CC n° 2

Mercredi 10 avril 2019 (1h30)

Aucun document (ni calculatrice, ni téléphone, etc.) n'est autorisé. On accordera un soin particulier à la rédaction.

Exercice 1. Énoncer l'inégalité de Hölder.

Exercice 2. **1.** En détaillant bien tous les calculs, calculer la valeur de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\, d\lambda_2(x,y),$$

où on a noté λ_2 la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$.
2. En déduire la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx.$$

3. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a $1 - e^{-\theta} \leqslant \theta$.
4. Soit $y \geqslant 0$. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1-e^{-yx^2}}{x^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ (muni de la mesure de Lebesgue). On note alors

$$F(y) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-yx^2}}{x^2}\, dx.$$

5. Sans utiliser les résultats des questions suivantes, étudier la limite éventuelle de $\frac{F(y)}{y}$ quand y tend vers $+\infty$.
6. Montrer que F est continue sur $[0, +\infty[$.
7. Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$. Exprimer la valeur de F' en fonction de l'intégrale I de la question 2.
8. Calculer la valeur de $F(y)$ pour tout $y \geqslant 0$ (en fonction de I).

Exercice 3. Soit $t \geqslant 0$. On pose

$$I(t) = \iint_{[1,+\infty[\times\mathbb{R}} \frac{1}{x^2y^2 + x^2 + t}\, d\lambda_2(x,y).$$

Montrer que $I(t)$ est bien définie et calculer sa valeur. On pourra par exemple effectuer le changement de variables $(x,y) = \left(\sqrt{v^2-t}, \frac{uv}{\sqrt{v^2-t}}\right)$.

Exercice 4. On munit $\mathbb{R}$ de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue. Soient $p, q \in [1, +\infty]$ deux exposants conjugués. Soient $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R})$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\, dy.$$

Montrer que cette intégrale est bien définie pour tout x et que cela définit une fonction $(f * g)$ bornée. Donner une estimation de $\|f * g\|_{\mathcal{L}^\infty}$ en fonction de $\|f\|_{\mathcal{L}^p}$ et $\|g\|_{\mathcal{L}^q}$.