1.3 Mesure de Lebesgue

On construit dans ce paragraphe la mesure de Lebesgue. Le but est d'obtenir une mesure correspondant au volume usuel (on parlera de longueur en dimension 1 et d'aire en dimension 2). On a déjà évoqué le fait qu'il n'était pas possible d'obtenir une telle mesure bien définie sur toutes les parties de $\mathbb{R}^d$. On cherche tout de même à obtenir une mesure définie sur une famille de partie de $\mathbb{R}^d$ suffisamment large pour ne pas être gêné en pratique.

Le cahier des charges pour la mesure de Lebesgue est donc de définir une application qui vérifie les propriétés de la Définition 1.12 et qui corresponde au volume sur les ensembles de références que sont les pavés (voir la Définition B.1). Par rapport à la mesure de Jordan (voir Définition B.7), la différence est qu'on demande qu'union dénombrable de parties mesurable soit encore mesurable (autrement dit, la mesure de Jordan n'est pas une mesure car l'ensemble des parties Jordan-mesurables n'est pas une tribu).

On attend également de la mesure de Lebesgue qu'elle soit invariante par translation et par les isométries de l'espaces (rotations, symétries). Ces dernières propriétés n'ont pas à être prises comme axiomes et seront conséquences des conditions déjà imposées via le théorème de changement de variables (voir le Théorème 3.24). L'invariance par translation peut également être vue comme conséquence du théorème de changement de variables mais sera utilisée pour la démonstration et doit donc être démontrée auparavant. Ce sera en fait une simple conséquence du fait que c'est bien le cas pour les pavés (voir la Proposition 1.30).

La définition de la mesure suit la même logique que la définition de la mesure de Jordan. On commence par définir une mesure extérieure qui correspond à l'infimum des mesures d'ensembles simples (unions de pavés), pour lesquels la notion de mesure est naturelle. La différence par rapport à la mesure de Jordan est donc qu'on autorise des unions dénombrables quand on n'autorisait que des unions finis pour les ensembles élémentaires du Paragraphe B.1.

1.3.1 Mesure extérieure de Lebesgue

On commence par définir la mesure extérieure à partir des unions dénombrables de pavés. Cette application est bien définie pour toute partie de $\mathbb{R}^d$.

Définition 1.27. Soit A une partie de $\mathbb{R}^d$. On pose

$$\lambda^*(A) = \inf_{(P_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\mathcal{P}_A} \sum_{k=0}^{+\infty} |P_k| \qquad \in [0,+\infty],$$

où $\mathcal{P}_A$ l'ensemble des suites $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de pavés de $\mathbb{R}^d$ telles que

$$A \subset \bigcup_{k=0}^{+\infty} P_k.$$

On dit que $\lambda^*(A)$ est la *mesure extérieure de Lebesgue* de A.

Remarque 1.28. On observe que dans la Définition 1.27 on peut se restreindre aux suites de pavés ouverts ou aux suites de pavés fermés. Pour les pavés fermés, il suffit de remarquer que si $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite dans $\mathcal{P}_A$ alors c'est encore le cas pour $(\overline{P_k})_{k\in\mathbb{N}}$, et $|\overline{P_k}| = |P_k|$ pour tout $k\in\mathbb{N}$. D'autre part, étant donné $\varepsilon > 0$ et $(P_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}_A$ telle que $\sum_{k\in\mathbb{N}} |P_k| \leqslant \lambda^*(A)+\varepsilon$, il existe pour tout $k\in\mathbb{N}$ un pavé ouvert $\tilde{P}_k$ tel que $P_k \subset \tilde{P}_k$ et $|\tilde{P}_k| \leqslant |P_k| + \varepsilon 2^{-n}$. Ainsi la suite $(\tilde{P}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathcal{P}_A$ et

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |\tilde{P}_k| \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} |P_k| + 2\varepsilon \leqslant \lambda^*(A) + 3\varepsilon,$$

ce qui montre que l'infimum de la définition ne change pas si on se restreint aux suites de pavés ouverts.

Première chose à faire pour s'assurer que la Définition 1.27 mérite d'être considérée, vérifier qu'elle donne bien ce qu'on attend pour les pavés.

