. $\square$

Corollaire 5.17. *Soient $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin, $\mathcal{V}$ un voisinage de $\mathrm{Im}(\gamma)$ dans $\mathbb{C}$, et Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit f une fonction continue de $\mathcal{V} \times \Omega$ dans $\mathbb{C}$, holomorphe par rapport à la seconde variable. Pour $z \in \Omega$ on pose*

$$F(z) = \int_\gamma f(\sigma, z)\,d\sigma.$$

Alors F est holomorphe sur Ω de dérivée

$$F'(z) = \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial z}(\sigma, z)\,d\sigma.$$

Démonstration. Si γ est un chemin C^1 il suffit d'écrire

$$F(z) = \int_a^b f(\gamma(t), z)\gamma'(t)\,dt,$$

et d'appliquer le Théorème 5.16 à la fonction $(t,z) \mapsto f(\gamma(t),z)\gamma'(t)$. Dans le cas général on écrit (4.6) et on applique le Théorème 5.16 à chaque terme. □

***Exercice* 10.** Soit $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Pour $z \in \mathbb{C}$ on note

$$\varphi(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itz} f(t)\,dt.$$

1. Montrer que $\varphi(z)$ est bien définie pour tout $z \in \mathbb{C}$.
2. Montrer que cela définit une fonction φ entière.
3. On suppose que la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f est aussi dans $C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Montrer que f est nulle.

6 Singularités isolées - Théorème des Résidus

On s'intéresse dans cette section aux fonctions holomorphes définies au voisinage épointé d'un certain $z_0 \in \mathbb{C}$. Cela signifie qu'on considère une fonction f holomorphe sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ qui contient $D^*(z_0, r)$ pour un certain $r > 0$, mais pas forcément z_0.

Par exemple, les fonctions suivantes sont bien définies et holomorphes sur $\mathbb{C}^*$, voisinage épointé de 0 :

$$z \mapsto \frac{\sin(z)}{z}, \qquad z \mapsto \frac{1}{z}, \qquad z \mapsto e^{\frac{1}{z}}.$$

On dira que 0 est une singularité isolée pour ces fonctions.

6.1 Singularités artificielles

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ on a

$$\frac{\sin(z)}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}.$$

On observe que le membre de droite se prolonge en une fonction holomorphe sur tout $\mathbb{C}$. Il en est donc de même pour la fonction $z \mapsto \frac{\sin(z)}{z}$. Dans ce genre de situation, on prolonge la fonction et on oublie qu'il y avait un problème, qui n'en était donc pas un.

Définition 6.1. Soient $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ et f une fonction holomorphe sur $D^*(z_0, R)$. On dit que z_0 est une *singularité artificielle* de f (ou que f admet une singularité artificielle en z_0) si f se prolonge en une fonction holomorphe sur $D(z_0, R)$.

D'après le Lemme 4.34 et la Proposition 4.25, si la fonction f holomorphe sur $D^*(z_0, R)$ se prolonge en une fonction continue sur $D(z_0, R)$ alors ce prolongement continu est automatiquement holomorphe. On a en fait un meilleur résultat :

Proposition 6.2. *Soient $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ et f une fonction holomorphe sur $D^*(z_0, R)$. Si f est bornée sur $D^*(z_0, R)$ alors la singularité en z_0 est artificielle.*

Démonstration. Pour $z \in D(z_0, R)$ on pose

$$h(z) = \begin{cases} (z - z_0)^2 f(z) & \text{si } z \neq z_0, \\ 0 & \text{si } z = z_0. \end{cases}$$

La fonction h est holomophe sur $D^*(z_0, R)$ comme produit de fonctions holomorphes. En outre on vérifie directement que h est dérivable de dérivée nulle en z_0. Elle est donc holomorphe, et par suite développable en série entière sur le disque $D(z_0, R)$ (d'après le Theorème 5.1). Comme $h(z_0) = h'(z_0) = 0$ il existe une suite $(a_n)_{n\geqslant 2}$ telle que pour tout $z \in D(z_0, R)$ on a

$$h(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

On en déduit que pour tout $z \in D^*(z_0, R)$ on a

$$f(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n (z - z_0)^{n-2}.$$

La fonction f se prolonge donc en une fonction holomorphe sur $D(z_0, R)$. $\square$

Ce résultat est à nouveau à comparer avec le prolongement de fonctions d'une variable réelle. Il n'est pas difficile de donner des exemples de fonctions régulières bornées sur $]0, 1[$ et qui ne se prolonge pas par continuité aux bords de l'intervalle, ou qui se prolonge continuement mais avec un prolongement continu qui n'est pas dérivable au bord.

Dans ce paragraphe on a mis de côté les singularités qui n'en sont pas vraiment. Mais ce n'est pas si simple en général. Ainsi, par exemple, les fonctions $z \mapsto \frac{1}{z}$ et $z \mapsto \exp\left(\frac{1}{z}\right)$ données en introduction ne se prolongent pas par continuité en 0.

6.2 Pôles, fonctions méromorphes, Théorème des Résidus

Parmi les « vraies » singularités, on distingue celles qui se comportent au voisinage (épointé) de z_0 comme une puissance négative de $(z - z_0)$.

Définition 6.3. Soient $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ et f une fonction holomorphe sur $D^*(z_0, R)$. On suppose que z_0 n'est pas une singularité artificielle de f.

- On dit que z_0 est un *pôle* de f s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que la fonction $z \mapsto (z - z_0)^m f(z)$ admet une singularité artificielle en z_0.
- Le plus petit entier m qui convient est alors appelé *ordre de multiplicité* du pôle z_0.

Exemple 6.4. La fonction $z \mapsto \frac{1}{z^4}$ admet un pôle d'ordre 4 en 0.

On peut ré-écrire la définition de la façon suivante :

Proposition 6.5. *Soient $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ et f une fonction holomorphe sur $D^*(z_0, R)$. Alors z_0 est un pôle d'ordre $m \in \mathbb{N}^*$ si et seulement s'il existe une fonction holomorphe h sur $D(z_0, R)$ telle que $h(z_0) \neq 0$ et*

$$\forall z \in D^*(z_0, R), \quad f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^m}. \tag{6.18}$$

Démonstration. On suppose que f admet un pôle d'ordre m en z_0 et on note h le prolongement holomorphe de la fonction $z \mapsto (z - z_0)^m f(z)$ sur $D(z_0, R)$. En particulier, h est bien holomorphe sur $D(z_0, R)$ et (6.18) est vérifiée. On suppose par l'absurde que $h(z_0) = 0$. D'après la proposition 5.5 il existe une fonction $\tilde{h}$ holomorphe sur $D(z_0, R)$ telle que $h(z) = (z - z_0)\tilde{h}(z)$ pour tout $z \in D(z_0, R)$. Dans ce cas la fonction $z \mapsto (z - z_0)^{m-1} f(z)$ coïncide avec $\tilde{h}$ sur $D^*(z_0, R)$ et admet donc une singularité artificielle en z_0, ce qui contredit la définition de m. Cela prouve que $h(z_0) \neq 0$.

Inversement, s'il existe une telle fonction h alors z_0 est un pôle d'ordre au moins m de f. Supposons par l'absurde que la fonction $z \mapsto (z - z_0)^{m-1} f(z)$ admet une singularité artificielle en z_0. Cela implique que la fonction $z \mapsto (z - z_0)^{-1} h(z)$ admet une singularité artificielle en z_0, ce qui est absurde car $h(z_0) \neq 0$. D'où z_0 n'est pas un pôle d'ordre inférieur à m. D'où le résultat. $\square$

L'écriture donnée par la Proposition 6.5 donne un critère caractérisant les pôles parmi les différents types de singularités.

Proposition 6.6. *Soient $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ et f une fonction holomorphe sur $D^*(z_0, R)$. Alors z_0 est un pôle de f si et seulement si*

$$|f(z)| \xrightarrow[z \to z_0]{} +\infty.$$

Démonstration. • On suppose que f admet un pôle en z_0 et on note $m \in \mathbb{N}^*$ son ordre de multiplicité. Soit h comme donné par la Proposition 6.5. Comme $h(z_0) \neq 0$ on a

$$|f(z)| = \frac{|h(z)|}{|z - z_0|^m} \xrightarrow[z \to z_0]{} +\infty.$$

Inversement, on suppose que $|f|$ tend vers $+\infty$ en z_0. En particulier, il existe $r \in]0, R]$ tel que $|f(z)| \geqslant 1$ pour tout $z \in D^*(0, r)$. La fonction $g = 1/f$ est donc holomorphe et bornée sur $D^*(0, r)$. D'après la Proposition 6.2, z_0 est donc une singularité artificielle pour g. En outre, g se prolonge par 0 en z_0. Comme g n'est pas identiquement nulle, elle admet en z_0 un zéro d'ordre m pour un certain $m \in \mathbb{N}^*$. D'après la Proposition 5.5 il existe une fonction $\tilde{g}$ holomorphe sur $D(z_0, r)$ telle que $\tilde{g}(z_0) \neq 0$ et $g(z) = (z - z_0)^m \tilde{g}(z)$ pour tout $z \in D^*(z_0, r)$. Comme g ne s'annule pas sur $D^*(z_0, r)$, c'est également le cas pour $\tilde{g}$, et on obtient, pour tout $z \in D^*(z_0, r)$,

$$(z - z_0)^m f(z) = \frac{1}{\tilde{g}(z)}.$$

Cela prouve que $(z - z_0)^m f(z)$ admet une singularité artificielle en z_0. □

Exemple 6.7. 0 n'est pas un pôle pour la fonction $z \mapsto e^{\frac{1}{z}}$ car $|e^{\frac{1}{it}}| = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}^*$ et en particulier ne tend pas vers $+\infty$ quand t tend vers 0. On étudiera ce type de singularité au Paragraphe 6.4.

