Examen final

Vendredi 03 mai 2019 (2h)

Aucun document (ni calculatrice, ni téléphone, etc.) n'est autorisé. On accordera un soin particulier à la rédaction.

Pour les exercices 1 à 4, les intégrales sont toutes relatives à la tribu borélienne et la mesure de Lebesgue.

Exercice 1. **1.** Montrer que pour tout $y \in [0,1[$ on a $\ln(1-y) \leqslant -y$. En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,n[$ on a

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leqslant e^{-x}.$$

2. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ la fonction $x \mapsto x^{-\frac{1}{n}}$ est intégrable sur $]0,1]$ et calculer la valeur de l'intégrale correspondante.
3. Pour $n \geqslant 2$ on pose

$$I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{-\frac{1}{n}}\, dx.$$

Montrer que I_n est bien définie pour tout $n \geqslant 2$ et étudier sa limite éventuelle quand n tend vers $+\infty$.

Correction : **1.** La fonction $\ell : y \mapsto \ln(1-y) + y$ est de classe C^∞ sur $[0,1[$ et pour $y \geqslant 0$ on a $\ell'(y) = -\frac{1}{1-y} + 1 \leqslant 0$. Cela prouve que ℓ atteint son maximum en 0, où elle est nulle. Elle est donc partout négative, ce qui implique que $\ln(1-y) \leqslant -y$ pour tout $y \in [0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,n[$ on a alors

$$\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \leqslant \frac{x}{n}.$$

Par croissance de la fonction exponentielle on obtient

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{n\ln(1-\frac{x}{n})} \leqslant e^{-n\frac{x}{n}} = e^{-x}.$$

2. Soit $n \geqslant 2$. La fonction $x \mapsto x^{-\frac{1}{n}}$ est continue donc mesurable sur $]0,1]$. Pour $\varepsilon \in]0,1]$ on a

$$\int_\varepsilon^1 x^{-\frac{1}{n}}\, dx = \left[\frac{x^{1-\frac{1}{n}}}{1-\frac{1}{n}}\right]_\varepsilon^1 = \frac{1-\varepsilon^{1-\frac{1}{n}}}{1-\frac{1}{n}} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \frac{n}{n-1}.$$

D'où

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{n}}\, dx = \frac{n}{n-1}.$$

3. Soit $n \geqslant 2$. La fonction $x \mapsto \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{-\frac{1}{n}}$ est continue donc mesurable sur $]0,n]$. Pour $n \geqslant 2$ et $x > 0$ on pose

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{-\frac{1}{n}} \mathbb{1}_{[0,n[}(x).$$

Soit $n \geqslant 2$. Pour $x \in]0,1]$ on a

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant x^{-\frac{1}{n}} \leqslant x^{-\frac{1}{2}},$$

et pour $x \geqslant 1$ on a d'après la question précédente

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leqslant e^{-x}.$$

Ainsi, si on pose

$$g(x) = \begin{cases} x^{-\frac{1}{2}} & \text{si } x \in]0,1], \\ e^{-x} & \text{si } x \geqslant 1, \end{cases}$$

on obtient que $0 \leqslant f_n(x) \leqslant g(x)$ pour tout $n \geqslant 2$ et tout $x > 0$. Cette fonction g est mesurable sur $]0,1]$ et $]1,+\infty[$ donc sur $]0,+\infty[$ et on a

$$\int_0^{+\infty} g(x)\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx + \int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx < +\infty.$$

Cela prouve que g est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. En particulier, f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout $n \geqslant 2$. En outre on peut appliquer le théorème de convergence dominée. Comme pour tout $x > 0$ on a

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{-\frac{1}{n}} = e^{n\ln(1-\frac{x}{n}) - \frac{1}{n}\ln(x)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-x},$$

on a alors

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1.$$

Exercice 2. **1.** Soit f une fonction borélienne de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.

a. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{N} f(x+n)\,dx = \int_0^{N+1} f(y)\,dy.$$

b. En déduire que

$$\int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{N}} f(x+n)\,dx = \int_0^{+\infty} f(y)\,dy.$$

2. Soit f une fonction intégrable de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.

a. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(x+n)$ est convergente pour presque tout $x \in [0,1]$.

b. En déduire que cette série est en fait convergente pour presque tout $x \in \mathbb{R}_+$.