Proposition 1.29. *Si P est un pavé de $\mathbb{R}^d$ on a $\lambda^*(P) = |P|$.*

Démonstration. En considérant la suite $(P, \emptyset, \emptyset, \dots)$, on a par définition $\lambda^*(P) \leqslant |P|$. Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Il existe une suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de pavés ouverts telle que $P \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} P_k$ et

$$\lambda^*(P) \geqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} |P_k| - \varepsilon.$$

Il existe un pavé fermé $\tilde{P}$ de $\mathbb{R}^d$ tel que $\tilde{P} \subset P$ et $|\tilde{P}| \geqslant |P| - \varepsilon$. On a alors $\tilde{P} \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} P_k$. Comme $\tilde{P}$ est compact, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel qu'on a en fait

$$\tilde{P} \subset \bigcup_{k=0}^{N} P_k.$$

D'après les propriétés des ensembles élémentaires (voir Paragraphe B.1) on a

$$|\tilde{P}| \leqslant m\left(\bigcup_{k=0}^{N} P_k\right) \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} |P_k|.$$

D'où, finalement,

$$|P| \leqslant |\tilde{P}| + \varepsilon \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} |P_k| + \varepsilon \leqslant \lambda^*(P) + 2\varepsilon.$$

Cela prouve que $|P| \leqslant \lambda^*(P)$. On a donc égalité. □

On montre maintenant les principales propriétés de λ^* :

Proposition 1.30. *(i) (monotonie) Soient $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ tels que $A \subset B$. On a $\lambda^*(A) \leqslant \lambda^*(B)$.*

(ii) (invariance par translation) Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ et $x \in \mathbb{R}^d$. Alors on a $\lambda^*(A + x) = \lambda^*(A)$.

(iii) (sous-additivité dénombrable) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$. On a

$$\lambda^*\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^*(A_n).$$

Démonstration. • Comme $A \subset B$, tout recouvrement de B par une suite de pavés est aussi un recouvrement de A. Ainsi on a $\mathcal{P}_B \subset \mathcal{P}_A$ et donc

$$\lambda^*(A) = \inf_{(P_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}_A} \sum_{k=0}^{+\infty} |P_k| \leqslant \inf_{(P_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}_B} \sum_{k=0}^{+\infty} |P_k| = \lambda^*(B).$$

• On rappelle qu'on a invariance par translation pour le volume des pavés (si P est un pavé de $\mathbb{R}^d$ et $x \in \mathbb{R}^d$ alors $|P + x| = |P|$). Or pour $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ quelconque, la famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un recouvrement de A par des pavés si et seulement si $(P_k + x)_{k\in\mathbb{N}}$ est un recouvrement de $A + x$ par des pavés. Ainsi, par passage à l'infimum sur la somme des volumes de ces pavés, on obtient bien l'invariance par translation de λ^*.

• On note $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on considère $(P_{n,k})_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}_{A_n}$ telle que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |P_{n,k}| \leqslant \lambda^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$A_n \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} P_{n,k} \subset \bigcup_{(m,k)\in\mathbb{N}^2} P_{m,k},$$

donc

$$A \subset \bigcup_{(m,k)\in\mathbb{N}^2} P_{m,k}.$$

Comme $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, on peut considérer une bijection φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^2$. Pour $j \in \mathbb{N}$ on note $Q_j = P_{\varphi(j)}$. On a alors

$$A \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j,$$

donc

$$(Q_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}_A.$$

On a donc

$$\lambda^*(A) \leqslant \sum_{j\in\mathbb{N}} |Q_j| = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{N}} |I_{n,k}| \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\lambda^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) \leqslant 2\varepsilon + \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(A_n).$$

Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient bien

$$\lambda^*(A) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(A_n).$$

□

Remarque 1.31. Pour toute partie A bornée de $\mathbb{R}^d$, on a $m_{*,J}(A) \leqslant \lambda^*(A) \leqslant m^{*,J}(A)$ (voir Définition B.7). En particulier, si A est mesurable au sens de Jordan alors on a

$$\lambda^*(A) = m_J(A).$$

Exemple 1.32. Si T est le triangle de l'Exemple B.9, alors d'après la remarque précédente on a $\lambda^*(A) = \frac{1}{2}$.

