

Séries de Fourier

10 octobre 2019

Les séries de Fourier ont été introduites pour résoudre l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = \partial_{xx} u(t, x), & (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, \pi], \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, & t > 0 \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in [0, \pi]. \end{cases} \quad (0.1)$$

L'idée est de combiner des solutions élémentaires. Si u_0 est une fonction de la forme $x \mapsto \sin(nx)$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors la fonction

$$(t, x) \mapsto e^{-n^2 t} \sin(nx)$$

est solution. Par linéarité de l'équation, si u_0 est combinaison linéaire de telles fonctions sinus, alors on sait également résoudre l'équation. Joseph Fourier affirme alors que toute fonction u_0 qui s'annule en 0 et π s'écrit comme somme infinie de fonctions sinus,

$$u_0(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} b_n \sin(nx),$$

et que la solution de (0.1) est alors donnée par

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} b_n \sin(nx) e^{-n^2 t}.$$

Les fonctions $\sigma_n : x \mapsto \sin(nx)$ jouent un rôle particulier dans cette histoire car ce sont, en quelque sorte, des fonctions propres pour l'opérateur ∂_{xx} :

$$\sigma_n'' = -n^2 \sigma_n.$$

La valeur propre correspondante, $-n^2$, apparaît alors naturellement dans le facteur exponentiel en temps.

La question qui est alors soulevée est celle de la « diagonalisation » de l'opérateur ∂_{xx} . Peut-on effectivement, comme l'affirme Fourier, écrire toute fonction comme « somme » de fonctions propres ?

Même si Fourier a été un peu rapide en affirmant que c'était bien le cas, son observation occupe à double titre une place capitale dans l'histoire de l'analyse. D'une part, l'idée fonctionne, et les séries de Fourier (et la transformée de Fourier, adaptée aux problèmes sur tout \mathbb{R}) est un outil absolument crucial en analyse (pour l'étude des équations aux dérivées partielles, le traitement du signal, ...). D'autre part, la nécessité de justifier l'observation de Fourier a obligé les mathématiciens à mieux formaliser des concepts fondamentaux, telle que la notion de fonction elle-même. Cela a par exemple été un tournant dans le développement du calcul intégral, qui intervient dans la définition des coefficients de Fourier (en particulier, l'intégrale devient un outil d'analyse, et n'est plus seulement destinée à calculer des aires).

1 Série de Fourier d'une fonction périodique

1.1 Fonctions périodiques

On commence par rappeler la définition d'une fonction périodique.

Définition 1.1. Soient $T > 0$ et f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On dit que f est T -périodique si pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f(x + T) = f(x).$$

Dans ces notes on se concentrera sur les fonctions 2π -périodiques. On remarque que si f est T -périodique pour un certain $T > 0$, alors la fonction

$$x \mapsto f\left(\frac{xT}{2\pi}\right)$$

est 2π -périodique. Ainsi, tous les résultats obtenus pour des fonctions 2π -périodiques s'étendent sans difficultés aux fonctions T -périodiques (voir la section 6).

D'autre part, une fonction 2π -périodique définit par passage au quotient une fonction sur le tore (ou cercle, en dimension 1)

$$\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}).$$

Inversement, une fonction sur le cercle définit une fonction 2π -périodique sur \mathbb{R} . Il est donc équivalent de s'intéresser aux fonctions 2π -périodiques sur \mathbb{R} ou aux fonctions sur le tore.

Enfin, une fonction f sur $]-\pi, \pi]$ (ou sur n'importe quel intervalle de longueur 2π) s'étend par périodicité en une fonction \tilde{f} définie sur \mathbb{R} et 2π -périodique. Étant donné $x \in \mathbb{R}$ il existe un unique couple $(x_0, k) \in]-\pi, \pi] \times \mathbb{Z}$ tel que $x = x_0 + 2k\pi$. On pose alors $\tilde{f}(x) = f(x_0)$, ce qui définit une fonction \tilde{f} sur \mathbb{R} qui est bien 2π -périodique.

Il est important de noter que si f est continue $]-\pi, \pi]$, alors \tilde{f} ne l'est pas forcément sur \mathbb{R} . La remarque vaut pour tous les niveaux de régularité (fonctions de classe C^1 , de classe C^∞ , etc.).

De même, une fonction sur $[0, \pi]$ (comme en (0.1)) peut d'abord être prolongée par imparité (ou parité) sur $]-\pi, \pi]$ avant d'être prolongée par 2π -périodicité.

1.2 Polynômes trigonométriques

Dans l'esprit de la résolution de l'équation de la chaleur (0.1), on cherche à écrire toute fonction comme somme (éventuellement infinie) de fonctions 2π -périodiques, pour lesquelles il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ telles que $u' = \lambda u$ (fonctions propres pour l'opérateur de dérivation, par rapport au contexte de (0.1), on n'impose pas de point d'annulation pour nos fonctions). Les fonctions candidates sont les fonctions de la forme $x \mapsto \alpha e^{\lambda x}$. Et pour qu'une telle fonction soit 2π -périodique, λ doit être de la forme in pour un certain $n \in \mathbb{Z}$.

Pour $n \in \mathbb{Z}$ on note e_n la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C} définie par

$$e_n(x) = e^{inx}.$$

Définition 1.2. On appelle *polynôme trigonométrique* une combinaison linéaire des fonctions e_n pour $n \in \mathbb{Z}$. Un polynôme trigonométrique est donc une fonction de la forme

$$x \mapsto \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx},$$

avec $N \in \mathbb{N}$ et $c_{-N}, \dots, c_N \in \mathbb{C}$.

On note qu'un polynôme trigonométrique est une fonction 2π -périodique et de classe C^∞ (et même analytique) sur \mathbb{R} .

On commence avec les propriétés de base des fonctions e_n , $n \in \mathbb{Z}$, et des polynômes trigonométriques. Par un simple calcul on obtient le résultat suivant :

Lemme 1.3. Pour $n, m \in \mathbb{Z}$ on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e_n(x) \overline{e_m(x)} dx = \delta_{n,m} := \begin{cases} 1 & \text{si } n = m, \\ 0 & \text{si } n \neq m. \end{cases}$$

Une conséquence de ce premier résultat est que la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est libre (dans le \mathbb{C} -espace vectoriel usuel des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C}). En particulier, si f est un polynôme trigonométrique, alors l'écriture

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{-inx} \quad (1.2)$$

est unique (au sens où s'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $c_{-N}, \dots, c_N, \tilde{c}_{-N}, \dots, \tilde{c}_N$ tels que $\sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} = \sum_{n=-N}^N \tilde{c}_n e^{inx}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $c_n = \tilde{c}_n$ pour tout $n \in \llbracket -N, N \rrbracket$).