On sait qu'une fonction holomorphe sur un disque s'écrit comme la somme d'une série entière sur ce disque. En utilisant la Proposition 6.5, cela se généralise au cas d'une fonction holomorphe sur un disque privé de son centre (où elle admet un pôle) si on autorise un nombre fini de puissances négatives :

Proposition 6.8. *Soient $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ et f une fonction holomorphe sur $D^*(z_0, R)$ admettant en z_0 un pôle d'ordre $m \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe une suite $(a_n)_{n \geqslant -m}$ telle que pour tout $z \in D^*(z_0, R)$ on a*

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{k=1}^{m} a_{-k} (z - z_0)^{-k} + h(z),$$

où $h : z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (z - z_0)^n$ est une fonction holomorphe sur $D(z_0, R)$.

Définition 6.9. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Une fonction f est dite *méromorphe* sur Ω s'il existe une partie discrète $\mathcal{P}$ de Ω telle que f est définie et holomorphe sur $\Omega \setminus \mathcal{P}$ et admet un pôle en chaque point de $\mathcal{P}$.

Exemples 6.10.
- La fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$.
- Plus généralement, pour tous $P \in \mathbb{C}[X]$ et $Q \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ la fonction rationnelle $F = P/Q$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$. En outre, si P et Q sont premiers entre eux les pôles de F sont les zéros de Q (avec mêmes ordres de multiplicité).

Proposition 6.11. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f et g deux fonctions holomorphes sur Ω. On suppose que g n'est identiquement nulle sur aucune composante connexe de Ω. Alors f/g est une fonction méromorphe sur Ω dont l'ensemble des pôles est inclus dans l'ensemble des zéros de g. Plus précisément, si z_0 est un zéro de g, on note $m_g \in \mathbb{N}^*$ et $m_f \in \mathbb{N}$ les ordres de multiplicité de z_0 comme zéro de g et de f, respectivement (avec $m_f = 0$ si z_0 n'est pas un zéro de f).*

(i) *Si $m_f \geqslant m_g$ alors z_0 est une une singularité artificielle de f/g et le prolongement de f/g admet en z_0 un zéro d'ordre $m_f - m_g$.*

(ii) *Si $m_f < m_g$ alors z_0 est un pôle de f/g d'ordre $m_g - m_f$.*

Démonstration. On note $\mathcal{Z}$ l'ensemble des zéros de g. Par le principe des zéros isolés, $\mathcal{Z}$ est une partie discrète de Ω. En outre, la fonction f/g est bien définie et holomorphe sur $\Omega \setminus \mathcal{Z}$. Soit maintenant $z_0 \in \mathcal{Z}$. Il existe des fonctions $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ holomorphes sur Ω et non nulles en z_0 telles que pour $z \in \Omega$ on a

$$f(z) = (z - z_0)^{m_f} \tilde{f}(z) \quad \text{et} \quad g(z) = (z - z_0)^{m_g} \tilde{g}(z).$$

Par continuité il existe $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset \Omega$ et $\tilde{g}$ ne s'annule pas sur $D(z_0, r)$. Pour $z \in D(z_0, r)$ on a alors

$$\frac{f(z)}{g(z)} = (z - z_0)^{m_f - m_g} \frac{\tilde{f}(z_0)}{\tilde{g}(z_0)},$$

où $\tilde{f}/\tilde{g}$ est une fonction holomorphe sur $D(z_0, r)$ ne s'annulant pas en z_0. On conclut alors avec les Propositions 5.5 et 6.5. □

Proposition 6.12. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. L'ensemble des fonctions méromorphes sur Ω est stable par additions, multiplications et dérivations. Si Ω est connexe, le quotient d'une fonction méromorphe et d'une fonction méromorphe non nulle est encore méromorphe.*

Démonstration. Soient f et g deux fonctions méromorphes sur Ω. Il existe des parties discrètes $\mathcal{P}_f$ et $\mathcal{P}_g$ de Ω telles que f et g sont holomorphes sur $\Omega \setminus \mathcal{P}_f$ et $\Omega \setminus \mathcal{P}_g$, respectivement. On note alors $\mathcal{P} = \mathcal{P}_f \cup \mathcal{P}_g$. $\mathcal{P}$ est alors une partie discrète de Ω et $f + g$, fg et f' sont holormorphes sur $\Omega \setminus \mathcal{P}$. Soit maintenant $z_0 \in \mathcal{P}$. Il existe $m_f, m_g \in \mathbb{N}$ tels que les fonctions $\tilde{f} : z \mapsto (z - z_0)^{m_f} f(z)$ et $\tilde{g} : (z - z_0)^{m_g} g(z)$ se prolongent en des fonctions holomorphes sur un voisinage de z_0. En écrivant $f + g$, fg et f' en fonctions de $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$, on observe que z_0 est un pôle pour ces fonctions. On en déduit que ces fonctions sont méromorphes sur Ω.

On suppose maintenant que g n'est identiquement nulle sur aucune composante connexe de Ω. On note $\mathcal{Z}$ l'ensemble des zéros de g et $\mathcal{P}$ l'ensemble de ses pôles. Par le principe des zéros isolés, $\mathcal{Z}$ est une partie discrète de Ω. La fonction $1/g$ est holormophe sur $\Omega \setminus (\mathcal{Z} \cup \mathcal{P})$. Si $z_0 \in \mathcal{Z}$ est un zéro d'ordre $m \in \mathbb{N}^*$ de g, alors d'après les Propositions 5.5 et 6.5 c'est un pôle d'ordre m pour $1/g$. Si z_0 est un pôle de g alors $1/g$ admet une singularité artificielle en z_0 (plus précisément, si z_0 est un pôle d'ordre $m \in \mathbb{N}^*$ de g, alors le prolongement de $1/g$ admet en z_0 un zéro d'ordre m). Cela prouve que $1/g$ est une fonction méromorphe sur Ω dont l'ensemble des pôles est $\mathcal{Z}$. □

On s'intéresse maintenant au calcul d'intégrales de fonctions méromorphes sur des lacets. On reprend les notations de la Proposition 6.8. Comme $D^*(z_0, R)$ n'est pas étoilé, la fonction f n'admet a priori pas de primitive. On sait également que le seul terme qui pose problème est le terme d'ordre -1. Par exemple, pour tout $r \in]0, R[$ l'intégrale de f le long du cercle $C(z_0, r)$ (orienté dans le sens trigonométrique) est

$$\int_{C(z_0,r)} f = \sum_{j=1}^{k} a_{-j} \int_{C(z_0,R)} \frac{dz}{z^j} + \int_{C(z_0,r)} h = 2i\pi \, a_{-1}.$$

Le rôle clé qui sera joué par ce coefficient a_{-1} dans les calculs d'intégrales justifie qu'on lui donne un nom spécial :

Définition 6.13. Avec les notations de la Proposition 6.8, on appelle *résidu* de f en z_0 et on note $\mathsf{Res}(f, z_0)$ le coefficient a_{-1}.

Théorème 6.14 (Théorème des résidus, cas méromorphe)**.** *Soit Ω un ouvert étoilé de $\mathbb{C}$. Soit f une fonction méromorphe sur Ω. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des pôles de f. Soit γ un lacet de $\Omega \setminus \mathcal{P}$. Alors on a*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z) \, dz = \sum_{\zeta \in \mathcal{P}} \mathsf{Res}(f, \zeta) \mathsf{Ind}(\gamma, \zeta)$$

(la somme ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls).

Démonstration. • On suppose que $\mathcal{P}$ est fini. On note $z_1, \dots, z_p$ ses éléments (avec $p \in \mathbb{N}$). Pour tout $j \in [\![1, p]\!]$ il existe $m_j \in \mathbb{N}^*$ et $a_{j,-1}, \dots, a_{j,-m_j} \in \mathbb{C}$ tels que

$$f(z) - \sum_{k=1}^{m_j} a_{j,-k}(z - z_j)^{-k} \tag{6.19}$$

admet une singularité artificielle en z_j. Pour tout $z \in \Omega_R \setminus \mathcal{P}_R$ on note

$$g(z) = f(z) - \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{m_j} a_{j,-k}(z - z_j)^{-k}.$$

La fonction g ainsi définie se prolonge alors en une fonction holomorphe sur Ω, de sorte que d'après le Théorème de Cauchy

$$\int_\gamma g(z)\, dz = 0.$$

On a alors

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{p} \sum_{m=1}^{k_j} a_{j,-m} \int_\gamma \frac{dz}{(z - \zeta_j)^m} = 2i\pi \sum_{\zeta \in \mathcal{P}_R} \mathsf{Res}(f, \zeta)\mathsf{Ind}(\gamma, \zeta). \tag{6.20}$$

Puisque les pôles de f dans $\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_R$ sont d'indices nuls par rapport à γ, cela donne bien le résultat annoncé.