Exemple 1.33. Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable (et donc union dénombrable d'intervalles de longueurs nulles), on a $\lambda^*(\mathbb{Q}) = 0$.

Proposition 1.34. *L'application λ^* ne définit pas une mesure sur l'espace mesurable* $(\mathbb{R}^d, \mathcal{P}(\mathbb{R}^d))$.

Démonstration. On considère le cas $d = 1$. On suppose par l'absurde que λ^* est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$. On considère sur $[0, 1]$ la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, \quad x\mathcal{R}y \iff x - y \in \mathbb{Q}.$$

On considère une partie A de $[0, 1]$ qui contient un élément de chaque classe d'équivalence (on utilise ici l'axiome du choix). Pour $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ distincts on a alors $A + q_1 \cap A + q_2 = \emptyset$. En outre, par invariance par translation on a $\lambda^*(A + q) = \lambda^*(A)$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$. On note

$$B = \bigsqcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,2]} A + q$$

Comme B est union dénombrable des parties deux à deux disjointes $A+q$ pour $q \in \mathbb{Q}\cap[0, 2]$, on peut écrire

$$\lambda^*(B) = \sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,2]} \lambda^*(A + q) = \sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,2]} \lambda^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda^*(A) = 0, \\ +\infty & \text{si } \lambda^*(A) > 0. \end{cases}$$

Comme $B \subset [0, 3]$ on a $\lambda^*(B) \leqslant \lambda^*([0, 3]) \leqslant 3$. Soit maintenant $x \in [1, 2]$. Comme $x-1 \in [0, 1]$ il existe $a \in A$ et $q \in \mathbb{Q}$ tels que $x - 1 = a + q$, soit $x = a + (q + 1)$. On a nécessairement $(q + 1) \in \mathbb{Q} \cap [0, 2]$, et donc $x \in B$. Ainsi $[1, 2] \subset B$, donc $\lambda^*(B) \geqslant \lambda^*([1, 2]) \geqslant 1$. Cela donne une contradiction et prouve que λ^* n'est pas une mesure. En considérant de même les translatés de $A \times [0, 1]^{d-1}$ selon la première coordonnée dans $\mathbb{R}^d$, on conclut de la même façon pour n'importe quel $d \in \mathbb{N}^*$. □

1.3.2 Tribu de Lebesgue

Le phénomène mis en évidence à la Proposition 1.34 est que la mesure extérieure d'une union d'ensembles deux à deux disjoints n'est pas nécessairement égale à la somme des mesures extérieures des ensembles en question.

Le problème était déjà présent pour la mesure extérieure de Jordan. Par exemple, les mesures extérieures de Jordan des ensembles $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ et $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$ sont toutes les deux égales à 1, alors que l'union $[0,1]$ est elle-même de mesure 1. La raison est que si on voit l'intervalle $[0,1]$ comme union finie d'intervalles (de longueurs non nulles), alors tous ces intervalles rencontrent à la fois $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Ainsi, si on utilise ces sous-intervalles pour obtenir un recouvrement de $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ et un recouvrement de $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap[0,1]$, tous doivent être gardés dans les deux cas. En un certain sens, la frontière de $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ est trop « grande ».

En autorisant des unions dénombrables de pavés, on a assoupli le problème (d'ailleurs la mesure extérieure de $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ est maintenant nulle), mais il n'est pas complètement résolu. Ainsi, comme on a fait pour la mesure de Jordan, on ne va garder que les ensembles dont la frontière est suffisamment raisonnable pour pouvoir bien distinguer par des recouvrements dénombrables de pavés l'ensemble de son complémentaire.