Proposition 1.4. *Soient $N \in \mathbb{N}$ et $c_{-N}, \dots, c_N \in \mathbb{C}$. On note f le polynôme trigonométrique défini par (1.2). Alors pour tout $n \in \llbracket -N, N \rrbracket$ on a*

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x) dx. \quad (1.3)$$

Démonstration. Soit $n \in \llbracket -N, N \rrbracket$. Par linéarité de l'intégrale et le lemme 1.3 on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x) dx = \sum_{m=-N}^N \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} c_m e^{i(m-n)x} f(x) dx = c_n. \quad \square$$

On introduit maintenant une autre écriture pour les polynômes trigonométriques. On rappelle que pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on a

$$e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx).$$

Cela donne les formules d'Euler :

$$\cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(nx) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}.$$

Ainsi les polynômes trigonométriques sont exactement les fonctions de la forme

$$f : x \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad (1.4)$$

avec $N \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N \in \mathbb{C}$. On a alors, avec la notation (1.2),

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = c_n + c_{-n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad (1.5)$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx. \quad (1.6)$$

On note que le choix de noter $a_0/2$ le coefficient constant dans (1.4) est arbitraire, mais cela permet d'avoir une expression uniforme pour les a_n , $n \in \mathbb{N}$.

En général on n'utilise l'écriture (1.4) que si f est à valeurs réelles, auquel cas les coefficients a_n et b_n sont réels (contrairement aux $c_n(f)$ pour $n \in \mathbb{Z}$).

On revient rapidement sur l'équation de la chaleur évoquée en introduction. On considère maintenant le problème

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = \partial_{xx} u(t, x), & (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times [-\pi, \pi], \\ u(t, -\pi) = u(t, \pi), & t > 0 \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in [-\pi, \pi]. \end{cases} \quad (1.7)$$

Par rapport à (0.1), on n'impose pas que la fonction s'annule au bord de l'intervalle. Il n'est pas difficile de voir que si u_0 est un polynôme trigonométrique, c'est-à-dire s'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $c_{-N}, \dots, c_N \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \quad u_0(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx},$$

alors on obtient une solution de (1.7) en posant, pour tous $t \geq 0$ et $x \in [-\pi, \pi]$,

$$u(t, x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx - n^2 t}.$$

Ainsi, les polynômes trigonométriques sont des fonctions agréables quand il s'agit de résoudre des équations différentielles sur le cercle. Mais c'est un cadre beaucoup trop restrictif, et notre objectif est maintenant d'approcher (en un sens à déterminer) des fonctions aussi générales que possible par des polynômes trigonométriques.

1.3 Série de Fourier d'une fonction périodique

On cherche à approcher une fonction f par une suite de polynômes trigonométriques. Un choix naturel est de considérer la suite des polynômes trigonométriques définis par le membre de droite dans (1.2), avec les coefficients c_n définis par (1.3), en laissant N tendre vers $+\infty$.

Une condition minimale pour pouvoir définir ces coefficients est que f soit intégrable sur $[-\pi, \pi]$. On note $L^1_{\text{per}}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C} localement intégrables et 2π -périodiques, quotienté par la relation d'égalité presque partout. Pour $f \in L^1_{\text{per}}(\mathbb{R})$ on note

$$\|f\|_{L^1_{\text{per}}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx.$$

Une fonction continue par morceaux est en particulier localement intégrable. À un niveau où l'intégrale de Lebesgue n'est pas connue, on peut se contenter de définir les séries de Fourier pour des fonctions 2π -périodiques et continues par morceaux. Mis à part la section 4 sur la théorie L^2 , tous les résultats de ce chapitre peuvent être restreints à ce cadre.

Soit $f \in L^1_{\text{per}}(\mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{Z}$ on pose

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy.$$

Les $c_n(f)$, $n \in \mathbb{Z}$, sont appelés coefficients de Fourier (exponentiels) de f . Pour $N \in \mathbb{N}$ on considère alors le polynôme trigonométrique

$$S_N(f) : x \mapsto \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}. \quad (1.8)$$

On dit que la série de Fourier de f converge si la suite de fonctions $S_N(f)$ converge quand N tend vers $+\infty$. Les questions qui se posent alors sont les suivantes.

- (i) La série de Fourier de f converge-t-elle? En quel sens?
- (ii) Si la série de Fourier de f converge, converge-t-elle vers f ?

On prendra garde à la notation

$$S(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx} \quad (1.9)$$

pour la série de Fourier de f . On dit qu'une série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n$ est convergente (quel que soit le sens considéré) si les séries $\sum_{n \geq 0} g_n$ et $\sum_{n < 0} g_n$ sont toutes les deux convergentes, ce qui est a priori plus fort que la convergence de la fonction $\sum_{n=-N}^N g_n$ pour $N \rightarrow +\infty$. On pourra utiliser la notation (1.9) quand la série est effectivement convergente.

Ce problème ne se pose pas avec les notations réelles. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note

$$a_0(f) = 2c_0(f), \quad a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f), \quad b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)). \quad (1.10)$$

Les $a_n(f)$, $n \in \mathbb{N}$ et $b_n(f)$, $n \in \mathbb{N}^*$, sont appelés coefficients de Fourier (trigonométriques) de f . Pour tous $N \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on a alors

$$S_N(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

et la série de Fourier de f s'écrit

$$S(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)). \quad (1.11)$$

Comme pour les polynômes trigonométriques, si on connaît les coefficients trigonométriques de f on peut retrouver les coefficients exponentiels. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$c_n(f) = \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2} \quad \text{et} \quad c_{-n}(f) = \frac{a_n(f) + ib_n(f)}{2}.$$

Et on peut calculer directement ces coefficients trigonométriques. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx,$$

et pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

Dans ces notes, on a choisi de privilégier la représentation (1.9) plutôt que (1.11) pour la série de Fourier de f . C'est un choix arbitraire, il est tout à fait possible de faire l'inverse. Typiquement, si on ne s'intéresse qu'à des fonctions à valeurs réelles.