• Dans le cas général, il montre qu'il existe un ouvert étoilé ω tel que $\mathrm{Im}(\gamma) \subset \omega$ et $\overline{\omega} \subset \Omega$. Alors $\overline{\omega} \cap \mathcal{P}$ est fini, et on conclut en appliquant le cas précédent à la restriction de f à ω. Pour construire un tel ω on procède par exemple de la façon suivante. On considère un point $z_0 \in \Omega$ par rapport auquel Ω est étoilé. On considère $R > 0$ tel que $z_0 \in D(0, R)$ et $\mathrm{Im}(\gamma) \subset D(O, R)$ et on note $\Omega_R = \Omega \cap D(0, R)$. Alors Ω_R est un ouvert borné étoilé par rapport à z_0 et contenant $\mathrm{Im}(\gamma)$. Soit $z \in \partial\Omega_R$. Soient $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $z = z_0 + re^{i\theta}$. Puisque $\mathrm{Im}(\gamma)$ est compact et ne contient pas z, il existe $\varepsilon \in]0, r[$ tel que si on note

$$A_z = \left\{ z_0 + \rho e^{is}, (\rho, s) \in]r - \varepsilon, R[\times]\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon[\right\},$$

alors A_z est un voisinage ouvert de z tel que $\overline{A_z} \cap \mathrm{Im}(z) = \emptyset$. Soient $z_1, \dots, z_p$ ($p \in \mathbb{N}^*$) tels que $\partial\Omega_R \subset \bigcup_{j=1}^{p} A_{z_j}$. On note $\omega = \Omega_R \setminus \overline{\bigcup_{j=1}^{p} A_{z_j}}$. Alors ω est un ouvert borné contenant $\mathrm{Im}(\gamma)$ et étoilé par rapport à z_0. □

Le Théorème des Résidus a de très nombreuses applications, et permet en particulier de calculer explicitement des intégrales (on donnera des exemples au paragraphe suivant). Ramener le calcul d'une intégrale à des calculs de résidus est une simplification très importante. À condition de savoir calculer ces résidus.

Proposition 6.15. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, f et g deux fonctions méromorphes sur Ω, et $z_0 \in \Omega$.*

(i) *Si f admet un pôle simple en z_0 alors*

$$\mathsf{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

(ii) *Plus généralement, si f admet un pôle d'ordre $m \in \mathbb{N}^*$ en z_0 alors*

$$\mathsf{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \big((z - z_0)^m f(z)\big)\Big|_{z = z_0}.$$

(iii) *Si f est bien définie en z_0 et g admet un zéro simple en z_0 alors*

$$\mathsf{Res}\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Démonstration. Si f admet un pôle simple en z_0 il existe une fonction h holomorphe au voisinage de z_0 et telle que pour z dans son voisinage on a

$$f(z) = \frac{\mathsf{Res}(f, z_0)}{(z - z_0)} + h(z).$$

On en déduit la première assertion. Plus généralement, si f admet un pôle d'ordre $m \in \mathbb{N}^*$ alors d'après la Proposition 6.8 il existe $a_{-m}, \dots, a_{-1} \in \mathbb{C}$ et h holomorphe tels que

$$f(z) = \sum_{k=1}^{m} a_{-k}(z - z_0)^{-k} + h(z).$$

On a alors

$$(z - z_0)^m f(z) = \sum_{k=1}^{m} a_{-k}(z - z_0)^{m-k} + (z - z_0)^m h(z),$$

puis

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\big((z - z_0)^m f(z)\big) = (m-1)! a_{-1} + \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} \frac{m!}{(m-k)!}(z - z_0)^{m-k} h^{(m-k)}(z).$$

En z_0 cela donne $(m-1)!a_{-1}$ et donc la deuxième propriété. Pour la dernière propriété on écrit $g(z) = (z - z_0)\tilde{g}(z)$ où $\tilde{g}$ est une fonction méromorphe bien définie en z_0. D'après la première propriété on a

$$\mathsf{Res}\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0) f(z)}{g(z)} = \frac{f(z_0)}{\tilde{g}(z_0)}.$$

Cela donne bien le résultat attendu puisque $g'(z_0) = \tilde{g}(z_0)$. □

Dans ces notes on a fait le choix de donner dès que possible une première version du théorème des résidus. Qui est en fait bien souvent suffisante. Les hypothèses utilisées sont néammoins bien plus restrictives que nécessaire. En effet, on peut autoriser des domaines qui ne sont pas forcément étoilés, ainsi que des fonctions qui admettent des singularités qui ne sont ni artificielles, ni des pôles. Voir les théorèmes 6.30 et 8.15.

6.3 Exemples de calculs d'intégrales réelles avec le Théorème des Résidus

Dans ce paragraphe on montre, à l'aide d'exemples, comment l'analyse complexe (à travers le Théorème des Résidus 6.14) peut être utile pour calculer des intégrales de fonctions d'une variable réelle, à valeurs réelles, sur un intervalle de $\mathbb{R}$.

On commence par calculer sur $\mathbb{R}$ l'intégrale d'une fraction rationnelle (dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$). Via la décomposition en éléments simples on sait déjà calculer une telle intégrale, mais cela donne une alternative intéressante.

Proposition 6.16. *Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que Q n'a pas de racine réelle et $\deg(Q) \geqslant \deg(P) + 2$. Alors on a*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = 2i\pi \sum_{z \in \mathcal{P}_+} \mathsf{Res}\left(\frac{P}{Q}, z\right),$$

où $\mathcal{P}_+$ est l'ensemble des pôles de P/Q (vue comme fonction rationnelle d'une variable complexe) de parties imaginaires strictement positives.

Démonstration. On commence par observer que l'intégrale est bien définie (la fonction $x \mapsto P(x)/Q(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et décroît au moins comme $|x|^{-2}$ en $\pm\infty$). Elle est alors égale à

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx.$$

La fonction rationelle P/Q admet un nombre fini de pôles (car ces pôles sont en particulier des racines de Q). Il existe donc $R_0 > 0$ tel que $|z| < R_0$ pour tout $z \in \mathcal{P}_+$. Pour $R \geqslant R_0$ on note Γ_R la courbe formée par le segment joignant $-R$ à R et le demi-cercle supérieur de centre 0 et de rayon R, orienté dans le sens direct. Le segment peut simplement être paramétré par la fonction $x \mapsto x$ pour $x \in [-R, R]$, et le demi-cercle par $Re^{i\theta}$ pour $\theta \in [0, \pi]$. Cela donne

$$\int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx + \int_0^{\pi} \frac{iRe^{i\theta}P(Re^{i\theta})}{Q(Re^{i\theta})}\,d\theta.$$

Comme $\deg(Q) > \deg(P) + 1$ on a

$$\sup_{\theta\in[0,\pi]} \left| \frac{iRe^{i\theta}P(Re^{i\theta})}{Q(Re^{i\theta})} \right| \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0,$$

et donc

$$\int_0^{\pi} \frac{iRe^{i\theta}P(Re^{i\theta})}{Q(Re^{i\theta})} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi,

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz.$$

Or, d'après le Théorème des Résidus, pour tout $R \geqslant R_0$ on a

$$\int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz = \sum_{z\in\mathcal{P}_+} \mathsf{Res}\left(\frac{P}{Q}, z\right),$$

car les pôles de parties imaginaires positives sont d'indice 1 par rapport à Γ_R, tandis que ceux de parties imaginaires négatives sont d'indices nuls. □

Exemple 6.17. On considère l'intégrale

$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^4}\,dx.$$

Les pôles de la fonction $z \mapsto \frac{1}{1+z^4}$ sont $e^{\frac{i\pi}{4}}$, $e^{\frac{3i\pi}{4}}$, $e^{-\frac{i\pi}{4}}$ et $e^{-\frac{3i\pi}{4}}$. Ils sont tous simples. Les deux premiers sont de parties imaginaires positives. En outre, d'après la Proposition 6.15 on a

$$\mathsf{Res}\big(f, e^{\frac{i\pi}{4}}\big) = \frac{1}{4(e^{\frac{i\pi}{4}})^3} = \frac{e^{-\frac{3i\pi}{4}}}{4} = -\frac{1+i}{4\sqrt{2}}$$

et

$$\mathsf{Res}\big(f, e^{\frac{3i\pi}{4}}\big) = \frac{1}{4(e^{\frac{3i\pi}{4}})^3} = \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{4} = \frac{1-i}{4\sqrt{2}},$$

d'où

$$I = (2i\pi)\frac{-(1+i)+(1-i)}{4\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Efficace.

On observe que la stratégie de cacul de la Proposition 6.16 s'adapte au calcul de l'intégrale sur $\mathbb{R}$ d'une fonction f telle que

$$zf(z) \xrightarrow[|z|\to+\infty]{} 0.$$

Toutes sortes d'intégrales peuvent être calculées en utilisant ainsi le Théorème des Résidus. Comme autre exemple, on peut considérer les intégrales de la forme

$$\int_0^{2\pi} R(\cos(t), \sin(t))\,dt,$$

où R est une fraction rationnelle de deux variables réelles bien définie sur le cercle unité de $\mathbb{R}^2$. En écrivant les formules d'Euler, on se ramène à une intégrale de la forme

$$\int_0^{2\pi} \tilde{R}(e^{it})ie^{it}\,dt,$$

où $\tilde{R}$ est une fraction rationnelle d'une variable complexe ne s'annulant pas sur le cercle unité de $\mathbb{C}$. Cette intégrale est alors donnée par

$$\int_0^{2\pi} \tilde{R}(e^{it}) ie^{it} \, dt = 2i\pi \sum_{z \in \mathcal{P}_1} \mathsf{Res}(\tilde{R}, z),$$

où $\mathcal{P}_1$ est l'ensemble des pôles de $\tilde{R}$ de module strictement inférieur à 1.