Cela peut être formalisé de la façon suivante :

Définition 1.35. On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des parties A de $\mathbb{R}^d$ telles que

$$\forall B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d), \quad \lambda^*(B) = \lambda^*(B\cap A) + \lambda^*(B\setminus A).$$

Remarque 1.36. Puisqu'on a toujours

$$\lambda^*(B) \leqslant \lambda^*(B\cap A) + \lambda^*(B\setminus A),$$

A est dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si

$$\forall B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d), \quad \lambda^*(B\cap A) + \lambda^*(B\setminus A) \leqslant \lambda^*(B).$$

On commence par donner un exemple d'ensemble dont la frontière est particulièrement réduite et qui est donc bien dans $\mathcal{L}(\mathbb{R})$.

Exemple 1.37. Soient $a\in\mathbb{R}$ et $B\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Soit $\varepsilon>0$. Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}_B$ telle que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |I_n| \leqslant \lambda^*(B) + \varepsilon.$$

On a $(I_n\cap]a,+\infty[) \in \mathcal{P}_{B\cap]a,+\infty[}$ et $(I_n\cap]-\infty,a]) \in \mathcal{P}_{B\setminus]a,+\infty[}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a

$$|I_n\cap]a,+\infty[| + |I_n\setminus]a,+\infty[| = |I_n|,$$

d'où

$$\begin{aligned}
\lambda^*(B\cap]a,+\infty[) + \lambda^*(B\setminus]a,+\infty[) &\leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} |I_n\cap]a,+\infty[| + \sum_{n\in\mathbb{N}} |I_n\setminus]a,+\infty[| \\
&\leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} |I_n| \\
&\leqslant \lambda^*(B) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Cela prouve que

$$\lambda^*(B\cap]a,+\infty[) + \lambda^*(B\setminus]a,+\infty[) \leqslant \lambda^*(B),$$

et donc que $]a,+\infty[\in\mathcal{L}(\mathbb{R})$.

Dans l'exemple précédent, la raison pour laquelle tout fonctionne est que la famille $(I_n\cap]-\infty,a], I_n\cap]a,+\infty[)$ donne un recouvrement de B par une union dénombrable d'intervalles qui est bien adaptée au découpage $B = (B\cap]-\infty,a]) \sqcup (B\cap]a,+\infty[)$.

Autre cas où la frontière d'un ensemble est petite, quand l'ensemble lui-même est petit :

Exemple 1.38. Si $A\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ est tel que $\lambda^*(A)=0$ alors $A\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. En effet, pour $B\in\mathbb{R}^d$ on a

$$\lambda^*(A\cap B) \leqslant \lambda^*(A) = 0,$$

et donc

$$\lambda^*(A\cap B) + \lambda^*(B\setminus A) = \lambda^*(B\setminus A) \leqslant \lambda^*(B).$$

L'ensemble $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ de parties de $\mathbb{R}^d$ est maintenant notre candidat pour définir la mesure de Lebesgue. On doit donc vérifier qu'il a bien la structure adéquate.

Proposition 1.39. *L'ensemble $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ est une tribu de $\mathbb{R}^d$.*

Démonstration. • Pour $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\lambda^*(B \cap \mathbb{R}^d) + \lambda^*(B \setminus \mathbb{R}^d) = \lambda^*(B) + \lambda^*(\emptyset) = \lambda^*(B),$$

donc $\mathbb{R}^d \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$.
• Soit maintenant $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. Pour $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\lambda^*\big(B \cap (\mathbb{R}^d \setminus A)\big) + \lambda^*\big(B \setminus (\mathbb{R}^d \setminus A)\big) = \lambda^*(B \setminus A) + \lambda^*(B \cap A) = \lambda^*(B).$$

Cela prouve que $\mathbb{R}^d \setminus A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$.
• Soient $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ et $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. On note $C = B \cap (A_1 \cup A_2)$, de sorte que $B \cap A_1 = C \cap A_1$ et $(B \setminus A_1) \cap A_2 = C \setminus A_1$. On a alors

$$\begin{aligned}
\lambda^*(B) &= \lambda^*(B \cap A_1) + \lambda^*(B \setminus A_1) \\
&= \lambda^*(B \cap A_1) + \lambda^*\big((B \setminus A_1) \cap A_2\big) + \lambda^*\big((B \setminus A_1) \setminus A_2\big) \\
&= \lambda^*(C \cap A_1) + \lambda^*(C \setminus A_1) + \lambda^*\big(B \setminus (A_1 \cup A_2)\big) \\
&= \lambda^*\big(B \cap (A_1 \cup A_2)\big) + \lambda^*\big(B \setminus (A_1 \cup A_2)\big).
\end{aligned}$$