1.4 Propriétés des coefficients de Fourier

Dans ce paragraphe on donne les propriétés de base des coefficients de Fourier définis précédemment. La proposition suivante se montre avec de simples calculs :

Proposition 1.5. (i) *L'application $f \in L_{\text{per}}^1(\mathbb{R}) \mapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ est linéaire. En outre pour $f \in L_{\text{per}}^1$ et $n \in \mathbb{Z}$ on a*

$$|c_n(f)| \leq \|f\|_{L_{\text{per}}^1}.$$

(ii) *Si $f \in L_{\text{per}}^1$ est à valeurs réelles alors $a_0(f) = c_0(f)$ est réel et pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a*

$$c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}, \quad a_n(f) \in \mathbb{R}, \quad b_n(f) \in \mathbb{R}.$$

(iii) *Si $f \in L_{\text{per}}^1$ est paire alors $b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx.$$

Si $f \in L_{\text{per}}^1$ est impaire alors $a_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

(iv) *Soient $f \in L_{\text{per}}^1(\mathbb{R})$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On considère $f_{x_0} : x \mapsto f(x + x_0)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a*

$$c_n(f_{x_0}) = e^{inx_0} c_n(f).$$

Proposition 1.6. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^k . Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a*

$$c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f).$$

Démonstration. Le cas où $k = 1$ est une simple intégration par parties. Comme la fonction $x \mapsto e^{inx} f(x)$ est 2π -périodique, on a

$$\begin{aligned} c_n(f') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f'(x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} [e^{-inx} f(x)]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} ine^{-inx} f(x) dx \\ &= inc_n(f). \end{aligned}$$

Le cas général suit alors par récurrence. □

Proposition 1.7 (Lemme de Riemann-Lebesgue). *Soit $f \in L^1_{\text{per}}$. Alors on a*

$$c_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} 0.$$

Si de plus f est de classe C^k pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$, alors

$$c_n(f) = \mathcal{O}_{n \rightarrow \pm\infty}(|n|^{-k}).$$

Bien entendu, via (1.10) ou par une preuve analogue à ce qui suit, on obtient un énoncé analogue pour les coefficients $a_n(f)$ et $b_n(f)$.

Démonstration. On commence par montrer le cas particulier. Si f est de classe C^k alors d'après les propositions 1.6 puis 1.5 on a pour $n \neq 0$

$$|c_n(f)| = \frac{|c_n(f^{(k)})|}{|n|^k} \leq \frac{\|f^{(k)}\|_{L^1_{\text{per}}}}{|n|^k}.$$

On considère maintenant une fonction $f \in L^1_{\text{per}}(\mathbb{R})$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme l'ensemble des fonctions C^1 à supports compacts dans $] -\pi, \pi[$ est dense dans $L^1(-\pi, \pi)$, il existe g de classe C^1 et à support compact dans $] -\pi, \pi[$ telle que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)| dx \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On prolonge g par 2π -périodicité. Cela donne une fonction de classe C^1 et 2π -périodique, que l'on note toujours g . D'après ce qui précède, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|n| \geq n_0$ on a

$$|c_n(g)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour un tel n on a alors

$$|c_n(f)| \leq |c_n(g)| + |c_n(f) - c_n(g)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + |c_n(f - g)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \|f - g\|_{L^1_{\text{per}}} \leq \varepsilon.$$

D'où le résultat. □

1.5 Exemples de calculs de coefficients de Fourier

On commence par remarquer que si f est un polynôme trigonométrique, alors on a $S(f) = f$.

Exemple 1.8. On considère la fonction 2π -périodique f qui vaut 1 sur $[0, \pi[$ et -1 sur $[-\pi, 0[$. Alors, si on omet les multiples de π (qui ne jouent pas de rôle pour le calcul des coefficients de Fourier), f est impaire. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a alors $a_n = 0$ et

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Ainsi on a

$$S(f)(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{\sin((2m+1)x)}{(2m+1)}.$$

Exemple 1.9. On considère la fonction 2π -périodique f telle que $f(x) = x$ pour tout $x \in]-\pi, \pi]$. Alors f est (presque partout) impaire. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a alors $a_n = 0$ et

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left[-x \frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^\pi + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(nx)}{n} dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

Ainsi on a

$$S(f)(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2(-1)^{n+1} \sin(nx)}{n}.$$

On observe que pour ces exemples avec des fonctions à valeurs réelles, on est finalement revenu aux coefficients trigonométriques pour les calculs.

2 Convergences ponctuelle de la série de Fourier

Dans cette section et dans les suivantes, on cherche dans quelle mesure le polynôme trigonométrique $S_N(f)$ est une bonne approximation de f quand N devient grand.

2.1 Convergence ponctuelle

Le but de ce paragraphe est de montrer le résultat suivant :

Théorème 2.1 (Théorème de Dirichlet). *Soit f une fonction 2π -périodique et C^1 par morceaux. Alors la suite de fonctions $(S_N(f))_{N \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a*

$$S_N(f)(x) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2},$$

où $f(x^-)$ et $f(x^+)$ désignent les limites à gauche et à droite de f en x . En particulier, si f est continue et C^1 par morceaux alors $S_N(f)$ converge simplement vers f quand N tend vers $+\infty$.

Pour montrer ce théorème on introduit le noyau de Dirichlet, défini pour $N \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ par

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^N e^{inx}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} S_N(f)(x) &= \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{inx} = \sum_{n=-N}^N \frac{1}{2\pi} e^{in(x-y)} f(y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi D_N(x-y) f(y) dy. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Ainsi, $S_N(f)$ est le produit de convolution de D_N avec f .

Proposition 2.2. *Soit $N \in \mathbb{N}$.*

(i) *La fonction D_N est paire.*

(ii) *On a*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi D_N(x) dx = 1 \tag{2.13}$$

(iii) *Pour $x \in \mathbb{R}$ on a*

$$D_N(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\frac{(2N+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} & \text{si } x \notin 2\pi\mathbb{Z}, \\ 2N+1 & \text{si } x \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases} \tag{2.14}$$

Démonstration. Le premier point est clair. Pour le second on écrit

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi D_n(x) dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N \int_{-\pi}^\pi e^{inx} dx = 1.$$

La troisième propriété est claire pour $x \in 2\pi\mathbb{Z}$. Sinon

$$\begin{aligned} D_N(x) &= e^{-iNx} \sum_{n=0}^{2N} (e^{ix})^n = e^{-iNx} \frac{e^{i(2N+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} \\ &= \frac{e^{-iNx} e^{\frac{i(2N+1)x}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}}} \frac{e^{\frac{i(2N+1)x}{2}} - e^{-\frac{i(2N+1)x}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{(2N+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}. \end{aligned}$$

□

N.B. : cette astuce de factoriser par l'angle moitié est à retenir...