Exemple 6.18. On considère l'intégrale

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \sin(t)} \, dt.$$

D'après les formules d'Euler on a

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{2i}{4i + e^{it} - e^{-it}} \, dt.$$

Puisque l'intégrande est une fraction rationnelle en e^{it} (et cela aurait été le cas en partant de n'importe quelle fraction rationnelle en $\cos(t)$ et $\sin(t)$), on cherche à ré-écrire cette intégrale comme l'intégrale d'une fraction rationnelle le long du lacet circulaire $c(0, 1)$. Plus précisément on a

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{2i}{4i + e^{it} - e^{-it}} \frac{ie^{it}}{ie^{it}} \, dt = \int_0^{2\pi} \frac{2}{4ie^{it} + e^{2it} - 1} ie^{it} \, dt = \int_{c(0,1)} \frac{2}{z^2 + 4iz - 1} \, dz.$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $z^2 + 4iz - 1 = (z - z_+)(z - z_-)$ avec $z_\pm = -2i \pm i\sqrt{3}$. Comme $|z_+| < 1$ et $|z_-| > 1$ on a par le Théorème des Résidus et par la Proposition 6.15

$$I = 2i\pi \,\mathsf{Res}\left(\frac{2}{z^2 + 4iz - 1}, z_+\right) = \frac{4i\pi}{2z_+ + 4i} = \frac{4i\pi}{2i\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

On peut aussi intégrer les fonctions de la forme $R(x)e^{imx}$ (et donc $R(x)\cos(mx)$ ou $R(x)\sin(mx)$) ou $x^\alpha R(x)$ avec α réel en utilisant ce type d'argument.

Exemple 6.19. On considère l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{1/3}(1 + x)} \, dx.$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^{1/3}(1+x)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, elle est équivalente à $x^{-1/3}$ en 0 et à $x^{-4/3}$ en $+\infty$, donc par comparaisons avec des intégrales de Riemann on obtient que l'intégrale I est bien définie.

On considère sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ la détermination du logarithme ℓ telle que

$$\forall \rho > 0, \forall \theta \in]0, 2\pi[, \quad \ell(\rho e^{i\theta}) = \ln(\rho) + i\theta.$$

On considère alors sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ la fonction holomorphe

$$f : z \mapsto \frac{e^{-\frac{1}{3}\ell(z)}}{1 + z}.$$

Soient r, R, ε tels que $0 < r < 1 < R$ et $\varepsilon \in]0, \pi[$. On va intégrer f sur le bord $\gamma_{r,R,\varepsilon}$ du domaine

$$\left\{\rho e^{i\theta}, r < \rho < R, \theta \in]\varepsilon, 2\pi - \varepsilon[\right\}.$$

Il est paramétré par la concaténation des chemins suivants :

$$\gamma^1_{r,R,\varepsilon} : t \in [r, R] \mapsto te^{i\varepsilon}, \quad \gamma^2_{r,R,\varepsilon} : t \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon] \mapsto Re^{it},$$

$$\gamma^3_{r,R,\varepsilon} : t \in [r, R] \mapsto (r + R - t)e^{i(2\pi-\varepsilon)}, \quad \gamma^4_{r,R,\varepsilon} : t \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon] \mapsto re^{i(2\pi-t)}.$$

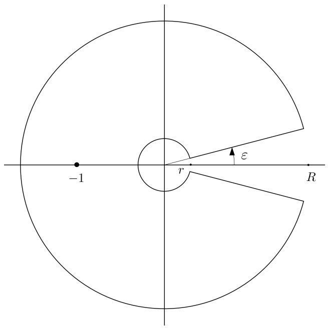

FIGURE 3 – Domaine d'intégration pour l'Exemple 6.19

La fonction f admet un unique pôle, en -1, et d'après la Proposition 6.15 son résidu est

$$\mathsf{Res}(f,-1) = e^{-\frac{1}{3}\ell(-1)} = e^{-\frac{i\pi}{3}}.$$

D'après le Théorème des résidus on a donc

$$\int_{\gamma_{r,R,\varepsilon}} f(z)\,dz = 2i\pi e^{-\frac{i\pi}{3}}.$$

D'après le Théorème de la convergence dominée on a

$$\int_{\gamma^1_{r,R,\varepsilon}} f(z)\,dz = \int_r^R \frac{e^{-\frac{1}{3}(\ln(t)+i\varepsilon)}}{1+te^{i\varepsilon}} e^{i\varepsilon}\,dt \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_r^R \frac{e^{-\frac{\ln(t)}{3}}}{1+t}\,dt = \int_r^R \frac{1}{t^{-1/3}(1+t)}\,dt,$$

donc

$$\lim_{r\to 0}\lim_{R\to+\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma^1_{r,R,\varepsilon}} f(z)\,dz = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^{-1/3}(1+t)}\,dt.$$

De même

$$e^{-\frac{1}{3}(\ln(t)+i(2\pi-\varepsilon))} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \frac{e^{-\frac{2i\pi}{3}}}{t^{-1/3}(1+t)},$$

donc

$$\lim_{r\to 0}\lim_{R\to+\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma^3_{r,R,\varepsilon}} f(z)\,dz = -e^{-\frac{2i\pi}{3}}\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^{-1/3}(1+t)}\,dt.$$

D'autre part, d'après la Proposition 4.20, on a pour $R>1$

$$\left|\int_{\gamma^2_{r,R,\varepsilon}} f(z)\,dz\right| \leqslant 2(\pi-\varepsilon)R\frac{e^{-\frac{1}{3}\ln(R)}}{R-1},$$

donc

$$\lim_{r\to 0}\lim_{R\to+\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma^2_{r,R,\varepsilon}} f(z)\,dz = 0.$$

Et de même,

$$\lim_{r\to 0}\lim_{R\to+\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma^4_{r,R,\varepsilon}} f(z)\,dz = 0.$$

Finalement on obtient

$$\left(1-e^{\frac{-2i\pi}{3}}\right) I = 2i\pi e^{-\frac{i\pi}{3}},$$

soit

$$I = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

***Exercice* 11.** En reprenant le calcul de l'Exemple 6.19, montrer que pour tout $\alpha \in]0,1[$ on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha(1+t)}\,dt = \frac{1}{\sin(\pi\alpha)}.$$

6.4 Singularités essentielles

On a vu à l'Exemple 6.7 qu'une fonction holomorphe peut admettre une singularité isolée qui n'est ni une singularité artificielle ni un pôle. Dans ce cas on parlera de singularité essentielle.

Définition 6.20. Soient $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ et f une fonction holomorphe sur $D^*(z_0, R)$. On dit que z_0 est une *singularité essentielle* de f si ce n'est ni une singularité artificielle ni un pôle.

Une fonction polynômiale f, de la forme $\sum_{n=0}^N a_n(z-z_0)^n$, se comporte à l'infini comme son terme de plus haut degré. En particulier, $|f|$ tend vers $+\infty$ quand $|z|$ tend vers $+\infty$. Si on regarde maintenant la somme infinie $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{n!}$, le comportement est moins simple. En fait, pour tout $R > 0$, la fonction exp restreinte au voisinage de l'infini $\mathbb{C} \setminus D(z_0, R)$ est surjective. En faisant le changement de variable $(z - z_0) \mapsto \frac{1}{(z-z_0)}$, on retrouve les mêmes comportement au voisinage de z_0 en considérant des puissances négatives. Si on a un développement avec un nombre fini de puissances négatives comme au paragraphe précédent, la fonction se comporte au voisinage épointé de z_0 comme la plus petite puissance. Alors qu'on a un comportement bien plus complexe au voisinage de 0 pour

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^n n!}.$$

Comme l'image de tout voisinage de l'infini par la fonction $z \mapsto e^z$ est $\mathbb{C}^*$, l'image de tout voisinage épointé de 0 par $z \mapsto e^{\frac{1}{z}}$ est C^*. On a en fait un résultat de ce type en général. On se contente dans un premier temps du résultat simple suivant :

Proposition 6.21. *Soient $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ et f une fonction holomorphe sur $D^*(z_0, R)$ admettant en z_0 une singularité essentielle. Alors pour tout $r \in]0, R]$ l'image de $D^*(z_0, r)$ par f est dense dans $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Soit $r \in]0, R]$. On suppose par l'absurde qu'il existe $w \in \mathbb{C}$ et $\varepsilon > 0$ tels que l'image de $D^*(z_0, r)$ par f ne rencontre pas le disque $D(w, \varepsilon)$. Pour $z \in D^*(z_0, r)$ on peut donc poser

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w}.$$

Cela définit une fonction holomorphe et bornée sur $D^*(z_0, r)$. D'après la Proposition 6.2 on peut la prolonger en une fonction holomorphe sur $D(z_0, r)$ (qu'on note toujours g).

On suppose que $g(z_0) \neq 0$. Dans ce cas f est bornée au voisinage de z_0, ce qui est absurde puisque z_0 n'est pas une singularité artificielle de f. Mais si $g(z_0) = 0$ on a

$$|f(z)| \geqslant \frac{1}{|g(z)|} - |w| \xrightarrow[z \to z_0]{} +\infty,$$

donc z_0 est un pôle de f d'après la Proposition 6.6, ce qui donne également une contradiction. D'où le résultat par l'absurde. □

La proposition 6.21 peut être précisée de la façon suivante :

Théorème 6.22 (Grand Théorème de Picard)**.** *Soient $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ et f une fonction holomorphe sur $D^*(z_0, R)$ admettant en z_0 une singularité essentielle. Alors*

- *soit l'image de $D^*(z_0, r)$ par f est égale à $\mathbb{C}$ pour tout $r \in]0, R]$,*
- *soit il existe $w \in \mathbb{C}$ et $r_0 \in]0, R]$ tel que l'image de $D^*(z_0, r)$ par f est égale à $\mathbb{C} \setminus \{w\}$ pour tout $r \in]0, r_0]$.*

On ne démontrera pas ce théorème ici.