Cela prouve que $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. D'autre part, comme $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ est stable par passage au complémentaire,

$$\mathbb{R} \setminus (A_1 \cap A_2) = (\mathbb{R} \setminus A_1) \cup (\mathbb{R} \setminus A_2) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d),$$

et donc $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. Par récurrence, on obtient que toute union ou intersection finie d'éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ appartient à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$.
• Soit $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. On note $A = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$. Pour $k \in \mathbb{N}$ on note $U_k = \bigcup_{j=0}^k A_j$. On a alors $U_k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Soit $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme $U_k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ et $U_k \subset A$ on a

$$\lambda^*(B) = \lambda^*(B \cap U_k) + \lambda^*(B \setminus U_k) \geqslant \lambda^*(B \cap U_k) + \lambda^*(B \setminus A).$$

Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que

$$\lambda^*(B \cap U_k) = \sum_{j=0}^{k} \lambda^*(B \cap A_j).$$

Pour $k = 0$ c'est clair puisque $U_0 = A_0$. On suppose le résultat acquis jusqu'au rang $k-1$ ($k \geqslant 1$). Comme $U_{k-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\begin{aligned}
\lambda^*(B \cap U_k) &= \lambda^*((B \cap U_k) \cap U_{k-1}) + \lambda^*((B \cap U_k) \setminus U_{k-1}) \\
&= \lambda^*(B \cap U_{k-1}) + \lambda^*(B \cap A_k) \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^*(B \cap A_j) + \lambda^*(B \cap A_k) \\
&= \sum_{j=0}^{k} \lambda^*(B \cap A_j).
\end{aligned}$$

On a alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\lambda^*(B) \geqslant \sum_{j=0}^{k} \lambda^*(B \cap A_j) + \lambda^*(B \setminus A).$$

Par passage à la limite on obtient

$$\lambda^*(B) \geqslant \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda^*(B \cap A_j) + \lambda^*(B \setminus A). \tag{$*$}$$

Puisque

$$\lambda^*(B \cap A) = \lambda^* \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} (B \cap A_j) \right) \leqslant \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda^*(B \cap A_j),$$

cela donne

$$\lambda^*(B) \geqslant \lambda^*(B \cap A) + \lambda^*(B \setminus A)$$

et prouve que $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$.

- On considère maintenant une suite quelconque $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. On note $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ et on montre que $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. On note $C_0 = A_0$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$C_k = A_k \setminus \bigcup_{j=0}^{k-1} A_j.$$

Comme $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ est stable par union et intersection finie et par passage au complémentaire, on obtient que C_k appartient à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En outre les C_k pour $k \in \mathbb{N}$ sont deux à deux disjoints et on a

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n = A.$$

Ainsi A appartient à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ comme union dénombrable d'éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ deux à deux disjoints. □

Comme on souhaite que la mesure de Lebesgue soit invariante par translation, il faut que la tribu $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ soit elle-même stable par translation.

Proposition 1.40. *Soient $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ et $x \in \mathbb{R}^d$. Alors on a $A + x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. Soit $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. Alors on a

$$(A + x) \cap B = \big(A \cap (B - x)\big) + x$$

et

$$(A + x) \setminus B = \big(A \setminus (B - x)\big) + x,$$

donc

$$\begin{aligned} \lambda^*\big((A + x) \cap B\big) + \lambda^*\big((A + x) \setminus B\big) &= \lambda^*\big(A \cap (B - x)\big) + \lambda^*\big(A \setminus (B - x)\big) \\ &= \lambda^*(B - x) = \lambda^*(B). \end{aligned}$$

D'où $A + x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. □

On a déjà introduit sur $\mathbb{R}^d$ une tribu naturellement donnée par la topologie usuelle, la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. A défaut de pouvoir définir la mesure de Lebesgue sur toutes les parties de $\mathbb{R}^d$, cette tribu était une candidate naturelle pour être le cadre de travail pour la suite. La question est donc de savoir si les boréliens ont ou non un bon comportement vis-à-vis du problème évoqué en début de paragraphe. La réponse a déjà été essentiellement donnée à l'Exemple 1.37.