Démonstration du théorème de Dirichlet. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$S_n(f)(x) - \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(y) f(x-y) dy - \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}.$$

Puisque D_N est paire on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 D_N(y) f(x-y) dy - \frac{f(x^+)}{2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 D_N(y) (f(x-y) - f(x^+)) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} D_N(y) (f(x+y) - f(x^+)) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\left(\frac{(2N+1)y}{2}\right) \frac{f(x+y) - f(x^+)}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)} dy. \end{aligned}$$

La fonction

$$y \mapsto \frac{f(x+y) - f(x^+)}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)}$$

est continue par morceaux sur $]0, \pi]$ et admet une limite finie en 0, donc elle s'étend en une fonction continue par morceaux sur $[0, \pi]$. D'après le lemme de Riemann-Lebesgue (proposition 1.7), on obtient

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\left(\frac{(2N+1)y}{2}\right) \frac{f(x+y) - f(x^+)}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)} dy \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

On obtient de la même façon que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} D_N(y) f(x-y) dy - \frac{f(x^-)}{2} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

D'où le résultat. □

Remarque 2.3. Attention, il existe des fonctions continues dont la série de Fourier n'a pas de limite simple. Voir par exemple l'exercice 4 p. 264 de [Gourdon].

2.2 Phénomène de Gibbs

On revient dans ce paragraphe sur l'exemple 1.8. Pour $M \in \mathbb{N}$ on a

$$S_{2M}(f) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\sin((2m+1)x)}{2m+1}.$$

D'après le théorème 2.1 on a

$$S_{2M}(f) \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} \begin{cases} 1 & \text{if } x \in]0, \pi[+ 2\pi\mathbb{Z}, \\ -1 & \text{if } x \in]-\pi, 0[+ 2\pi\mathbb{Z}, \\ 0 & \text{if } x \equiv 0 [\pi]. \end{cases} \quad (2.15)$$

En particulier, la limite de $S_{2M}(x)$ est dans $[-1,1]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On observe pourtant (voir figure 1) que

$$\liminf_{M \rightarrow +\infty} \|S_{2M}(f)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} > 1.$$

En effet on peut calculer

$$\begin{aligned} S_{2M}\left(\frac{\pi}{2M}\right) &= \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\sin\left(\frac{m\pi}{M} + \frac{\pi}{2M}\right)}{2m+1} \\ &= \frac{4}{\pi M} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\sin\left(\frac{m\pi}{M}\right)}{\frac{2m}{M}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{M}\right) \\ &\xrightarrow{M \rightarrow +\infty} \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{\sin(s\pi)}{2s} ds = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t} dt. \end{aligned}$$

Or on peut vérifier (par exemple par approximation numérique) que

$$\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t} dt > \frac{\pi}{2}.$$

Ce phénomène, qui n'est absolument pas en contradiction avec la convergence simple rappelée en (2.15), est appelé *phénomène de Gibbs*, et doit être pris en compte en traitement du signal.

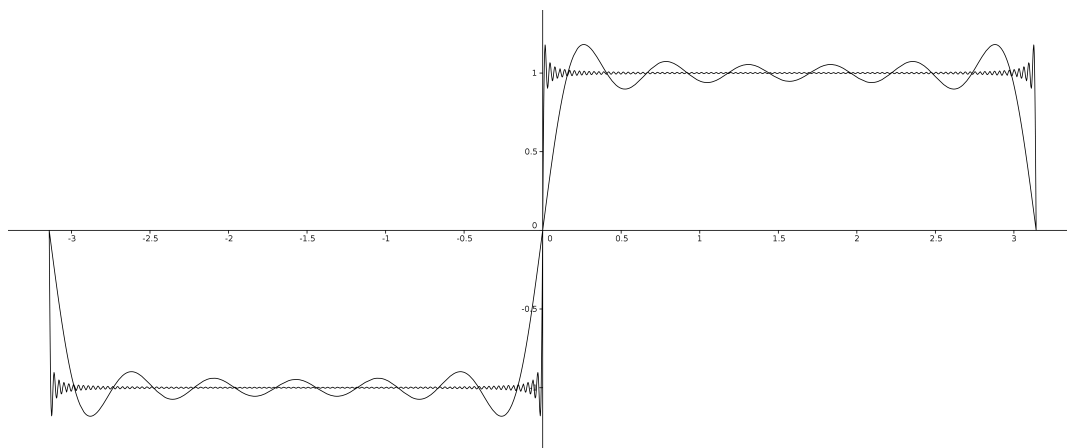


FIGURE 1 – $S_{10}(f)$ et $S_{200}(f)$

2.3 Exemples d'applications pour des calculs de séries

Exemple 2.4. On considère sur \mathbb{R} la fonction 2π -périodique f telle que

$$\forall x \in]-\pi, \pi], \quad f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}.$$

On note que f est paire, donc $b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On calcule

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) dx = \frac{4}{3}$$

et, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(nx) \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) dx \\ &= -\frac{2}{\pi^3} \int_0^\pi \cos(nx) x^2 dx \\ &= \dots \quad (\text{double intégration par parties}) \\ &= \frac{(-1)^{n+1} 4}{\pi^2 n^2}. \end{aligned}$$

Comme f est continue et C^1 par morceaux, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$1 - \frac{x^2}{\pi^2} = \frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos(nx).$$

Appliqué en $x = \pi$ cela prouve que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Appliqué en $x = 0$ cela donne

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Ces deux résultats donnent également

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} - \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n^2} \right) = \frac{\pi^2}{8}.$$

Exercice 1. Soit f la fonction 2π -périodique telle que $f(x) = e^x$ pour tout $x \in [-\pi, \pi[$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de f .

2. En déduire les sommes des séries $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2 + 1}$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$.

3 Convergence au sens de Cesàro d'une série de Fourier

3.1 Théorème de Fejér

Pour $N \in \mathbb{N}$ on pose

$$\sigma_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n(f).$$

Théorème 3.1 (Théorème de Fejér). Soit f une fonction 2π -périodique continue. Alors $\sigma_N(f)$ converge uniformément vers f sur \mathbb{R} quand N tend vers $+\infty$.