On a vu qu'une fonction holomorphe sur $D(z_0, R)$ admet sur ce disque un développement de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, et qu'une fonction holomorphe sur $D^*(z_0, R)$ admettant un pôle en z_0 admet un développement de la forme $\sum_{n=-N}^{+\infty} a_n z^n$. Il reste à voir ce qu'on peut dire dans le cas où z_0 est une singularité essentielle. La fonction $z \mapsto e^{1/z}$ admet un développement en une série de puissances négatives de z. Le but du paragraphe suivant est de donner un tel développement dans le cas général.

6.5 Séries de Laurent

On s'intéresse dans ce paragraphe aux fonctions holomorphes sur un anneau. Pour $z_0 \in \mathbb{C}$ et $R_1, R_2 \in [0, +\infty]$ tels que $R_1 > R_2$ on note

$$A(z_0, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, R_1 < |z - z_0| < R_2\}.$$

En particulier, $A(z_0, 0, R_2) = D^*(z_0, R_2)$.

Définition 6.23. Soient $R_1, R_2 \in [0, +\infty]$ avec $R_1 > R_2$. Une *série de Laurent* sur l'anneau $A(z_0, R_1, R_2)$ est une série de fonctions de la forme

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$$

où la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est telle que
- la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n (z - z_0)^n$ a un rayon de convergence au moins égal à R_2,
- la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_{-n} (z - z_0)^n$ a un rayon de convergence au moins égal à $1/R_1$.

On commence par observer qu'une série de Laurent définit une fonction holomorphe sur l'anneau $A(z_0, R_1, R_2)$.

Proposition 6.24. *Soit $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n$ une série de Laurent sur l'anneau $A(z_0, R_1, R_2)$. Alors*

(i) *la série converge sur l'anneau $A(z_0, R_1, R_2)$,*

(ii) *elle converge normalement sur $A(z_0, r_1, r_2)$ pour tous $r_1, r_2 \in]R_1, R_2[$ tels que $r_1 < r_2$,*

(iii) *sa somme définit une fonction holomorphe sur $A(z_0, R_1, R_2)$,*

(iv) *pour $n \in \mathbb{Z}$ et $r \in]R_1, R_2[$ on a*

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-in\theta} \, d\theta.$$

En particulier, le membre de droite ne dépend pas de r.

Démonstration. On considère r_1 et r_2 tels que $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$. Pour $z \in A(z_0, r_1, r_2)$ et $n \in \mathbb{N}$ on a $|a_{-n}| \, |z|^{-n} \leqslant |a_{-n}| \, r_1^{-n}$. En outre $|a_n| \, |z|^n \leqslant |a_n| \, r_2^n$. Comme les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |a_{-n}| \, r_1^{-n}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \, r_2^n$ converge, la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$ converge normalement sur $A(z_0, r_1, r_2)$. Ceci assure en particulier que la série converge sur tout l'anneau $A(0, R_1, R_2)$. En outre, puisque la série converge uniformément sur tous les compacts de $A(z_0, R_1, R_2)$, la fonction f est holomorphe d'après le Corollaire 5.15. Enfin, pour $r \in]R_1, R_2[$, la convergence normale de la série sur $A(z_0, r_1, r_2)$ pour $R_1 < r_1 < r < r_2 < R_2$ assure que l'on peut intervertir la somme et l'intégrale dans le calcul suivant :

$$\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-in\theta} \, d\theta = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} a_n r^k e^{ik\theta} e^{-in\theta} \, d\theta = 2\pi r^n \, a_n.$$

Cela conclut la démonstration. □

Inversement, de même qu'une fonction holomorphe sur un disque est toujours la somme d'une série entière, on montre maintenant que toute fonction holomorphe sur un anneau est la somme d'une série de Laurent. Pour cela, on a besoin de généraliser la formule de Cauchy sur un anneau (qui n'est pas étoilé). On commence par montrer que l'intégrale d'une fonction holomorphe sur $A(z_0, R_1, R_2)$ le long d'un cercle centré en z_0, qui n'est pas forcément nulle, ne dépend pas du rayon du cercle.

Lemme 6.25. *Soient $z_0 \in \mathbb{C}$, $R_1, R_2 \in [0, +\infty]$ avec $R_1 > R_2$ et f une fonction holomorphe sur l'anneau $A(z_0, R_1, R_2)$. Alors l'intégrale de f le long du cercle $c(z_0, r)$ ne dépend pas de $r \in]R_1, R_2[$.*

Démonstration. Pour $r \in]R_1, R_2[$ on note

$$\Phi(r) = \int_{c(z_0,r)} f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) ire^{i\theta}\,d\theta.$$

Par le théorème de dérivation sous l'intégrale on obtient que Φ est dérivable sur $]R_1, R_2[$ et pour $r \in]R_1, R_2[$ on a

$$\Phi'(r) = i\int_0^{2\pi} \big(re^{i\theta} f'(z_0 + re^{it\chi}) + f(z_0 + re^{i\theta})\big)e^{i\theta}\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{d}{d\theta}\big(f(z_0 + re^{i\theta})e^{i\theta}\big)\,d\theta = 0.$$

D'où le résultat. □

On peut maintenant montrer un résultat analogue à la formule de Cauchy dans un anneau :

Proposition 6.26. *Soient $z_0 \in \mathbb{C}$, $R_1, R_2 \in [0, +\infty]$ avec $R_1 > R_2$ et f une fonction holomorphe sur l'anneau $A(z_0, R_1, R_2)$. Soit $z \in A(z_0, R_1, R_2)$. Alors pour $r_1, r_2 \in]R_1, R_2[$ tels que $z \in A(z_0, r_1, r_2)$ on a*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{c(z_0,r_2)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\,d\zeta - \frac{1}{2i\pi}\int_{c(z_0,r_1)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\,d\zeta.$$

Démonstration. Pour $\zeta \in A(z_0, R_1, R_2)$ on note

$$g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} & \text{si } \zeta \neq z, \\ f'(z) & \text{si } \zeta = z. \end{cases}$$

Cela définit une fonction g holomorphe sur $A(z_0, R_1, R_2)$ (la singularité en z est artificielle par continuité de g). D'après le Lemme 6.25 on a alors

$$\int_{c(z_0,r_1)} g(\zeta)\,d\zeta = \int_{c(z_0,r_2)} g(\zeta)\,d\zeta,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2i\pi}\int_{c(z_0,r_2)} &\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\,d\zeta - \frac{1}{2i\pi}\int_{c(z_0,r_1)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\,d\zeta \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_{c(z_0,r_2)} \frac{f(z)}{\zeta - z_0}\,d\zeta - \frac{1}{2i\pi}\int_{c(z_0,r_1)} \frac{f(z)}{\zeta - z_0}\,d\zeta \\
&= 2i\pi\, f(z)\big(\mathsf{Ind}(c(z_0,r_2), z) - \mathsf{Ind}(c(z_0,r_1), z)\big) \\
&= 2i\pi\, f(z). \quad \square
\end{aligned}$$

On peut maintenant montrer le résultat suivant :

Théorème 6.27. *Soient $z_0 \in \mathbb{C}$, $R_1, R_2 \in [0, +\infty]$ avec $R_1 > R_2$ et f une fonction holomorphe sur l'anneau $A(z_0, R_1, R_2)$. Alors il existe une unique suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que f est la somme sur $A(z_0, R_1, R_2)$ de la série de Laurent $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$. En outre, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a*

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}\,dt.$$

Démonstration. La dernière assertion est conséquence de la Proposition 6.24 et assure l'unicité d'un développement en série de Laurent pour f. On montre maintenant que f est effectivement la somme de la série de Laurent $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(z - z_0)^n$ où les a_n sont ainsi définis.

Soient r_1 et r_2 tels que $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$. Pour $z \in A(z_0, r_1, r_2)$ on a par la Proposition 6.26

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r_2e^{i\theta})}{z_0 + r_2e^{i\theta} - z} r_2e^{i\theta}\,d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r_1e^{i\theta})}{z_0 + r_1e^{i\theta} - z} r_1e^{i\theta}\,d\theta.$$

On écrit

$$\frac{r_2e^{i\theta}}{z_0 + r_2e^{i\theta} - z} = \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{r_2e^{i\theta}}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z - z_0}{r_2e^{i\theta}}\right)^n.$$

Puisque cette série converge absolument, on peut intervertir série et intégrale pour écrire

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+r_2e^{i\theta})}{z_0+r_2e^{i\theta}-z}ir_2e^{i\theta}\,d\theta &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi r_2^n}\int_0^{2\pi}f(z_0+r_2e^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta\right)(z-z_0)^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n.\end{aligned}$$

On procède de façon analogue pour l'autre terme. On écrit

$$\frac{r_1e^{i\theta}}{z_0+r_1e^{i\theta}-z} = -\frac{r_1e^{i\theta}}{z-z_0}\frac{1}{1-\frac{r_1e^{i\theta}}{z-z_0}} = -\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{r_1e^{i\theta}}{z-z_0}\right)^{k+1},$$

puis

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+r_1e^{i\theta})}{z_0+r_1e^{i\theta}-z}r_1e^{i\theta}\,d\theta &= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{{r_1}^{k+1}}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+r_1e^{i\theta})e^{i(k+1)\theta}\,d\theta\right)(z-z_0)^{-(k+1)}\\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1}a_n(z-z_0)^n.\end{aligned}$$

D'où $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$. □

On revient maintenant à l'étude des singularités isolées d'une fonction holomorphe. La distinction entre les trois types de singularités (artificielle, pôle, essentielle) est claire si on connait le développement de Laurent.