Correction : **1.** a. Soit $N \in \mathbb{N}$. Par linéarité de l'intégrale on a

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{N} f(x+n)\,dx = \sum_{n=0}^{N} \int_0^1 f(x+n)\,dx.$$

Pour $n \in [\![0, N]\!]$ on a par le changement de variables $y = x + n$ $(dy = dx)$

$$\sum_{n=0}^{N} \int_0^1 f(x+n)\,dx = \int_n^{n+1} f(y)\,dy.$$

Par la relation de Chasles on a alors

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{N} f(x+n)\,dx = \sum_{n=0}^{N} \int_n^{n+1} f(y)\,dy = \int_0^{N+1} f(y)\,dy.$$

b. D'après le théorème de convergence monotone et la question précédente on a

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{N}} f(x+n)\,dx &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_0^1 f(x+n)\,dx \\ &= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \int_0^1 f(x+n)\,dx \\ &= \lim_{N\to+\infty} \int_0^{N+1} f(y)\,dy \\ &= \int_0^{+\infty} f(y)\,dy.\end{aligned}$$

On note que cette dernière égalité résulte aussi du théorème de convergence monotone. En effet, puisque f est à valeurs positives, la suite de fonctions $(\mathbb{1}_{[0,N+1]}f)_{N\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge simplement vers f sur $[0,+\infty[$.

2. a. D'après la question précédente appliquée avec $|f|$ on a

$$\int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{N}} |f(x+n)|\,dx = \int_0^{+\infty} |f(y)|\,dy < \infty.$$

Cela implique en particulier qu'il existe un borélien $E_0 \subset [0,1]$ de mesure de Lebesgue nulle et tel que pour presque tout $x \in [0,1]\setminus E_0$ on a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |f(x+n)| < +\infty.$$

Pour $x \in [0,1]\setminus E_0$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(x+n)$ est en particulier convergente.

b. Pour $n\in\mathbb{N}$ on note $E_n = E+n$, puis $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Alors $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ et $\lambda(E) = 0$. Soit maintenant $x \in \mathbb{R}_+ \setminus E$ et ν la partie entière de x. Comme $x \in [\nu,\nu+1[\setminus E_\nu$, on a $x-\nu \in [0,1]\setminus E_0$ et donc

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |f(x+n)| \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} |f(x-\nu_x+n)| < +\infty.$$

Cela prouve que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(x+n)$ est convergente pour tout $x\in\mathbb{R}_+\setminus E$.

Exercice 3. Soient $a,b \in]1,+\infty[$. On note D l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ délimité par les courbes d'équations $y = ax$, $y = x/a$, $y = b/x$ et $y = 1/(bx)$, et contenant le point (1,1). Calculer l'aire (c'est-à-dire la mesure de Lebesgue) de D. *Indication : on pourra effectuer le changement de variables $x = u/v$, $y = uv$.*

<u>Correction :</u> On observe que $D \subset (\mathbb{R}_+^*)^2$ et que pour $(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$ on a

$$(x,y)\in D \iff \left(\frac{1}{b} < xy < b \quad \text{et} \quad \frac{1}{a} < \frac{y}{x} < a\right).$$

On note $D' = \left]\frac{1}{\sqrt{b}}, \sqrt{b}\right[\times \left]\frac{1}{\sqrt{a}}, \sqrt{a}\right[$ et on considère l'application

$$\Phi : \left\{\begin{array}{ccc} D' & \to & D, \\ (u,v) & \mapsto & \left(\frac{u}{v}, uv\right). \end{array}\right.$$

Φ est bien à valeurs dans D d'après l'équivalence précédente. Soit $(x,y)\in D$. Pour $(u,v)\in D'$ on a

$$(x,y) = \Phi(u,v) \iff \begin{cases} x = \frac{u}{v} \\ y = uv \end{cases} \iff \begin{cases} xy = u^2 \\ \frac{y}{x} = v^2 \end{cases} \iff \begin{cases} u = \sqrt{xy} \\ v = \sqrt{\frac{y}{x}} \end{cases}$$

