Contrôle Continu 2 - 11 avril 2018

Durée : 1h30

Aucun document ou appareil électronique n'est autorisé. La qualité de la rédaction sera un élément important pour la notation.

Exercice 1 En explicitant bien tous les arguments utilisés, calculer

$$\int_D \cos(x^2+y^2)\,d\lambda_2(x,y),$$

où λ_2 désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ et D est le disque ouvert centré en 0 et de rayon 1.

Correction : On commence par observer que l'application $(x,y)\mapsto \cos(x^2+y^2)$ est continue et donc borélienne sur D, et prend des valeurs positives. On note $\tilde{D} = D \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$. Comme $\mathbb{R}_- \times \{0\}$ est de mesure nulle, on a

$$\int_D \cos(x^2+y^2)\,d\lambda_2(x,y) = \int_{\tilde{D}} \cos(x^2+y^2)\,d\lambda_2(x,y).$$

L'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,1[\times]-\pi,\pi[& \to & \tilde{D} \\ (r,\theta) & \mapsto & (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \end{array} \right.$$

est un C^1 difféomorphisme et pour tout $(r,\theta)\in]0,1[\times]-\pi,\pi[$ on a $\operatorname{Jac}\varphi(r,\theta)=r$. D'après le théorème de changement de variable (pour une fonction à valeurs positives) on a

$$\int_D \cos(x^2+y^2)\,d\lambda_2(x,y) = \int_{]0,1[\times]-\pi,\pi[} \cos(r^2) r\,d\lambda_2(r,\theta).$$

Comme $\mathbb{R}^2$ est σ-fini, on obtient par le théorème de Fubini-Tonelli

$$\int_D \cos(x^2+y^2)\,d\lambda_2(x,y) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^1 \cos(r^2) r\,dr \right) d\theta.$$

On calcule alors

$$\int_D \cos(x^2+y^2)\,d\lambda_2(x,y) = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\sin(r^2)}{2} \right]_0^1 d\theta = \pi\sin(1).$$

□

Exercice 2 On note

$$\Delta = \left\{ (x,y)\in[0,1]^2 \mid x^2+y^2 \geqslant 1 \right\}.$$

Calculer

$$\int_\Delta \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^2}\,d\lambda_2(x,y).$$

Correction : On commence par observer que la fonction $(x,y)\mapsto \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^2}$ et continue et prend des valeurs positives sur Δ. Pour $x\in\mathbb{R}$ on note

$$\Delta_x = \{ y\in\mathbb{R} \mid (x,y)\in\Delta \}.$$

On a

$$\Delta_x = \begin{cases} [\sqrt{1-x^2}, 1] & \text{si } x\in[0,1], \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'après le théorème de Fubini-Tonelli on a alors

$$\int_\Delta \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^2}\,d\lambda_2(x,y) = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^1 \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^2}\,dy \right) dx.$$

On calcule alors

$$\begin{aligned} \int_\Delta \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^2}\,d\lambda_2(x,y) &= \int_0^1 \left[-\frac{x}{2(1+x^2+y^2)} \right]_{\sqrt{1-x^2}}^1 dx = \int_0^1 \left(-\frac{x}{2(2+x^2)} + \frac{x}{4} \right) dx \\ &= \left[-\frac{\ln(2+x^2)}{4} + \frac{x^2}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{8} + \frac{\ln(2)-\ln(3)}{4}. \end{aligned}$$

□

Exercice 3 Dans cet exercice, $\mathbb{R}$ est muni de sa tribu borélienne usuelle et de la mesure de Lebesgue.

1. Soient f et g deux fonctions mesurables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction $y \mapsto f(y)g(x-y)$ est mesurable. Lorsque cette application est intégrable sur $\mathbb{R}$ on pose

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\, dy.$$

Correction : Pour $x \in \mathbb{R}$ on note F_x la fonction $y \mapsto f(y)g(x-y)$. La fonction $y \mapsto g(x-y)$ est mesurable comme composée de la fonction g avec la fonction $y \mapsto x-y$ continue et donc mesurable. Ainsi F_x est mesurable comme produit de fonctions mesurables. □

2. Soient $p, q \in [1, +\infty]$ deux exposants conjugués. On suppose que $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R})$. Montrer que $(f * g)(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, que la fonction $(f * g)$ ainsi définie est bornée, et que

$$\sup_{\mathbb{R}} |f * g| \leqslant \|f\|_p \|g\|_q .$$

Correction : Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $g_x : y \mapsto g(x-y)$. En effectuant le changement de variables $s = x - y$, $ds = -dy$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} |g_x(y)|^q \; dy = \int_{\mathbb{R}} |g(x-y)|^q \; dy = \int_{\mathbb{R}} |g(y)|^q \; dy,$$

donc $\|g_x\|_q = \|g\|_q$ et en particulier $g_x \in \mathcal{L}^q$.

D'après l'inégalité de Hölder on a alors

$$\int_{\mathbb{R}} |f(y)|\, |g_x(y)| \; dy \leqslant \|f\|_p \|g_x\|_q = \|f\|_p \|g\|_q .$$

Cela prouve que $(f * g)(x)$ est bien défini et

$$|(f * g)(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(y)|\, |g_x(y)| \; dy \leqslant \|f\|_p \|g\|_q .$$

Ceci étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $(f * g)$ est bornée et

$$\sup_{\mathbb{R}} |f * g| \leqslant \|f\|_p \|g\|_q .$$

□

3. On suppose maintenant que f et g appartiennent à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

a. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y)|\, |g(x-y)| \; dy \right) dx = \|f\|_1 \|g\|_1 .$$

b. Montrer que $(f * g)(x)$ est bien définie pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

c. Montrer que la fonction $(f * g)$ ainsi définie (presque partout) est intégrable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1 .$$

d. Montrer que les fonctions $f * g$ et $g * f$ (bien définies presque partout) coïncident là où elles sont définies.

