CC n$^{\text{o}}$ 1

Mercredi 13 mars 2019 (1h30)

Aucun document (ni calculatrice, ni téléphone, etc.) n'est autorisé. On accordera un soin particulier à la rédaction.

Exercice 1. **1.** Énoncer le théorème de convergence dominée (version au choix).
2. On munit $\mathbb{R}$ de la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et de la mesure de Lebesgue λ. Soit f une fonction intégrable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale

$$I_n = \int_{\mathbb{R}} e^{-n\sin(\pi x)^2} f(x)\, d\lambda(x)$$

est bien définie.
3. Étudier la limite éventuelle de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2.
1. Soit A un ouvert de $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble des $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tels que $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ est une tribu de $\mathbb{R}$.
2. En déduire que pour tous A ouvert de $\mathbb{R}$ et $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on a $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.
3. Montrer que pour tous $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on a $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 3. On note λ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on note

$$\mu(A) = \int_A e^{-x}\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x} \mathbb{1}_A(x)\, d\lambda(x).$$

1. Justifier que $\mu(A)$ est bien définie dans $[0, +\infty]$.
2. Calculer $\mu(\mathbb{R}_+)$ et $\mu(\mathbb{R})$ *(on ne demande pas de justification trop précise pour cette question).*
3. Montrer que μ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
4. Montrer que tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $\lambda(A) = 0$ vérifie $\mu(A) = 0$ (on dit que μ est absolument continue par rapport à λ).
5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Montrer que f est intégrable par rapport à μ si et seulement si $x \mapsto f(x)e^{-x}$ est intégrable par rapport à λ, et que dans ce cas

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x} f(x)\, d\lambda(x).$$

On pourra commencer par montrer cette égalité dans le cas où f est étagée à valeurs positives.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante.
1. Montrer que f est borélienne.
2. Montrer que l'ensemble des points en lesquels f est discontinue est dénombrable.