Proposition 6.28. *Soit $z_0\in\mathbb{C}$, $R>0$ et f une fonction holomorphe sur $D^*(z_0,R)$. On écrit le développement de Laurent de f en z_0 :*

$$f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n(z-z_0)^n.$$

- *Si $a_{-n}=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ alors z_0 est une singularité artificielle de f.*
- *Si $a_{-n}\neq 0$ pour un nombre fini non nul de $n\in\mathbb{N}^*$ alors z_0 est un pôle de f.*
- *Si $a_{-n}\neq 0$ pour une infinité de $n\in\mathbb{N}^*$ alors z_0 est une singularité artificielle de f.*

On termine ce paragraphe avec le Théorème des Résidus. Même s'il est moins souvent utilisé dans ce cas, il reste tout à fait valable en présence de singularité essentielles.

Définition 6.29. Soit $z_0\in\mathbb{C}$, $R>0$ et f une fonction holomorphe sur $D^*(z_0,R)$. On écrit le développement de Laurent de f en z_0 :

$$f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n(z-z_0)^n.$$

Alors on appelle *résidu* de f le coefficient d'ordre -1 :

$$\mathsf{Res}(f,z_0)=a_{-1}=\frac{1}{2i\pi}\int_{C(z_0,r)}f(z)\,dz.$$

Théorème 6.30 (Théorème des résidus)**.** *Soit Ω un ouvert étoilé de $\mathbb{C}$ et $\mathcal{P}$ une partie discrète de Ω. Soit f une fonction holomorphe sur $\Omega\setminus\mathcal{P}$. Soit γ un lacet de $\Omega\setminus\mathcal{P}$. Alors on a*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\,dz=\sum_{\zeta\in\mathcal{P}}\mathsf{Res}(f,\zeta)\mathsf{Ind}(\gamma,\zeta)$$

(la somme ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls).

La démonstration de ce théorème est en fait la même que la version méromorphe. En (6.19), la partie singulière que l'on retire est maintenant une somme infinie. Puisque la série de Laurent de f en z_0 est bien définie sur $A(z_0,0,R_2)$ pour un certain $R_2>0$ ($R_1=0$ avec les notations de la Définition 6.23), cette partie singulière est normalement convergente sur tous les compacts de $\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$. Ainsi, pour le calcul (6.20), on peut intervertir intégrale et série, et on conclut exactement de la même façon.

7 Exemples de fonctions spéciales

7.1 Fonction Γ d'Euler

On cherche dans cette section une fonction holomorphe (sur un ouvert aussi grand que possible et contenant au moins les entiers naturels) qui vaut $n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 7.1. Pour $z \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}(z) > 0$ on pose

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1}\, dt.$$

On rappelle que les puissances complexes ont été introduites au Paragraphe 3.4 (voir la Remarque 3.23). Pour t réel, sauf mention contraire on utilise la détermination principale du logarithme, qui coïncide avec le logarithme népérien sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, dans la définition de Γ, le facteur t^{z-1} n'est rien d'autre que $e^{(z-1)\ln(t)}$.

Dans la suite on notera

$$\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}\,.$$

Proposition 7.2. *La fonction Γ est bien définie sur $\mathbb{C}_+$.*

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}_+$. La fonction $f : t \mapsto e^{-t}t^{z-1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour $t > 0$ on a

$$|f(t)| \leqslant e^{-t}\left|e^{(z-1)\ln(t)}\right| = e^{-t}e^{(\mathrm{Re}(z)-1)\ln(t)} = e^{-t}t^{\mathrm{Re}(z)-1}.$$

Par croissances comparées on a alors

$$|f(t)| \underset{t\to 0}{=} O\left(t^{\mathrm{Re}(z)-1}\right) \quad \text{et} \quad |f(t)| \underset{t\to+\infty}{=} O\left(t^{-2}\right).$$

Par comparaison avec les intégrales de Riemann, on obtient que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. $\square$

Proposition 7.3. *La fonction Γ est holomorphe sur $\mathbb{C}_+$.*

Démonstration. Pour $\varepsilon > 0$ et $z \in \mathbb{C}_+$ on pose

$$\Gamma_\varepsilon(z) = \int_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-t}t^{z-1}\, dt.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction Γ_ε ainsi définie est bien holomorphe sur $\mathbb{C}_+$ d'après le Théorème 5.16.

Soit K un compact de $\mathbb{C}_+$. Il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha \leqslant \mathrm{Re}(z) \leqslant \beta$ pour tout $z \in K$. Pour $z \in K$ on a alors

$$|\Gamma_\varepsilon(z) - \Gamma(z)| \leqslant \int_0^\varepsilon e^{-t}\left|t^{z-1}\right| dt + \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{+\infty} e^{-t}\left|t^{z-1}\right| dt \leqslant \int_0^\varepsilon t^{a-1}\, dt + \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{+\infty} e^{-t}t^{b-1}\, dt.$$

Le membre de droite ne dépend pas de $z \in K$ et tend vers 0 quand ε tend vers 0, donc Γ_ε tend uniformément vers Γ sur K quand $\varepsilon \to 0$. Ceci étant valable pour tout compact K de $\mathbb{C}_+$, on obtient par le Théorème 5.14 que Γ est holomorphe sur $\mathbb{C}_+$. $\square$

Proposition 7.4. *Pour tout $z \in \mathbb{C}_+$ on a*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}_+$. Par intégration par parties on a

$$z\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t}zt^{z-1}\, dt = \left[e^{-t}t^z\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t}t^z\, dt = \Gamma(z+1). \qquad \square$$

Corollaire 7.5. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\Gamma(n+1) = n!$.*

Démonstration. On a
$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1.$$
On conclut ensuite par récurrence en utilisant la Proposition 7.4. □

Théorème 7.6. *La fonction Γ s'étend en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ (qu'on note toujours Γ) dont les pôles sont les entiers strictement négatifs. Les résidus correspondant sont alors*
$$\mathsf{Res}(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}. \tag{7.21}$$
Démonstration. On observe que pour les mêmes raisons que précédemment la fonction
$$z \mapsto \int_1^{+\infty} e^{-t} t^z\,dt$$
est en fait entière. Les difficultés viennent de l'intégrale sur $]0,1]$. Pour $z \in \mathbb{C}_+$ on a
$$e^{-t} t^{z-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n t^{n+z-1}}{n!}.$$
En retirant éventuellement le premier terme, on obtient une série normalement convergente sur $]0,1]$ (par rapport à la variable t). On peut donc écrire
$$\int_0^1 e^{-t} t^{z-1}\,dt = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_0^1 \frac{(-1)^n t^{n+z-1}}{n!}\,dt = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)}.$$
On cherche à prolonger le membre de droite en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. Soit $R > 0$. On fixe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > 2R$. La somme $\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)}$ s'étend en une fonction méromorphe sur $D(0,R)$ dont l'ensemble des pôles est $D(0,R) \cap \mathbb{Z}_-$ et dont les résidus correspondants sont bien donnés par (7.21). Pour $n > N$ et $z \in D(0,R)$ on a
$$\left|\frac{(-1)^n}{n!(n+z)}\right| \leqslant \frac{1}{n!},$$
donc la série $\sum_{n=N+1} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)}$ converge normalement sur $D(0,R)$. Sa somme y définit donc une fonction holomorphe.

Ceci étant valable pour tout $R > 0$, l'unicité d'un prolongement holomorphe assure que Γ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$. En outre les singularités sont bien des pôles dont les résidus sont donnés par (7.21). □

***Exercice* 12.** Donner une autre preuve du Théorème 7.6 en utilisant la Proposition 7.4.

Proposition 7.7 (Formule des compléments)**.** *Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ on a*
$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$
Démonstration. Les deux membres de l'égalité définissent des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$. Par unicité d'un prolongement holomorphe (Théorème 5.4), il suffit de montrer l'égalité pour $z \in]0,1[$.

Soit $\alpha \in]0,1[$. On a
$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(t+s)} t^{\alpha-1} s^{-\alpha}\,ds\,dt = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(t+s)} \left(\frac{t}{s}\right)^{\alpha} \frac{1}{t}\,ds\,dt.$$
On effectue le changement de variables $(u,v) = \left(t+s, \frac{s}{t}\right)$, $du\,dv = \left(1 + \frac{s}{t}\right)/t\,ds\,dt$, ce qui donne
$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-u} \frac{1}{(1+v)v^{\alpha}}\,dv\,du.$$
D'après le calcul effectué à l'Exercice 11 on obtient
$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{1}{\sin(\pi\alpha)}.$$
Cela prouve la proposition. □

7.2 Fonction ζ de Riemann

Pour $s \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}(s) > 1$ on pose

$$\zeta(s) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^s}.$$

Proposition 7.8. *La série ζ est normalement convergente sur tout compact de $\{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 1\}$.*

Démonstration. Soit K un compact de $\{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 1\}$. Il existe $\alpha > 1$ tel que $\mathrm{Re}(s) \geqslant \alpha$ pour tout $s \in K$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a alors

$$\frac{1}{|n^s|} = \frac{1}{\left|e^{s \ln(n)}\right|} = \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(s)}} \leqslant \frac{1}{n^\alpha}.$$

D'où le résultat puisque la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} n^{-\alpha}$ est convergente. $\square$

D'après le Théorème 5.14, la fonction ζ ainsi définie est holomorphe sur $\{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 1\}$. On peut montrer le résultat suivant :

Théorème 7.9. *La fonction ζ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ et admet en 1 un pôle simple.*

Pour cela on utilise la fonction annexe suivante :

Proposition 7.10. *Pour $t > 0$ on pose*

$$\theta(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\pi m^2 t}.$$

Pour tout $t > 0$ on a alors

$$\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \theta\left(\frac{1}{t}\right).$$

8 Compléments

8.1 Ouverts simplement connexes

La Proposition 4.25 (critère d'existence d'une primitive), le Théorème de Cauchy (Théorème 4.28) et la Formule de Cauchy (Théorème 4.35) ont tous été énoncés dans un ouvert étoilé. C'est un cadre pratique, qui sera suffisant pour la plupart des applications. Mais il est de tout de même raisonnable de se demander si c'est le cadre naturel pour que les arguments fonctionnent ou si c'est juste une hypothèse de confort.