Correction :

a. D'après le théorème de Fubini-Tonelli on a

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y)|\, |g(x-y)| \; dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x-y)| \; dx \right) dy$$

(comme l'application $(x, y) \mapsto |f(y)|\, |g(x-y)|$ est mesurable, le fait que ces intégrales existent fait partie des conclusions du théroème de Fubini-Tonelli). Comme à la question précédente on a

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x-y)| \; dx = \int_{\mathbb{R}} |g(s)| \; ds = \|g\|_1 ,$$

d'où

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y)|\, |g(x-y)| \; dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}} |f(y)|\, \|g\|_1 \; dy = \|f\|_1 \|g\|_1 .$$

b. D'après la question précédente, l'application

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}} |F_x(y)| \; dy$$

est intégrable, donc il existe $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $\lambda(E) = 0$ et F_x est intégrable pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus E$ (c'est en fait l'une des conclusion du théorème de Fubini-Lebesgue). Ainsi, $(f * g)(x)$ est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus E$, et donc presque partout. On peut éventuellement compléter la définition de $(f * g)$ par des valeurs arbitraires sur E.

c. Toujours d'après le théorème de Fubini-Lebesgue la fonction $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} F_x(y)\, dy$ est mesurable. En outre on a

$$\int_{\mathbb{R}} |(f * g)(x)| \; dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |F_x(y)| \; dy \right) \; dx \leqslant \|f\|_1 \, \|g\|_1 \, .$$

D'où $(f * g) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ avec

$$\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \, \|g\|_1 \, .$$

d. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus E$. On effectue le changement de variable $y = x - s$ et on obtient

$$(g * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} g(y) f(x - y)\, dy = \int_{\mathbb{R}} g(x - s) f(s)\, ds = (f * g)(x).$$

D'où $(g * f) = (f * g)$ sur $\mathbb{R} \setminus E$. $\square$

4. Pour $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ on a $(f * g) \in L^1(\mathbb{R})$ et $\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \, \|g\|_1$. Expliquer ce que cela signifie et le justifier.

Correction : Soient $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ telles que $f_1 = f_2$ et $g_1 = g_2$ presque partout. Pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\int_{\mathbb{R}} |f_1(y)| \, |g_1(x - y)| \; dy = \int_{\mathbb{R}} |f_2(y)| \, |g_2(x - y)| \; dy$$

donc $(f_1 * g_1)(x)$ est défini si et seulement si $(f_2 * g_2)(x)$ l'est. En outre, dans ce cas les valeurs de $(f_1 * g_1)(x)$ et $(f_2 * g_2)(x)$ coïncident. Par ailleurs $\|f_1\|_1 \, \|g_1\|_1 = \|f_2\|_1 \, \|g_2\|_1$. Ainsi, pour $f, g \in \mathcal{L}^1$ et $[f], [g]$ leurs classes d'équivalence dans $L^1(\mathbb{R})$ on peut poser

$$[f] * [g] = [f * g].$$

On a alors

$$\|[f * g]\|_1 \leqslant \|[f]\|_1 \, \|[g]\|_1 \, .$$

$\square$

5. Soient $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et ρ une fonction de classe C^∞ et à support compact de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a. Montrer que $(f * \rho)(x)$ est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b. Montrer que la fonction $(f * \rho)$ ainsi définie est continue sur $\mathbb{R}$.

c. Montrer que $(f * \rho)$ est en fait de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Correction :

a. Comme ρ est continue et à support compact, elle est en particulier dans $\mathcal{L}^\infty$. Ainsi $(f * \rho)$ est bien défini d'après la question 2.

b. On a déjà vu que la fonction $y \mapsto f(y)\rho(x - y)$ est mesurable pour tout $y \in \mathbb{R}$. D'autre part, la fonction $x \mapsto f(y)\rho(x - y)$ est continue par continuité de ρ et de la fonction $x \mapsto x - y$. En outre pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$|f(y)\rho(x - y)| \leqslant |f(y)| \, \|\rho\|_\infty \, .$$

Or la fonction $y \mapsto |f(y)| \, \|\rho\|_\infty$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc par le théorème de continuité sous l'intégrale, on obtient que la fonction

$$x \mapsto (f * \rho)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\rho(x - y)\, dy$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

c. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que la fonction $(f * g)$ est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(f * g)^{(n)}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\rho^{(n)}(x - y)\, dy.$$

On a montré le cas $n = 0$. Supposons maintenant le résultat acquis jusqu'au rang n avec $n \in \mathbb{N}$. Puisque ρ est de classe C^{n+1} et à support compact, les fonctions $\rho^{(n)}$ et $\rho^{(n+1)}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$. En particulier l'application $y \mapsto f(y)\rho^{(n)}(x - y)$ est bien intégrable sur $\mathbb{R}$. En outre l'application $x \mapsto f(y)\rho^{(n)}(x - y)$ est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$ et

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} f(y)\rho^{(n)}(x - y) \right| = \left| f(y)\rho^{(n+1)}(x - y) \right| \leqslant |f(y)| \left\| \rho^{(n+1)} \right\|_\infty .$$

Or la fonction $y \mapsto |f(y)| \left\| \rho^{(n+1)} \right\|_\infty$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc par le théorème de dérivation sous l'intégrable on obtient que $(f * g)^{(n)}$ est dérivable (et donc $(f * g)$ est $(n + 1)$ fois dérivable) avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(f * g)^{(n+1)}(x) = ((f * g)^{(n)})'(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\rho^{(n+1)}(x - y)\, dy.$$

Par récurrence, on a donc obtenu que $(f * g)$ est en fait de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. $\square$