Proposition 1.41. *On a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. Pour le cas $d = 1$, on a déjà montré à l'Exemple 1.37 que tous les intervalles de la forme $]a, +\infty[$ appartiennent à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. Puisque ces intervalles engendrent $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, on obtient que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R})$. On peut procéder de la même façon en dimension quelconque, les demi-espaces de la forme $\big\{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \,|\, x_j > a\big\}$ pour $j \in [\![1, d]\!]$ et $a \in \mathbb{R}$ sont dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, et l'ensemble de ces demi-espaces engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. □

Remarque 1.42. L'inclusion de la Proposition 1.41 est stricte. On peut montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ a la puissance du continu (il est en bijection avec $\mathbb{R}$) tandis que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ est en bijection avec $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Le but de la mesure de Lebesgue par rapport à la mesure de Jordan est d'être capable d'attribuer une mesure à un plus grand nombre de partie de $\mathbb{R}^d$. Il serait donc souhaitable que toutes les parties de $\mathbb{R}^d$ qui sont déjà mesurables au sens de Jordan soient en particulier dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 1.43. *Une partie de $\mathbb{R}^d$ mesurable au sens de Jordan (voir Définition B.7) appartient à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. Soit A une partie de $\mathbb{R}^d$ mesurable au sens de Jordan. Soit $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe deux ensembles élémentaires E_- et E_+ tels que $E_- \subset A \subset E_+$ et $m(E_+ \setminus E_-) \leqslant \varepsilon$. Soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de pavés de $\mathbb{R}^d$ telle que $B \subset P := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} P_k$ et $\lambda^*(B) \geqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} |P_k| - \varepsilon$.

On a $A \cap B \subset E_+ \cap P$ et $B \setminus A \subset P \setminus E_-$ donc

$$\lambda^*(B \cap A) + \lambda^*(B \setminus A) \leqslant \lambda^*(P \cap E_+) + \lambda^*(P \setminus E_-).$$

Comme E_- appartient à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ (comme union finie de pavés) et $(P \cap E_+) \subset (P \cap E_-) \cup (E_+ \setminus E_-)$ on a

$$\begin{aligned}
\lambda^*(B \cap A) + \lambda^*(B \setminus A) &\leqslant \lambda^*(P \cap E_-) + \lambda^*(E_+ \setminus E_-) + \lambda(P \setminus E_-) \\
&\leqslant \lambda^*(P) + \varepsilon \\
&\leqslant \lambda^*(B) + 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient que A appartient à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. □

1.3.3 Mesure de Lebesgue

On a vu à la Proposition 1.34 que la mesure de Lebesgue que l'on cherche à construire ne pourra pas être définie pour toute partie de $\mathbb{R}^d$. On a alors défini une collection $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ de parties de $\mathbb{R}^d$ supposées suffisamment « régulières » pour que la mesure d'une union disjointe soit bien la somme des mesures. Et en effet, si l'on concède cette restriction, alors la mesure extérieure définit bien la mesure tant attendue.

Proposition 1.44. *La restriction de λ^* à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ (et donc à $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$) est une mesure.*

Démonstration. On a bien $\lambda^*(\emptyset) = 0$. Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ une suite de parties mesurables deux à deux disjointes. On note $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. D'après $(*)$ appliquée avec $B = A$ on obtient

$$\lambda^*(A) \geqslant \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda^*(A_j).$$

Puisque l'inégalité inverse est toujours vraie d'après la Proposition 1.30, on obtient donc

$$\lambda^*(A) = \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda^*(A_j),$$

ce qui prouve que λ^* est une mesure sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ et donc, par restriction, sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. □

Définition 1.45. On appelle *mesure de Lebesgue* et on note λ la restriction de λ^* à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ ou à $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Remarque 1.46. Comme $\mathbb{R}^d = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [-n, n]^d$ et que $\lambda^*([-n, n]^d) = (2n)^d$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient que la mesure de Lebesgue est σ-finie.