Cela prouve que Φ est une bijection de D' dans D. En outre Φ et Φ^{-1} sont de classe C^1 (et même C^∞), donc Φ est un C^1-difféomorphisme de D' dans D. En outre, pour tout $(u,v) \in D'$ on a

$$J\Phi(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{v} & v \\ -\frac{u}{v^2} & u \end{vmatrix} = \frac{2u}{v}.$$

Ainsi, d'après le théorème de changement de variables on a

$$\lambda(D) = \iint_D 1 \, d\lambda(x,y) = \iint_{D'} J\Phi(u,v) \, d\lambda(u,v) = \int_{D'} \frac{2u}{v} \, d\lambda(u,v).$$

Par le théorème de Fubini-Tonelli on a alors

$$\lambda(D) = 2 \int_{\frac{1}{\sqrt{b}}}^{\sqrt{b}} u \, du \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\sqrt{a}} \frac{1}{v} \, dv = \left(b - \frac{1}{b}\right) \left(\ln(\sqrt{a}) - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\right) = \frac{b^2-1}{b} \ln(a).$$

Exercice 4. Soit φ une fonction borélienne de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. Pour $p \in \mathbb{R}$ tel que la fonction $t \mapsto \varphi(t)e^{-tp}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ on pose

$$L_\varphi(p) = \int_0^{+\infty} \varphi(t)e^{-tp} \, dt.$$

On considère f et g deux fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.
1. Montrer que $L_f(p)$ est au moins définie pour $p > 0$.
2. Montrer que L_f est dérivable sur $]0, +\infty[$.
3. Pour $t \geqslant 0$ on pose

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(s)g(t-s) \, ds.$$

Montrer que $L_{f*g}(p)$ est bien défini pour tout $p > 0$ et exprimer sa valeur en fonction de $L_f(p)$ et $L_g(p)$.

Correction : **1.** Soit $M \geqslant 0$ tel que $|f| \leqslant M$. Soit $p > 0$. La fonction $t \mapsto f(t)e^{-tp}$ est continue donc mesurable, et

$$\int_0^{+\infty} |f(t)| \, e^{-tp} \, dt \leqslant M \int_0^{+\infty} e^{-tp} = \frac{M}{p}.$$

Ainsi la fonction $t \mapsto f(t)e^{-tp}$ est intégrable pour tout $p > 0$.
2. La fonction $p \mapsto f(t)e^{-tp}$ est dérivable de dérivée $-tf(t)e^{-tp}$ pour tout $t \geqslant 0$. Soit $p_0 > 0$. Alors pour tout $p \geqslant p_0$ et $t \geqslant 0$ on a

$$\left|-tf(t)e^{-tp}\right| \leqslant Mte^{-tp_0}.$$

Or l'application $t \mapsto Mte^{-tp_0}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (c'est une fonction continue qui est négligeable devant $1/t^2$ en $+\infty$ par croissances comparées), donc par le théorème de dérivation sous l'intégrale on obtient que L_f est dérivable sur $]p_0, +\infty[$. Ceci étant valable pour tout $p_0 > 0$, cela prouve que L_f est bien dérivable sur $]0, +\infty[$.
3. Quitte à prendre M plus grand, on peut supposer qu'on a aussi $|g| \leqslant M$. Soit $t \geqslant 0$. La fonction $s \mapsto f(s)g(t-s)$ est continue sur le segment $[0,t]$ donc $(f*g)(t)$ est bien définie. En outre, $|(f*g)(t)| \leqslant tM^2$. Puisque la fonction $t \mapsto tM^2e^{-tp}$ est intégrable pour tout $p > 0$, la fonction L_{f*g} est bien définie sur $]0, +\infty[$. Soit $p > 0$. La fonction

$$(t,s) \mapsto \mathbb{1}_{[0,t]}(s) f(s) g(t-s) e^{-tp}$$

est mesurable et par le théorème de Fubini-Tonelli on a

$$\iint_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{[0,t]}(s) \, |f(s)| \, |g(t-s)| \, e^{-tp} \, ds \, dt \leqslant M^2 \int_0^{+\infty} te^{-tp} \, dt < +\infty.$$

D'après le théorème de Fubini-Lebesgue on peut alors écrire

$$\begin{aligned}
L_{f*g}(p) &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t f(s)g(t-s)\,ds \right) e^{-tp}\,dt \\
&= \int_0^{+\infty} f(s)e^{-sp} \left(\int_s^{+\infty} g(t-s)e^{-(t-s)p}\,dt \right) ds \\
&= \int_0^{+\infty} f(s)e^{-sp} \left(\int_0^{+\infty} g(\theta)e^{-\theta p}\,d\theta \right) ds \\
&= L_f(p)L_g(p).
\end{aligned}$$

On a effectué le changement de variable $\theta = t - s$, $d\theta = dt$.