Démonstration. • Pour $N \in \mathbb{N}$ on note (voir Figure 2)

$$K_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n, \quad (3.16)$$

de sorte que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a (voir (2.12))

$$\sigma_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(x-y) f(y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(y) f(x-y) dy. \quad (3.17)$$

D'après (2.13) on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(x) dx = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = 1. \quad (3.18)$$

Enfin, d'après (2.14), on obtient, pour $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$,

$$K_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{N \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \sum_{n=0}^{N-1} \operatorname{Im}\left(e^{inx} e^{i\frac{x}{2}}\right).$$

Or

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{inx} e^{i\frac{x}{2}} = e^{i\frac{x}{2}} \frac{e^{iNx} - 1}{e^{ix} - 1} = \frac{\sin\left(\frac{Nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} e^{i\frac{Nx}{2}},$$

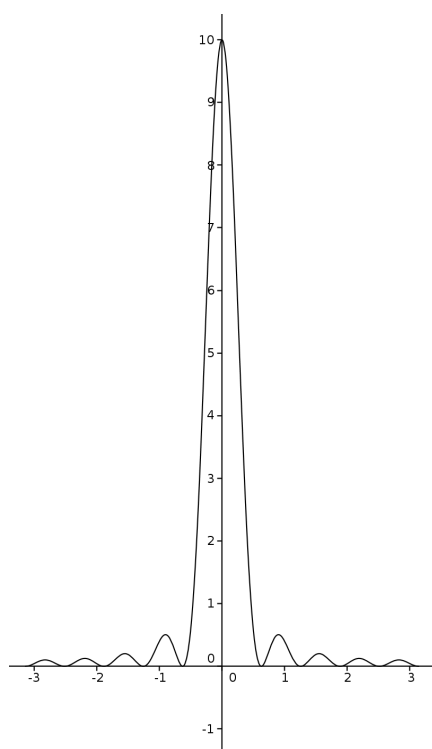


FIGURE 2 – K_{10}

donc

$$K_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{Nx}{2}\right)^2}{N \sin\left(\frac{x}{2}\right)^2}. \quad (3.19)$$

On observe en particulier que $K_N(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

• Comme f est continue et 2π -périodique, elle est uniformément continue. Pour $\eta > 0$ on note

$$\omega(\eta) = \sup_{\substack{x_1, x_2 \in \mathbb{R} \\ |x_1 - x_2| \leq \eta}} |f(x_1) - f(x_2)|.$$

Pour $N \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on a

$$|\sigma_N(f)(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(y) |f(x-y) - f(x)| dy.$$

Comme

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\eta}^{\eta} K_n(y) |f(x-y) - f(x)| dy \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\eta}^{\eta} K_n(y) \omega(\eta) dy \leq \omega(\eta)$$

et

$$\frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi] \setminus [-\eta, \eta]} K_n(y) |f(x-y) - f(x)| dy \leq 2 \|f\|_{\infty} \sup_{\eta \leq |y| \leq \pi} K_N(y) \leq \frac{2 \|f\|_{\infty}}{N \sin\left(\frac{\eta}{2}\right)},$$

cela donne

$$\|\sigma_N(f) - f\|_{\infty} \leq \omega(\eta) + \frac{2 \|f\|_{\infty}}{N \sin\left(\frac{\eta}{2}\right)}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta \in]0, \pi[$ tel que $\omega(\eta) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ puis, η étant ainsi fixé, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{2 \|f\|_{\infty}}{N_0 \sin\left(\frac{\eta}{2}\right)} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Pour tout $N \geq N_0$ on a alors

$$\|\sigma_N(f) - f\|_{\infty} \leq \varepsilon.$$

D'où le résultat. □

Corollaire 3.2. *Soit f une fonction continue et 2π -périodique. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si la suite $(S_n(f)(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors la limite est nécessairement $f(x)$.*

On rappelle que même pour une fonction continue, la série de Fourier ne converge pas forcément en tout point. Néanmoins, ce que dit ce corollaire est que si elle converge vers quelque chose en un point x , c'est nécessairement vers la limite attendue, à savoir $f(x)$. C'est déjà ça. On note que ce n'est pas le cas pour la série de Taylor d'une fonction régulière au voisinage d'un point, qui peut converger ponctuellement vers autre chose que la fonction de départ.

Remarque 3.3. On observe que pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a d'après (3.17) et (3.18)

$$\|\sigma_N(f)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

C'est à comparer au phénomène de Gibbs, évoqué au paragraphe 2.2.

3.2 Conséquences du théorème de Fejér

Théorème 3.4 (Théorème de Weierstrass trigonométrique). *Pour toute fonction f continue et 2π -périodique, il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes trigonométriques qui converge uniformément vers f . Autrement dit, l'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans l'espace des fonctions continues et 2π -périodiques.*

Proposition 3.5. *Soit f une fonction continue et 2π -périodique telle que $c_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Alors f est nulle.*

Démonstration. On a $\sigma_N(f) = 0$ pour tout $N \in \mathbb{N}$. Or, d'après le théorème 3.1, $\sigma_N(f)$ converge uniformément vers f . Cela implique que $f = 0$. \square

3.3 Version L^p

On a vu dans la démonstration du théorème 3.1 que $\sigma_N(f)$ est le produit de convolution de f avec le noyau K_N défini en (3.16).

Proposition 3.6. *La suite $(K_N)_{N \in \mathbb{N}}$ est une suite d'approximation de la masse de Dirac.*

Démonstration. On sait d'après (3.19) et (3.18) que pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a $K_N \geq 0$ et $\|K_N\|_{L^1_{\text{per}}} = 1$. Soit maintenant $\eta \in]0, \pi[$. On a

$$\int_{\eta \leq |x| \leq \pi} K_N(x) dx \leq 2\pi \sup_{\eta \leq |x| \leq \pi} K_N(x) \leq \frac{2\pi}{N \sin\left(\frac{\eta}{2}\right)} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

\square

Proposition 3.7. *Soient $p \in [1, +\infty[$ et $f \in L^p_{\text{per}}(\mathbb{R})$. Alors on a*

$$\|f - \sigma_N(f)\|_{L^p_{\text{per}}(\mathbb{R})} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

En outre pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a

$$\|\sigma_N(f)\|_{L^p_{\text{per}}(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^p_{\text{per}}(\mathbb{R})}.$$

4 Théorie L^2 des séries de Fourier

Pour une fonction mesurable et 2π -périodique de \mathbb{R} dans \mathbb{C} on note

$$\|f\|_{L^2_{\text{per}}} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On note alors L^2_{per} l'ensemble des fonctions mesurables et 2π -périodiques de \mathbb{R} dans \mathbb{C} telles que $\|f\|_{L^2_{\text{per}}} < +\infty$, quotienté par la relation d'égalité presque partout. Pour $f, g \in L^2_{\text{per}}$ on pose

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx. \quad (4.20)$$

On note que $L^2_{\text{per}} \subset L^1_{\text{per}}$, avec injection continue.