Proposition 1.47. *Soit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. Alors*

$$\begin{aligned}
\lambda(A) &= \inf \left\{ \lambda(O), O \textit{ ouvert dans } \mathbb{R}^d \textit{ contenant } A \right\} \\
&= \sup \left\{ \lambda(K), K \textit{ compact de } \mathbb{R}^d \textit{ contenu dans } A \right\}.
\end{aligned}$$

Démonstration. • Si O est un ouvert contenant A on a $\lambda(A) \leqslant \lambda(O)$, donc

$$\lambda(A) \leqslant \inf \left\{ \lambda(O), O \text{ ouvert dans } \mathbb{R}^d \text{ contenant } A \right\}.$$

L'inégalité opposée est claire si $\lambda(A) = +\infty$. On suppose donc que $\lambda(A) < +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $(P_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}_A$ telle que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |P_k| \leqslant \lambda(A) + \varepsilon.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe un pavé ouvert $\tilde{P}_k$ tel que $|\tilde{P}_k| \leqslant |P_k| + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$. On note $O = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \tilde{P}_k$. Alors O est ouvert et puisque la suite $(\tilde{P}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathcal{P}_A$ on a

$$\lambda(O) \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} |\tilde{P}_k| \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} |P_k| + \varepsilon \leqslant \lambda(A) + 2\varepsilon.$$

D'où

$$\inf \left\{ \lambda(O), O \text{ ouvert dans } \mathbb{R}^d \text{ contenant } A \right\} \leqslant \lambda(A).$$

• On a déjà

$$\lambda(A) \geqslant \sup \left\{ \lambda(K), K \text{ compact de } \mathbb{R}^d \text{ contenu dans } A \right\}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note $P_n = [-n,n]^d$ et $A_n = A \cap P_n$. On a alors

$$\lambda(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda(A).$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe un ouvert O_n contenant $P_n \setminus A_n$ et tel que

$$\lambda(O_n) \leqslant \lambda(P_n \setminus A_n) + \frac{1}{n}.$$

On note $K_n = P_n \setminus O_n$. K_n est un compact inclus dans A_n et $A_n \setminus K_n \subset O_n \setminus (P_n \setminus A_n)$, donc

$$\lambda(K_n) \geqslant \lambda(A_n) - \frac{1}{n}.$$

On a alors $K_n \subset A$ et

$$\lambda(K_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda(A).$$

□

L'enjeu essentiel de cette section est d'avoir construit une mesure qui étend la notion de volume sur $\mathbb{R}^d$. On peut se demander s'il y avait d'autres façons de faire. Le résultat d'unicité suivant montre que non.

Théorème 1.48. *Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ invariante par translation et finie sur les bornés. Alors il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que $\mu = C\lambda$. En particulier, la mesure de Lebesgue est l'unique mesure sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ telle que la mesure d'un pavé P de $\mathbb{R}^d$ est $|P|$.*

Démonstration. On note $C = \mu\big([0,1[^d\big)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par invariance par translation on obtient que

$$\mu\left(\left[0, \frac{1}{n}\right[\right) = \frac{C}{n^d}.$$

On considère maintenant un pavé ouvert

$$P = \prod_{j=1}^{d}]a_j, b_j[.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $j \in [\![1,d]\!]$ on considère $p_{j,n}, q_{j,n} \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\frac{p_{j,n}}{n} \leqslant a_j < \frac{p_{j,n}+1}{n} \quad \text{et} \quad \frac{q_{j,n}}{n} \leqslant b_j < \frac{q_{j,n}+1}{n}.$$

On a alors

$$\bigcup_{p_{j,n}+1\leqslant k_j\leqslant q_{j,n}-1}\prod_{j=1}^{d}\left[\frac{k_j}{n},\frac{k_j+1}{n}\right[\subset P\subset\bigcup_{p_{j,n}\leqslant k_j\leqslant q_{j,n}}\prod_{j=1}^{d}\left[\frac{k_j}{n},\frac{k_j+1}{n}\right[,$$

et donc

$$\frac{C}{n^d}\prod_{j=1}^{d}(q_{j,n}-p_{j,n}-2)\leqslant\mu(P)\leqslant\frac{C}{n^d}\prod_{j=1}^{d}(q_{j,n}-p_{j,n}).$$