On rappelle qu'il n'y a aucun espoir pour que ces résultats soient vrais pour n'importe quelle fonction holomorphe sur n'importe quel ouvert. Comme on l'a déjà remarqué, le fait que

$$\int_{c(0,1)} \frac{dz}{z} \neq 0,$$

contredit l'existence d'une primitive et le théorème de Cauchy sur $\mathbb{C}^*$. La formule de Cauchy, conséquence du théorème de Cauchy, a également peu de chances d'être vraie (vérifier que ce n'est effectivement pas le cas).

C'est le moment de se rappeler où on a utilisé cette hypothèse d'être sur un ouvert étoilé. On l'a utilisé pour assurer qu'une fonction dont l'intégrale est nulle sur tout lacet triangulaire admet une primitive. Pour construire la primitive, on a utilisé l'intégrale le long des segments issus du point z_0 autour duquel Ω est étoilé. On peut procéder différemment, et définir une primitive en intégrant le long de chemin qui ne sont pas nécessairement des segments. C'est ce que l'on fera à la Proposition 8.1. Mais on ne pourra plus utiliser le Lemme 4.27 dans ce cas, il nous faudra donc donner une autre condition.

Et cette condition pour assurer l'existence d'une primitive n'est autre que… le Théorème de Cauchy.

Proposition 8.1. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction continue sur Ω. Alors f admet une primitive sur Ω si et seulement si pour tout lacet γ dans Ω on a*

$$\int_\Omega f(z)\,dz = 0. \tag{8.22}$$

La preuve suit celle de la Proposition 4.25, si ce n'est qu'on suit un chemin quelconque pour aller de z à z_0, et qu'il n'y a pas unicité d'un tel chemin.

Démonstration. On sait déjà par la Proposition 4.23 que si f admet une primitive sur Ω alors son intégrale le long de tout lacet est nulle. On suppose maintenant que (8.22) est vérifiée. Il suffit de montrer que f admet une primitive sur chacune des composantes connexes de Ω. Pour simplifier, on suppose que Ω est connexe. On fixe $z_0 \in \Omega$. Pour $z \in \Omega$ on pose

$$F(z) = \int_{\gamma(z_0,z)} f,$$

où $\gamma(z, z_0)$ est un chemin joignant z_0 à z. Pour que cette définition ait un sens, il faut s'assurer qu'il existe effectivement un chemin joignant z_0 à z (c'est vrai par connexité par arcs de Ω) et que la valeur de $F(z)$ ne dépend pas du choix de ce chemin. On considère donc deux chemins γ_1 et γ_2 joignant z_0 à z. Le chemin $\gamma_1 * (-\gamma_2)$ est alors un lacet, donc

$$0 = \int_{\gamma_1 * (-\gamma_2)} f = \int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f.$$

Cela prouve que $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$, donc la definition de F est licite. Montrons que F ainsi définie est une primitive de f. Soit $z \in \Omega$. Soit $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset \Omega$. Pour $h \in D^*(0, r)$ on a alors, toujours d'après (8.22),

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_{\sigma(z,z+h)} f(\zeta)\,d\zeta \xrightarrow[h\to 0]{} f(z),$$

où la limite est obtenue comme dans la preuve de la Proposition 4.25. □

Le Théorème de Cauchy est en fait également une condition nécessaire et suffisante pour la Formule de Cauchy.

Proposition 8.2. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\gamma : [a, b] \to \Omega$ un lacet. Alors on a*

$$\int_\gamma g(z)\,dz = 0 \tag{8.23}$$

pour toute fonction g holomorphe sur Ω si et seulement si pour toute fonction f holomorphe sur Ω et $z_0 \in \Omega \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$ on a

$$f(z_0)\mathsf{Ind}(\gamma, z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz. \tag{8.24}$$

Démonstration. On suppose que (8.24) est vraie. Soit alors g une fonction holomorphe sur Ω. On fixe $z_0 \in \Omega \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$ et on considère la fonction $f : z \mapsto (z - z_0)g(z)$, holomorphe sur Ω. D'après (8.24) on a alors

$$\int_\gamma g(z)\,dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = 2i\pi f(z_0)\mathsf{Ind}(\gamma, z_0) = 0.$$

Inversement, on suppose que (8.23) est vraie. Soient f une fonction holomorphe sur Ω et $z_0 \in \Omega \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$. Pour $z \in \Omega$ on pose

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & \text{si } z \neq z_0, \\ f'(z_0) & \text{si } z = z_0. \end{cases}$$

La fonction g est alors continue sur Ω et holomorphe sur $\Omega \setminus \{z_0\}$. D'après la Proposition 6.2, g est en fait holomorphe sur Ω (notez le progrès par rapport à la preuve du Théorème 4.35

où on avait dû composer avec une fonction holomorphe sauf en un point, ce qui nous avait obligé à montrer le Lemme 4.34 plutôt que d'utiliser directement le Lemme 4.27). D'après (8.23) on a alors

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma g(z)\,dz + \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,dz = f(z_0)\mathsf{Ind}(\gamma, z_0).$$

D'où l'équivalence annoncée. □

Ainsi, toute notre discussion se résume à déterminer les ouverts Ω de $\mathbb{C}$ sur lesquels le Théorème de Cauchy est vrai.

Essayons de comprendre la différence entre le critère d'existence d'une primitive donné à la Proposition 4.25 et celui donnée à la Proposition 8.1. La différence n'est pas tellement le choix d'un chemin « droit » pour définir la primitive. Et le choix d'un ouvert étoilé par rapport à z_0 est un choix pratique. Il assure que pour $z \in \Omega$ et h assez petit le triangle de sommets z_0 z et $z+h$ utilisée pour la preuve est bien inclus dans Ω. Et c'est là que se cache le point clé.

D'un point de vue pragmatique, l'intérêt du critère de la Proposition 4.25 est qu'il est satisfait par les fonctions holomorphes d'après le Lemme de Goursat (Lemme 4.27). On rappelle que pour ce lemme on demande que la fonction f soit holormorphe sur tout le triangle de sommets a, b et c, et pas seulement sur son bord qui constitue le chemin le long duquel on intègre. Et c'est exactement ce point qui n'est pas vérifié par notre contre-exemple préféré, la fonction $1/z$ sur le cercle unité. Cette fonction est bien holomorphe au voisinage du cercle unité, mais pas sur tout le domaine qu'elle délimite. Il y a un *trou*. Et l'intérêt d'un ouvert étoilé est qu'un lacet ne peut jamais enlacer un trou.

On va montrer le théorème suivant :

Théorème 8.3. *Soient Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, f une fonction holomorphe sur Ω et $\gamma : [a, b] \to \Omega$ un lacet. Alors pour tout $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$ on a*

$$f(z_0)\mathsf{Ind}(\gamma, z_0) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz.$$

Avec les résultats précédents on obtient donc les conséquences suivantes :

Corollaire 8.4. *Soient Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, f une fonction holomorphe sur Ω et $\gamma : [a, b] \to \Omega$ un lacet. Alors on a*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Corollaire 8.5. *Soit Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$. Alors tout fonction holomorphe sur Ω admet une primitive sur Ω.*

Ces énoncés sont très simples, à condition de comprendre ce que signifie *simplement connexe*. Intuitivement, un ouvert simplement connexe est un ouvert connexe qui n'a pas de *trou*. Ainsi tout ouvert étoilé sera simplement connexe, mais $\mathbb{C}^*$ ne le sera pas, pas plus que $\mathbb{C} \setminus D(z_0, r)$ pour n'importe quels $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$.

Définition 8.6. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. On appelle *trou* de Ω une composante connexe bornée de $\mathbb{C} \setminus \Omega$.

Définition 8.7. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. On dit que Ω est *simplement connexe* s'il est connexe et s'il n'a pas de trou.

Exemple 8.8. $\mathbb{C}^*$ est connexe mais pas simplement connexe. Pour $z_0 \in \mathbb{C}$ et R_1, R_2 tels que $0 < R_1 < R_2$ alors l'anneau $A(z_0, R_1, R_2)$ est connexe mais pas simplement connexe.

Proposition 8.9. *Un ouvert étoilé de $\mathbb{C}$ est simplement connexe.*

Démonstration. On considère $z_0 \in \Omega$ tel que Ω est étoilé par rapport à z_0. Soit $\omega_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ (si $\Omega = \mathbb{C}$ le résultat est clair). Alors pour tout $t \in [0, +\infty[$ le point

$$\omega(t) = \omega_0 + t(\omega_0 - z_0)$$

n'est pas dans Ω. Puisque $|\omega(t)| \to +\infty$ quand $t \to +\infty$, on en déduit que ω_0 est dans une composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \Omega$. □

Exemple 8.10. On considère l'ouvert Ω défini comme le complémentaire des deux demi-droites $\mathbb{R}_+$ et $i + \mathbb{R}_+$. Alors Ω est simplement connexe mais n'est pas étoilé.