Proposition 4.1. *L'application définie par (4.20) est un produit scalaire sur L^2_{per} . En outre L^2_{per} est complet pour la norme associée. Ainsi, L^2_{per} muni du produit scalaire (4.20) est un espace de Hilbert.*

Proposition 4.2. *La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de L^2_{per} .*

Démonstration. La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est dénombrable et elle est orthonormée d'après le lemme 1.3. D'après le théorème 3.4, on sait que l'ensemble des polynômes trigonométriques est dense, au sens de la norme uniforme et donc dans L^2_{per} , dans l'ensemble des fonctions continues et 2π -périodiques. Par ailleurs, on sait que les fonctions continues à supports compacts dans $]-\pi, \pi[$ sont denses dans $L^2(-\pi, \pi)$. Par prolongement périodique, on obtient que les fonctions continues et 2π -périodiques sont denses dans L^2_{per} . Finalement, les polynômes trigonométriques sont denses dans L^2_{per} . \square

On observe que pour $f \in L^2_{\text{per}}$ et $n \in \mathbb{Z}$ on a

$$c_n(f) = \langle f, e_n \rangle,$$

de sorte que $S_N(f)$ n'est autre que le projeté orthogonal de f sur le sous-espace vectoriel engendré par la famille $\{e_{-N}, \dots, e_N\}$. En particulier, pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a $S_N(f) \in L^2_{\text{per}}$ et

$$\|S_N(f)\|_{L^2_{\text{per}}} \leq \|f\|_{L^2_{\text{per}}}.$$

On déduit également de la théorie générale des espaces de Hilbert les résultats suivants.

Proposition 4.3 (Convergence au sens de la norme quadratique de la série de Fourier). *Pour tout $f \in L^2_{\text{per}}$ on a*

$$\|f - S_N(f)\|_{L^2_{\text{per}}} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

Proposition 4.4 (Identité de Parseval). *Pour tout $f \in L^2_{\text{per}}$ on a*

$$\|f\|_{L^2_{\text{per}}}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2.$$

Remarque 4.5. Avec les coefficients trigonométriques on obtient

$$\|f\|_{L^2_{\text{per}}}^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2).$$

Remarque 4.6. Pour $f, g \in L^2_{\text{per}}$ on a également

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) \overline{c_n(g)}.$$

On observe que l'identité de Parseval redonne dans le cadre L^2 le lemme de Riemann-Lebesgue (voir la proposition 1.7).

Corollaire 4.7 (Lemme de Riemann-Lebesgue). *Pour tout $f \in L^2_{\text{per}}$ on a*

$$|c_n(f)| \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} 0.$$

On note enfin que l'identité de Parseval permet également de calculer des séries numériques.

Exemple 4.8. On reprend les calculs de l'exemple 2.4. Alors l'identité de Parseval donne

$$\frac{8}{15} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) dx = \frac{4}{9} + \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{16}{\pi^4 n^4},$$

et donc

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

5 Convergence normale des séries de Fourier

On a montré à la section 2 que la série de Fourier d'une fonction C^1 par morceaux converge ponctuellement, puis on a montré à la section 3 que la série de Fourier d'une fonction continue converge uniformément au sens de Cesàro. C'est en cumulant ces deux propriétés qu'on obtient une « bonne » convergence de la série de Fourier, à savoir la convergence uniforme (en fait, normale) de la série vers la fonction de départ. Pour cela, on utilisera l'identité de Parseval obtenue en utilisant le point de vue Hilbertien pour les séries de Fourier.

On commence par généraliser le résultat de la proposition 1.6 pour une fonction qui n'est pas tout à fait de classe C^1 .

Proposition 5.1. *Soit f une fonction 2π -périodique, continue, et C^1 par morceaux. Alors f' est bien définie presque partout, elle définit une fonction dans L^1_{per} , et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a*

$$c_n(f') = inc_n(f).$$

Démonstration. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_k \in [-\pi, \pi]$ tels que $-\pi = a_0 < a_1 < \dots < a_k = \pi$ et pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ la restriction de f à $]a_{j-1}, a_j[$ s'étend par continuité en une fonction C^1 sur $[a_{j-1}, a_j]$. Pour $n \in \mathbb{Z}$ on a alors

$$\begin{aligned} c_n(f') &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^k \int_{a_{j-1}}^{a_j} e^{-inx} f'(x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^k (e^{-ina_j} f(a_j) - e^{-ina_{j-1}} f(a_{j-1})) + \frac{in}{2\pi} \sum_{j=1}^k \int_{a_{j-1}}^{a_j} e^{-inx} f(x) dx \\ &= \frac{in}{2\pi} \sum_{j=1}^k \int_{a_{j-1}}^{a_j} e^{-inx} f(x) dx \\ &= inc_n(f). \end{aligned} \quad \square$$

Proposition 5.2. *Soit f une fonction 2π -périodique, continue, et C^1 par morceaux. Alors la série de Fourier de f converge normalement vers f .*

Démonstration. D'après la proposition 5.1, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'identité de Parseval (proposition 4.4) on a

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |c_n(f)| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{|c_n(f')|}{|n|} \leq \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2}} \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |c_n(f')|^2} \leq \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2}} \|f'\|_{L^2_{\text{per}}(\mathbb{R})}.$$

Cela prouve que la série de Fourier de f converge normalement. D'après le corollaire 3.2, la limite est nécessairement f , et la démonstration est complète. \square

6 Fonctions T -périodiques

Soit $T > 0$. Si f est une fonction T -périodique, alors la fonction

$$g : x \mapsto f\left(\frac{xT}{2\pi}\right)$$

est 2π -périodique. On pose

$$\begin{aligned} c_{T,n}(f) &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-\frac{2i\pi nx}{T}} f(x) dx, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \\ a_{T,n}(f) &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

$$b_{T,n}(f) = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

Ce sont exactement les coefficients de Fourier de g tels qu'on les a définis précédemment. De même, on pose

$$S_{T,N}(f)(x) = \sum_{n=-N}^N c_{T,n}(f) e^{\frac{2i\pi nx}{T}} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_{T,n}(f) \left(\cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) + b_{T,n}(f) \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) \right).$$

Ainsi, en appliquant à g tous les théorèmes de convergence pour les séries de Fourier, on obtient des résultats analogues pour la convergence de $S_{T,N}(f)$ vers f .