Par passage à la limite ($n\to+\infty$), on obtient

$$\mu(P)=C\prod_{j=1}^{d}(b_j-a_j)=C\lambda(P).$$

Puisque les pavés ouverts sont stables par intersection finie et engendrent $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ par le lemme d'unicité des mesures que $\mu=C\lambda$. La deuxième assertion s'obtient de la même façon par ce même lemme d'unicité. □

On termine cette discussion sur la mesure de Lebesgue avec la question de la complétude. On déduit que l'Exemple 1.38 que toutes les parties négligeables pour la mesure de Lebesgue sont dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. Par contre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ est une tribu beaucoup plus petite :

Proposition 1.49. *La mesure de Lebesgue est complète sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ mais pas sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, et la complétion de la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ est exactement la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. On note $\mathcal{M}^*$ la tribu obtenue par complétion de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

- Soit $A\in\mathcal{M}^*$. Il existe $A_-,A_+\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ tels que $A_-\subset A\subset A_+$ et $\lambda(A_+\setminus A_-)=0$. Soit $B\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. On a

$$\lambda^*(B\cap A)+\lambda^*(B\setminus A)\leqslant\lambda^*(B\cap A_+)+\lambda^*(B\setminus A_-).$$

Comme $B\cap A_-\subset B\cap A_+$ et $\lambda^*\big((B\cap A_+)\setminus(B\cap A_-)\big)\leqslant\lambda^*(A_+\setminus A_-)=0$, on a $\lambda^*(B\cap A_+)=\lambda^*(B\cap A_-)$ puis, comme $A_-\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\subset\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$,

$$\lambda^*(B\cap A)+\lambda^*(B\setminus A)\leqslant\lambda^*(B\cap A_-)+\lambda^*(B\setminus A_-)=\lambda^*(B).$$

Cela prouve que $A\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, et donc que $\mathcal{M}^*\subset\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$.

- Soit maintenant $A\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. Pour $n\in\mathbb{N}$ on note $Q_n=[-n,n]^d$ et $A_n=A\cap Q_n$. Soit $n\in\mathbb{N}$. Comme $\lambda^*(A_n)$ est finie, il existe pour tout $m\in\mathbb{N}^*$ une suite $(P_{m,j})_{j\in\mathbb{N}}$ de pavés de $\mathbb{R}^d$ (qu'on peut supposer inclus dans Q_n) tels que si on note

$$B_m=\bigcup_{j\in\mathbb{N}}P_{m,j}$$

alors $A_n\subset B_m$ et

$$\sum_{j\in\mathbb{N}^*}|P_{m,j}|\leqslant\lambda^*(A_n)+\frac{1}{m}.$$

On note $B=\bigcap_{m\in\mathbb{N}^*}B_m$. Alors B est un borélien de $\mathbb{R}^d$, $A\subset B$ et

$$\lambda(B)\leqslant\lambda^*(A_n).$$

On obtient de la même façon un borélien B' tel que $(Q_n\setminus A_n)\subset B'$ et $\lambda(B')=\lambda^*(Q_n\setminus A_n)$. On a alors $(Q_n\setminus B')\subset A_n\subset B$. Comme $A_n\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\lambda^*(Q_n)=\lambda^*(A_n)+\lambda^*(Q_n\setminus A_n),$$

d'où

$$\lambda(Q_n\setminus B')=\lambda(Q_n)-\lambda(B')=\lambda(Q_n)-\lambda^*(Q_n\setminus A_n)=\lambda^*(A_n)=\lambda(B).$$

Puisque ces ensembles sont de mesures finies, cela assure que $\lambda(B\setminus(Q_n\setminus B'))=0$ et donc que $A_n\in\mathcal{M}^*$. Enfin on a

$$A=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\in\mathcal{M}^*,$$

et la démonstration est complète. □