Exercice 5. Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini tel que $\{x\} \in \mathcal{M}$ pour tout $x \in X$. On note

$$A_\mu = \{x \in X \mid \mu(\{x\}) > 0\}.$$

On dit que la mesure μ est diffuse si $A_\mu = \emptyset$.
1. La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est-elle diffuse ? La mesure de Dirac en 0 est-elle diffuse ?
2. On revient au cas général. Montrer que l'ensemble A_μ est dénombrable. En déduire que $A_\mu \in \mathcal{M}$.

On dit que la mesure μ est purement atomique si $\mu(X \setminus A_\mu) = 0$.
3. La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est-elle purement atomique ? La mesure de Dirac en 0 est-elle purement atomique ?
4. Donner un exemple de mesure qui n'est ni diffuse ni purement atomique.
5. Montrer que si la mesure μ est purement atomique alors pour tout $B \in \mathcal{M}$ on a

$$\mu(B) = \sum_{x \in B \cap A_\mu} \mu(\{x\}).$$

6. Montrer qu'il existe un unique couple de mesures (μ_d, μ_a) sur $(X, \mathcal{M})$ tel que

$$\begin{cases} \mu = \mu_d + \mu_a, \\ \mu_d \text{ est diffuse,} \\ \mu_a \text{ est purement atomique.} \end{cases}$$

<u>Correction :</u> **1.** La mesure de Lebesgue est diffuse car on a bien $\lambda(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La mesure de Dirac en 0 n'est pas diffuse car $\delta_0(\{0\}) = 1$.
2. Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de parties mesurables de mesures finies telles que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} E_n = X$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note

$$B_n = \left\{ x \in E_n \mid \mu(\{x\}) > \frac{1}{n} \right\}$$

Comme E_n est de mesure finie, B_n est nécessairement un ensemble fini. Puisque

$$A_\mu = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n,$$

on obtient que A_μ est dénombrable. Ainsi A_μ est union dénombrable de singletons, qui par hypothèse sont tous mesurables, donc A_μ est mesurable.
3. La mesure de Lebesgue n'est pas purement atomique puisque $A_\lambda = \emptyset$ et $\lambda(\mathbb{R}) \neq 0$. La mesure de Dirac en 0 est purement atomique car $A_{\delta_0} = \{0\}$ et $\delta_0(\mathbb{R}^*) = 0$.
4. Un exemple de mesure qui n'est ni diffuse ni purement atomique est $\mu = \lambda + \delta_0$. On a $A_\mu = \{0\}$ et $\mu(\mathbb{R}^*) \neq 0$.

5. On suppose que μ est purement atomique. Alors pour $B \in \mathcal{M}$ on a

$$\mu(B) = \mu(B \cap A_\mu) = \sum_{x \in B \cap A_\mu} \mu(\{x\})$$

car $B \cap A_\mu$ est dénombrable.
6. On suppose que le couple (μ_a, μ_d) est solution. Puisque μ_d est diffuse et A_μ est dénombrable on a

$$\mu_d(A_\mu) = \sum_{x \in A_\mu} \mu_d(\{x\}) = 0.$$

En outre pour tout $x \in X$ on a

$$\mu(\{x\}) = \mu_a(\{x\}) + \mu_d(\{x\}) = \mu_a(\{x\}),$$

donc $A_{\mu_a} = A_\mu$. Puisque μ_a est purement atomique on a alors

$$\mu_a(X \setminus A_\mu) = \mu_a(X \setminus A_{\mu_a}) = 0.$$

Finalement, pour tout $B \in \mathcal{M}$ on a

$$\mu_a(B) = \mu(B \cap A_\mu) = \sum_{x \in A_\mu \cap B} \mu(\{x\}) \quad \text{et} \quad \mu_d(B) = \mu(B \setminus A_\mu).$$

Inversement on vérifie que μ_a et μ_d ainsi définies sont effectivement solutions. D'où le résultat.