On note L_T^2 l'espace des fonctions localement intégrables et T -périodiques, quotienté par la relation d'égalité presque partout. C'est un espace de Hilbert pour la norme définie par

$$\|f\|_{L_T^2}^2 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)|^2 dx.$$

La famille des fonctions $e_{T,n} : x \mapsto e^{\frac{2i\pi nx}{T}}$ pour $n \in \mathbb{Z}$ est alors une base Hilbertienne pour cette espace et $c_{T,n}(f) = \langle f, e_{T,n} \rangle$. En particulier l'inégalité de Parseval s'écrit

$$\|f\|_{L_T^2}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_{T,n}(f)|^2.$$

Pour alléger les notations, on peut éventuellement noter ω la pulsation $\frac{2\pi}{T}$.

7 Exemples d'applications des séries de Fourier

7.1 Équation de la chaleur sur le cercle

On a motivé les séries de Fourier par la résolution d'équations aux dérivées partielles pour des fonctions périodiques (fonctions sur le cercle), et en particulier l'équation de la chaleur. On montre maintenant qu'on a effectivement atteint cet objectif.

Théorème 7.1. *Soit $u_0 \in L_{\text{per}}^2$. Alors il existe une unique fonction $u \in C^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$, 2π -périodique par rapport à $x \in \mathbb{R}$, telle que*

$$\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \partial_t u(t, x) = \partial_{xx} u(t, x) \tag{7.21}$$

et

$$\|u(t, \cdot) - u_0\|_{L_{\text{per}}^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0. \tag{7.22}$$

En outre, u est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Démonstration. • On suppose que u est une solution. Soit $t > 0$. Puisque $u(t, \cdot)$ est C^2 et 2π -périodique on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx},$$

où pour $n \in \mathbb{Z}$ on a noté

$$c_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} u(t, x) dx.$$

En outre, d'après la proposition 5.2, la convergence de la série est normale. Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $t > 0$. Comme u est de classe C^1 sur le compact $[\frac{t}{2}, 2t] \times [-\pi, \pi]$, on obtient par le théorème de dérivation sous l'intégrale que la fonction c_n est dérivable en t et

$$c'_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} \partial_t u(t, x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} \partial_{xx} u(t, x) dx.$$

D'après la proposition 1.6 on a alors

$$c'_n(t) = -n^2 c_n(t).$$

On en déduit qu'il existe $c_n \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $t > 0$ on a

$$c_n(t) = c_n e^{-n^2 t}.$$

On note $c_n(0)$ les coefficients de Fourier de u_0 . D'après l'identité de Parseval (proposition 4.4) on a

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(t) - c_n(0)|^2 = \|u(t, \cdot) - u_0\|_{L^2_{\text{per}}}^2 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0,$$

donc $c_n = c_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ on a

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in(x-y)} u_0(y) e^{-n^2 t} dy.$$

Soient $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. Comme

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} \left| e^{in(x-y)} u_0(y) e^{-n^2 t} \right| dy < +\infty,$$

on peut intervertir série et intégrale et écrire

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in(x-y)} e^{-n^2 t} u_0(y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(t, x-y) u_0(y) dy,$$

où pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ on a noté

$$K(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inx} e^{-n^2 t}.$$

Cela prouve que le problème (7.21)-(7.22) admet au plus une solution.

• Inversement, montrons que la fonction u ainsi définie est bien solution. Pour $n \in \mathbb{Z}$, $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$K_n(t, x) = e^{inx} e^{-n^2 t}.$$

Cela définit une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Soit $a > 0$. Pour $j, k \in \mathbb{N}$ et $(t, x) \in [a, +\infty[\times \mathbb{R}$ on a

$$\left| \frac{\partial^j}{\partial t^j} \frac{\partial^k}{\partial x^k} K_n(t, x) \right| = n^{2j+k} e^{-n^2 a}.$$

Le majorant ne dépend pas de (t, x) et est le terme général d'une série convergente. D'après le théorème de dérivation terme à terme appliqué sur $[a, +\infty[\times \mathbb{R}$ pour tout $a > 0$, on obtient donc que K est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et pour $j, k \in \mathbb{N}$ et $(t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ on a

$$\frac{\partial^j}{\partial t^j} \frac{\partial^k}{\partial x^k} K(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-n^2)^j (in)^k e^{inx} e^{-n^2 t}.$$

En particulier,

$$\partial_t K = \partial_{xx} K.$$

Pour tout $y \in [-\pi, \pi]$ la fonction $(t, x) \mapsto K(t, x-y) u_0(y)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. En outre, pour $a > 0$ et $j, k \in \mathbb{N}$ il existe $C > 0$ tel que pour tout $t \geq a$, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in [-\pi, \pi]$ on a

$$\left| \frac{\partial^j}{\partial t^j} \frac{\partial^k}{\partial x^k} K(t, x-y) u_0(y) \right| \leq C |u_0(y)|.$$

Par le théorème de dérivation sous l'intégrale, on en déduit que u est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et que pour tous $j, k \in \mathbb{N}$ et $(t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ on a

$$\frac{\partial^j}{\partial t^j} \frac{\partial^k}{\partial x^k} u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial^{j+k}}{\partial t^j \partial x^k} K(t, x-y) u_0(y) dy.$$

En particulier,

$$\partial_t u = \partial_{xx} u.$$

Il reste à montrer (7.22). Pour $t > 0$ on note $c_n(t)$, $n \in \mathbb{Z}$, les coefficients de Fourier de $u(t, \cdot)$. On note également $c_n(0)$, $n \in \mathbb{Z}$, ceux de u_0 . Soient $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. Comme

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| e^{in(x-y)} e^{-n^2 t} u_0(y) \right| dy < +\infty,$$

on obtient par intégration terme à terme que

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inx} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iny} e^{-n^2 t} u_0(y) dy \right).$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a

$$c_n(t) = e^{-n^2 t} c_n(0).$$

Par l'identité de Parseval,

$$\|u(t, \cdot) - u_0\|_{L^2_{\text{per}}}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 - e^{-n^2 t})^2 |c_n(0)|^2.$$

Pour tout $t > 0$ et $n \in \mathbb{Z}$ on a $(1 - e^{-n^2 t})^2 |c_n(0)|^2 \leq |c_n(0)|^2$, et la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(0)|^2$ converge par l'inégalité de Parseval. Par le théorème de convergence dominée on obtient que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|u(t, \cdot) - u_0\|_{L^2_{\text{per}}}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lim_{t \rightarrow 0} (1 - e^{-n^2 t})^2 |c_n(0)|^2 = 0.$$