Dans le cas du chemin triangulaire $\tau(z_0, z, z+h)$, on demande pour éviter les trous que la fonction holomorphe soit holomorphe « à l'intérieur du triangle ». Et l'intérieur du triangle est exactement l'ensemble des points « enlacés » par le chemin τ. C'est-à-dire l'ensemble des points de $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\tau)$ dont l'indice par rapport à τ est 1, tandis que les points « à l'extérieur » ont un indice nul. Ainsi, la condition est qu'aucun point de $\mathbb{C} \setminus \Omega$ n'est enlacé par τ ou, en termes plus rigoureux, tout point de $\mathbb{C} \setminus \Omega$ est d'indice nul par rapport à τ.

Pour un lacet général, on ne peut pas parler de l'intérieur du chemin, par contre cette dernière propriété a du sens, et c'est effectivement la bonne propriété pour avoir le Théorème de Cauchy.

Définition 8.11. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\gamma : [a, b] \to \Omega$ un lacet. On dit que γ est *homologue à 0* si

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega, \quad \mathsf{Ind}(\gamma, z) = 0.$$

Le lien entre ouverts simplement connexes et lacet homologues à 0 est le suivant :

Proposition 8.12. *Soit Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$. Alors tout lacet $\gamma : [a, b] \to \Omega$ est homologue à 0.*

Démonstration. Soit $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$ tel que $\mathsf{Ind}(\gamma, z_0) \neq 0$. D'après la Proposition 4.33, z_0 appartient à une composante connexe bornée de $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$, qu'on note T. On suppose par l'absurde que z_0 n'est pas dans Ω. Puisque $\mathrm{Im}(\gamma) \subset \Omega$, z_0 est dans une composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \Omega$ qui est incluse dans T est donc bornée. Cela donne une contradiction avec la Définition 8.7. □

Proposition 8.13. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, f une fonction holomorphe sur Ω et $\gamma : [a, b] \to \Omega$ un lacet homologue à 0. Alors pour $z_0 \in \Omega \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$ on a*

$$f(z_0)\mathsf{Ind}(\gamma, z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

Démonstration. Pour $z, w \in \Omega$ on pose

$$q(z, w) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} & \text{si } z \neq w, \\ f'(z) & \text{si } z = w. \end{cases}$$

Pour $w \in \Omega$ fixé, la fonction $z \mapsto q(z, w)$ est continue sur Ω et holomorphe sur $\Omega \setminus \{w\}$, et donc holomorphe sur Ω. En outre l'application

$$h : w \mapsto \int_\gamma q(z, w)\, dz = \int_a^b q(\gamma(t), w)\gamma'(t)\, dt$$

est holomorphe sur Ω d'après le Théorème 5.16. On pose

$$\mathcal{I}_0 = \{w \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\gamma) \,|\, \mathsf{Ind}(\gamma, w) = 0\}.$$

$\mathcal{I}_0$ est un ouvert de $\mathbb{C}$, et comme γ est homologue à 0 on a $\Omega \cup \mathcal{I}_0 = \mathbb{C}$. En outre il existe $R > 0$ tel que tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \geqslant R$ est dans $\mathcal{I}_0$. Pour $w \in \mathcal{I}_0$ on note alors

$$g(w) = \int_\gamma \frac{f(z)}{z - w}\, dz.$$

De nouveau par holomorphie sous l'intégrale, g est une fonction holomorphe sur $\mathcal{I}_0$. Pour $w \in \Omega \cap \mathcal{I}_0$ on a alors

$$g(w) - h(w) = \int_\gamma \frac{f(w)}{z - w}\, dz = 2i\pi\, f(w)\mathsf{Ind}(\gamma, w) = 0.$$

Ainsi g et h coïncident sur leur domaine commun de définition. On peut donc définir une fonction κ sur $\mathbb{C}$ en posant

$$\kappa(w) = \begin{cases} g(w) & \text{si } w \in \mathcal{I}_0, \\ h(w) & \text{si } w \in \Omega. \end{cases}$$

Cette fonction κ est alors holomorphe sur $\mathbb{C}$. En outre pour $|w| \geqslant R$ on a par passage à la limite sous l'intégrale

$$\kappa(w) = g(w) \xrightarrow[|w| \to +\infty]{} 0.$$

D'après le théorème de Liouville, la fonction κ est nulle. Ainsi h est nulle sur Ω et en particulier pour tout $w \in \Omega \setminus \operatorname{Im}(\gamma)$ on a

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z - w}\, dz = \int_\gamma \frac{f(w)}{z - w}\, dz = f(w)\mathsf{Ind}(\gamma, w).$$

D'où le résultat. $\square$

Avec les Propositions 8.12 et 8.13 on a donc démontré le Théorème 8.3. On note toutefois que pour la Proposition 8.13 on n'a pas supposé que Ω est simplement connexe. Ainsi, si γ est un lacet homologue à 0 dans un ouvert qui n'est pas simplement connexe, alors on a toujours la formule de Cauchy *pour ce lacet*. C'est par exemple le cas dès que $\mathbb{C} \setminus \Omega$ est inclus dans la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \operatorname{Im}(\gamma)$, mais pas seulement. Dans ce cas, et avec la même preuve que pour la proposition 8.2, on a aussi le Théorème de Cauchy *pour ce lacet* :

Corollaire 8.14. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, f une fonction holomorphe sur Ω et $\gamma : [a, b] \to \Omega$ un lacet homologue à 0. Alors on a*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

La Proposition 8.12 assure que si Ω est un ouvert simplement connexe alors tous les lacets tracés dans Ω sont homologues à 0. La réciproque est également vraie. Ainsi, si tous les lacets tracés dans un ouvert connexe Ω sont homologues à 0, alors Ω est simplement connexe. Pour le démontrer, on considère un ouvert Ω qui n'est pas simplement connexe, puis un trou T de Ω, et on construit un lacet dans Ω qui entoure ce trou (une fois dans le sens direct, par exemple). On obtient alors un lacet qui n'est pas homologue à 0 puisque les points de T sont d'indice 1 par rapport à γ. On ne détaille pas la construction d'un tel γ ici.

Si on considère $w \in T$ et $f : z \mapsto 1/(z - w)$, alors f est une fonction holomorphe sur Ω dont l'intégrale sur le lacet γ n'est pas nulle, donc f n'admet pas de primitive sur Ω. Cela prouve que si Ω est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, alors toute fonction f holomorphe sur Ω admet une primitive si et seulement si Ω est simplement connexe.

On termine ce paragraphe en énonçant enfin la « bonne » version du Théorème des Résidus.

Théorème 8.15 (Théorème des résidus)**.** *Soit Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ et $\mathcal{P}$ une partie discrète de Ω. Soit f une fonction holomorphe sur $\Omega \setminus \mathcal{P}$. Soit γ un lacet de $\Omega \setminus \mathcal{P}$. Alors on a*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{\zeta \in \mathcal{P}} \mathsf{Res}(f, \zeta)\mathsf{Ind}(\gamma, \zeta)$$

(la somme ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls).

La seule différence par rapport au Théorème 6.30 est qu'on utilise maintenant le Corollaire 8.4 pour assurer que l'intégrale le long de γ de la fonction g qui apparaît dans la preuve est nulle.

8.2 Un exemple d'application théorique du Théorème des Résidus : compter les zéros d'une fonction

Définition 8.16. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et f une fonction méromorphe sur un voisinage de z_0. On note

$$\mathsf{Val}(f, z_0) = \begin{cases} n & \text{si } z_0 \text{ est un zéro d'ordre } n \in \mathbb{N} \text{ de } f, \\ -n & \text{si } z_0 \text{ est un pôle d'ordre } n \in \mathbb{N}^* \text{ de } f. \end{cases}$$

Ainsi, $\mathsf{Val}(f, z_0)$ est l'indice du premier coefficient non nul dans le développement de Laurent de f en z_0.

Proposition 8.17. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction méromorphe sur Ω. Alors les pôles de f'/f sont les zéros et les pôles de f. Plus précisément, pour $z_0 \in \Omega$ on a*

$$\mathsf{Res}\left(\frac{f'}{f}, z_0\right) = \mathsf{Val}(f, z_0).$$

Proposition 8.18. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction méromorphe sur Ω (non identiquement nulle). Soit F l'ensemble des zéros et des pôles de f. Soit γ un lacet dans $\Omega \setminus F$. Alors on a*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'}{f} = \sum_{z \in F} \mathsf{Val}(f, z)\mathsf{Ind}(f, z).$$

Théorème 8.19 (Théorème de Rouché)**.** *Soient Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ et f et g deux fonctions holomorphes sur Ω. Soit K un compact de Ω dont le bord peut être paramétré par un lacet γ. On suppose que*

$$\forall z \in \partial K, \quad |f(z) - g(z)| < |g(z)|.$$

Alors f et g ont même nombre de zéros (comptés avec multiplicités) dans K.

Démonstration. On observe que l'hypothèse assure que ni f ni g ne s'annulent sur ∂K. La fonction $h = f/g$ est méromorphe sur Ω et holomorphe sur un voisinage de ∂K. Il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de ∂K tel que pour tout $z \in \mathcal{V}$ on a

$$|h(z) - 1| < 1.$$

Soit ℓ une détermination du logarithme sur $D(1, 1)$. La fonction $\ell \circ h$ est alors une primitive de h'/h sur $\mathcal{V}$. Puisque cette fonction admet une primitive sur $\mathcal{V}$, on a

$$0 = \int_\gamma \frac{h'}{h} = \int_\gamma \left(\frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}\right).$$

Ainsi

$$\int_\gamma \frac{f'}{f} = \int_\gamma \frac{g'}{g},$$

et on conclut avec la Proposition 8.18. $\square$