Cela conclut la démonstration. □

Remarque 7.2. Avec les notations de la démonstration on observe que pour tout $t > 0$ on a

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^2_{\text{per}}}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-2n^2 t} |c_n(0)|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(0)|^2 = \|u_0\|_{L^2_{\text{per}}}^2.$$

7.2 Inégalité de Wirtinger

Proposition 7.3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit f une fonction de classe C^1 de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . On suppose que $f(a) = f(b)$ et $\int_a^b f(x) dx = 0$. Alors on a

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \leq \left(\frac{b-a}{2\pi} \right)^2 \int_a^b |f'(x)|^2 dx.$$

Démonstration. Pour $x \in [0, 2\pi]$ on pose

$$g(x) = f \left(a + \frac{(b-a)x}{2\pi} \right).$$

Cela définit une fonction g de classe C^1 sur $[0, 2\pi]$ telle que $g(0) = g(2\pi)$ et $\int_0^{2\pi} g(x) dx = 0$. g se prolonge alors en une fonction 2π -périodique sur \mathbb{R} , continue et C^1 par morceaux. On note $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ses coefficients de Fourier. D'après la proposition 5.1, les coefficients de Fourier de g' sont les inc_n , $n \in \mathbb{Z}$. D'après l'identité de Parseval on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2$$

et

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g'(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n|^2.$$

En outre on a

$$c_0 = \int_0^{2\pi} g(x) dx = 0,$$

donc

$$\int_0^{2\pi} |g(x)|^2 dx \leq \int_0^{2\pi} |g'(x)|^2 dx.$$

D'où le résultat après le changement de variable $x = a + \frac{(b-a)y}{2\pi}$. □

7.3 Inégalité iso-périmétrique

Proposition 7.4. Soit $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 telle que $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$ et $|\gamma'(t)| = 1$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$ (γ est une courbe fermée paramétrée par longueur d'arc). On note

$$A = \frac{1}{2i} \int_0^{2\pi} \gamma(t) \overline{\gamma'(t)} dt$$

(A est l'aire algébrique du domaine enlacé par la courbe γ). Alors on a

$$|A| \leq \pi,$$

avec égalité si et seulement si γ décrit un cercle.

Évidemment, ce résultat n'a de sens que si on peut interpréter géométriquement les quantités impliquées (voir en particulier le théorème de Green-Riemann).

Démonstration. Quitte à remplacer γ par $t \mapsto \gamma(2\pi - t)$ (ce qui revient à changer le sens de parcourt de la courbe), on peut supposer que $A \geq 0$. On étend γ en une fonction 2π -périodique de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , qu'on note encore γ . Alors γ est 2π -périodique, continue et C^1 par morceaux. On note $c_n, n \in \mathbb{Z}$, ses coefficients de Fourier. D'après la proposition 5.1, les coefficients de Fourier de γ' sont alors donnés par $inc_n, n \in \mathbb{Z}$. D'après l'identité de Parseval (voir la remarque 4.5), on a alors

$$A = \frac{\pi}{i} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \overline{inc_n} = \pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} n |c_n|^2.$$

Par ailleurs on a

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n|^2.$$

Cela prouve que $A \leq \pi$. En outre on a égalité si et seulement si

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} n |c_n|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n|^2.$$

Ce n'est possible que si $c_n = 0$ pour $n \notin \{0, 1\}$. Dans ce cas, pour tout $t \in [0, 2\pi]$ on a $\gamma(t) = c_0 + c_1 e^{it}$. Ainsi γ décrit le cercle de centre c_0 et de rayon $|c_1|$ (qui est nécessairement égal à 1 puisque $1 = |\gamma'(t)| = |c_1|$). \square

7.4 Formule sommatoire de Poisson

Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (fonction de classe C^∞ telle que $x \mapsto x^j f^{(k)}(x)$ est bornée pour tous $j, k \in \mathbb{N}$) et $\xi \in \mathbb{R}$ on note

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) dx$$

(c'est la transformée de Fourier de f , qu'on introduira au chapitre suivant).

Proposition 7.5. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors on a

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$

En fait, il est suffisant de supposer que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est continue, intégrable, qu'il existe $\alpha > 1$ et $C > 0$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq \frac{C}{(1 + |x|^\alpha)} \quad (7.23)$$

(ce qui assure en particulier que la série du membre de gauche est convergente) et

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < +\infty.$$

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $f_n(x) = f(x + 2\pi n)$. f_n est alors une fonction continue sur \mathbb{R} . Soit $R > 0$. Pour $|n| \geq R$ et $x \in [-R, R]$ on a d'après (7.23)

$$|f_n(x)| \leq \frac{C}{(1 + |x + n|)^\alpha} \leq \frac{C}{(1 + |n| - R)^\alpha}.$$

Comme $\alpha > 1$, la série $\sum_{n \geq R} C(1 + n - R)^\alpha$ converge, donc la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n$ converge normalement sur tout compact de \mathbb{R} . En particulier, sa somme S est continue sur \mathbb{R} . En outre pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$S(x + 2\pi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n(x + 2\pi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_{n+1}(x) = S(x),$$

donc S est 2π -périodique. On note $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ses coefficients de Fourier. Pour $n \in \mathbb{Z}$ on a

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n(x) dx.$$

Puisque la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$, on peut intervertir série et intégrale, de sorte que

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x + 2\pi n) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-inx} f(x) dx = \frac{\hat{f}(n)}{2\pi}.$$

Enfin, on a $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n| = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < +\infty$, donc la série de Fourier de S converge normalement (vers S , car S est continue). En particulier on a

$$S(0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$

D'où le résultat. □

On donne maintenant une application de la formule sommatoire de Poisson. Pour $t > 0$ on pose

$$\theta(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\pi m^2 t}.$$

La fonction θ est une fonction spéciale qui apparaît dans certains problèmes (par exemple l'étude de la fonction ζ).

Proposition 7.6. *Pour $t > 0$ on a*

$$\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \theta\left(\frac{1}{t}\right).$$

Démonstration. Soit $t > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$f(x) = e^{-\frac{tx^2}{4\pi}}.$$

Alors f est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ on a (voir le calcul de la transformée de Fourier d'une Gaussienne) :

$$\hat{f}(\xi) = \frac{2\pi}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\pi \xi^2}{t}}.$$

D'après la formule sommatoire de Poisson on a alors

$$\theta(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{t}} \theta\left(\frac{1}{t}\right).$$

□